Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen II (1995), pp.167-171

CRIBAS Y ADJUNCIÓN

VÍCTOR ARDILA, CARLOS JULIO, ALVARO DUQUE,
JOAQUÍN LUNA, MAURICIO RESTREPO(*)

Resumen. Una función entre conjuntos induce dos aplicaciones entre los conjuntos de partes: imagen directa e imagen recíproca, las cuales determinan un par adjunto. En este artículo, se estudian los funtores de cribas en una categoría y sus relaciones con los funtores de partes de la categoría de conjuntos. Mediante un ejemplo se observa que la imagen directa de cribas no es adjunto a derecha de la imagen inversa y aprovechando el hecho de que ésta última conmuta con extremos superiores y conserva extremos inferiores, se define un nuevo adjunto.

Abstract. Functorial relationships between inverse and direct images, sieves and subsets are studied. A right adjoint to inverse images of sieves is proposed.
Keywords. Sieves, adjointness.

1. Noción de criba

En la categoría de abiertos de un espacio topológico, la noción de haz de conjuntos utiliza la noción de cubrimiento por abiertos. Dada una categoría pequeña [1, p.12], para generalizar el concepto de haz vía topologías de Grothendieck, es necesario introducir la noción de criba cubriente [1, pp.109-110]. Aunque las cribas desempeñan un papel importante en las ideas desarrolladas por Grothendieck, nos limitamos simplemente aquí a estudiar un problema de adjunción entre los funtores de cribas.

(*)Texto recibido 27/5/96, revisado 19/11/96. Víctor Ardila, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional; e-mail: viardila@ciencias.ciencias.unal.edu.co. Carlos Julio, Universidad Distrital. Alvaro Duque, Universidad Javeriana. Joaquín Luna, Universidad Distrital. Mauricio Restrepo, Universidad Javeriana; e-mail: mretrep@Javercol.Javeriana.edu.co. Integrantes del grupo Vialtopo.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Definición. Sea $\mathbf{C}$ una categoría pequeña y X un objeto de $\mathbf{C}$. Una criba sobre X es un conjunto S de morfismos de $\mathbf{C}$ con codominio X, tales que $f \in S$ y $f \circ g$ bien definida implica $f \circ g \in S$.

El conjunto de todas las cribas sobre un objeto X se denotará mediante $Crib(X)$.

Ejemplos. En la categoría $\mathbf{O}(Y)$ formada por los abiertos de un espacio topológico Y, los morfismos están dados por las inclusiones. Dado un abierto U de Y, si identificamos cada inclusión con su imagen y consideramos un abierto V contenido en U, la colección de abiertos contenidos en V determina una criba S sobre U.

En la categoría asociada al conjunto ordenado de partes $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, donde $X = \{0, 1\}$, las cribas sobre el objeto $\{0\}$ son $\emptyset$, $\{j\}$ y $\{j, id\}$ donde $j: \emptyset \to \{0\}$ es la inclusión de vacío en $\{0\}$ y id es la identidad. Nótese que $\{id\}$ no es una criba sobre $\{0\}$, puesto que la compuesta $id \circ j = j$ está definida y $j \notin \{id\}$.

2. Cribas como subfuntores

Dado un prehaz $P: \mathbf{C}^{op} \to Conj$, se dice que un prehaz $Q: \mathbf{C}^{op} \to Conj$ es un subfuntor de P si y sólo si

i) Para todo objeto X de $\mathbf{C}$, $Q(X) \subseteq P(X)$.

ii) Para todo par de objetos X, Y de $\mathbf{C}$, y para todo morfismo $f: X \to Y$ en $\mathbf{C}$, la función $Q(f)$ es la restricción de $P(f)$, es decir el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Q(X) \arrow[r, "\subseteq"] & P(X) \\
Q(Y) \arrow[u, "Q(f)"] \arrow[r, "\subseteq"'] & P(Y) \arrow[u, "P(f)"']
\end{tikzcd}$$

Existe una correspondencia biyectiva entre los subfuntores del funtor $Hom_{\mathbf{C}}(-, X)$ y el conjunto $Crib(X)$ de cribas sobre X. La correspondencia puede hacerse en la siguiente forma:

i) Si Q es un subfuntor de $Hom_{\mathbf{C}}(-, X)$, el conjunto: $S = \{f \mid \text{para algún objeto } A,\ f: A \to X \text{ y } f \in Q(A)\}$ es una criba sobre X.

ii) Si S es una criba sobre X, la asignación $Q\colon \mathbf{C}^{op} \to Conj$ dada por $Q(A) = \{f \mid f\colon A \to X \text{ y } f \in S\}$ es un funtor contravariante y además es subfuntor de $Hom_{\mathbf{C}}(-,X)$. Por tanto $Crib(X) \cong$ Subfuntores de $Hom_{\mathbf{C}}\,(-,X)$.

3. Algunos funtores de cribas

Si $S \in Crib(X)$ y $h\colon Y \to X$ es un morfismo de $\mathbf{C}$, el conjunto $h^*(S)$ de morfismos de $\mathbf{C}$ con codominio Y, tales que su composición con h es un elemento de S, es una criba sobre Y, es decir, si $h^*(S) = \{f \mid Cod(f) = Y \text{ y } h \circ f \in S\}$, entonces $h^*(S) \in Crib(Y)$. Lo anterior define un funtor contravariante $Crib^*\colon \mathbf{C}^{op} \to Conj$ cuyo comportamiento sobre morfismos se muestra en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad h \quad} & X \\ \hline Crib(Y) & \xleftarrow[\quad h^* \quad]{} & Crib(X) \end{array}$$

En forma dual si $R \in Crib(Y)$ y $h\colon Y \to X$ es un morfismo de $\mathbf{C}$, el conjunto $h_*(R)$ de morfismos de $\mathbf{C}$ que son composiciones de la forma $h \circ f$, donde $f \in S$, es una criba sobre X. Así, si $R \in Crib(Y)$, y $h_*(R) = \{h \circ f \mid f \in R\}$, entonces $h_*(R) \in Crib(X)$. Esto define un funtor covariante $Crib_*\colon \mathbf{C}^{op} \to Conj$ cuyo comportamiento se muestra a continuación.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad h \quad} & X \\ \hline Crib(Y) & \xrightarrow[\quad h_* \quad]{} & Crib(X) \end{array}$$

4. Relaciones entre el conjunto de partes y las cribas

Si $f\colon X \to Y$ es una función de conjuntos, ésta determina tres funciones naturales entre los respectivos conjuntos de partes, las cuales se muestran en el siguiente diagrama:

$$P(X) \xrightarrow{f_!} P(Y) \xrightarrow{f^!} P(X) \xrightarrow{f_.} P(Y)$$

$f_!$ es la imagen directa, $f^!$ es la imagen inversa y la función $f_.$ representa el complemento de la imagen del complemento, es decir, $f_.(A) = [f(A^c)]^c$. Los pares de funciones $(f_!, f^!)$ y $(f^!, f_.)$ son pares adjuntos en el sentido del orden: $f_!(A) \subseteq B \Longleftrightarrow A \subseteq f^!(B)$ [2, pp. 65-69].

En el caso en que $f\colon X \to Y$ es un morfismo de $\mathbf{C}$, y bajo el supuesto que $\mathbf{C}$ es una categoría pequeña, la colección $|\mathbf{C}/X|$ de morfismos de $\mathbf{C}$ con codominio X es un conjunto y al tomar partes de este conjunto se obtiene un diagrama semejante al anterior. Además, en el diagrama

$$Crib(X) \xrightarrow{f_*} Crib(Y) \xrightarrow{f^*} Crib(X) \xrightarrow{?} Crib(Y)$$

f_* conmuta con extremos superiores y $f_*(\emptyset) = \emptyset$; entonces f_* admite adjunto a derecha. Como f^* conmuta con extremos inferiores y envía elemento máximo en elemento máximo, f^* admite adjunto a izquierda. Como $f_*(R) \subseteq S \Longleftrightarrow R \subseteq f^*(S)$, (f_*, f^*) es un par adjunto.

La dificultad de encontrar un adjunto a derecha de f^* radica en que el complemento de una criba no es criba, por tanto la función $f_.$ no sirve como adjunto a derecha de f^*. El siguiente ejemplo muestra que la función $f_.$ no es apropiada para ser adjunto a derecha de f^*. Si $\mathbf{C}$ es la categoría asociada al conjunto de partes de $X = \{0,1\}$ y $h\colon \{0\} \to \{0,1\}$ es el morfismo inclusión, para la criba $\{j\}$ sobre el objeto $\{0\}$, en donde j es la inclusión de $\emptyset$ en $\{0\}$, se tiene que: $[h_*(\{j\}^c)]^c = [h_*(\{id\})]^c = \{h\}^c = \{h \circ j, k, id\}$ y el conjunto $\{h \circ j, k, id\}$ no es una criba sobre $\{0,1\}$. Los objetos y los morfismos de esta categoría se muestran en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& \{0,1\} & \\
\{0\} \arrow[ur, "h"] & & \{1\} \arrow[ul, "k"'] \\
& \emptyset \arrow[ul, "j"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

De todas formas, en el siguiente diagrama se tienen los pares adjuntos: (f_*, f^*), $(f_!, f^!)$ y $(f^!, f_.)$. Los morfismos verticales son simplemente inclusiones entre conjuntos, pues una criba sobre X se definió como un subconjunto de morfismos de $\mathbf{C}$ con dominio X, es decir un subconjunto de $|\mathbf{C}/X|$.

$$\begin{tikzcd}
Crib(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d] & Crib(Y) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d] & Crib(X) \arrow[r, "f_\square"] \arrow[d] & Crib(Y) \arrow[d] \\
P(|\mathbf{C}/X|) \arrow[r, "f_!"] & P(|\mathbf{C}/Y|) \arrow[r, "f^!"] & P(|\mathbf{C}/X|) \arrow[r, "f_."] & P(|\mathbf{C}/Y|)
\end{tikzcd}$$

Como también se tiene que f^* conmuta con extremos superiores y $f^*(\emptyset) = \emptyset$, entonces f^* admite adjunto a derecha; si $f_\square$ es tal adjunto éste debe satisfacer la relación:

$$f^*(R) \subseteq S \Longleftrightarrow R \subseteq f_\square(S)$$

Definición de $f_\square$. Sea $S \in Crib(X)$ y sea $M = \{R \in Crib(Y) | f^*(R) \subseteq S\}$; se define el adjunto mediante: $f_\square(S) = \cup_{R \in M} R$.

Para demostrar que la función así definida es adjunto a derecha de f^*, se verifican las afirmaciones siguientes: *i*) Si $R \subseteq f_\square(S)$, entonces $f^*(R) \subseteq f^*(\cup_{R\in M} R) = \cup_{R \in M} f^*(R) \subseteq S$. *ii*) Si $f^*(R) \subseteq S$, entonces $R \in M$, luego $R \subseteq \cup_{R \in M} R$, por tanto $R \subseteq f_\square(S)$.

Referencias

1. S. MacLane, I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic*, New York: Springer, 1992.
2. R. Montañés, *Fibraciones categóricas. Conservación de estructuras y construcciones*, Tesis de Magister, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional, Bogotá, 1994.