Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen III (1996), pp.51-54

ACERCA DEL RECÍPROCO DEL LEMA DE SCHUR

VÍCTOR ARDILA, SONIA SABOGAL(*)

Resumen. Se propone un contraejemplo no usual para el recíproco del lema de Schur, obteniendo una caracterización del campo de los números reales como un conjunto de endomorfismos de cierto módulo.

Abstract. A non usual counterexample to the reciprocal of Schur's Lemma is proposed.
Keywords. Modules, Schur's lemma, matrices.

En nuestro período de preparación para presentar el examen de candidatura en álgebra del Programa de Doctorado en Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, resolvimos una gran cantidad de ejercicios propuestos en algunos de los libros clásicos de álgebra, y encontramos varios de ellos especialmente interesantes. En particular, queremos compartir con los lectores de este *Boletín* un contraejemplo que encontramos, relacionado con el recíproco del Lema de Schur.

En [1] y [2], entre otros, se enuncia y demuestra el siguiente lema, de cierta importancia en la Teoría de Módulos.

Lema de Schur. *Si M es un R-módulo simple (es decir, tal que sus únicos submódulos son los triviales), entonces el anillo de endomorfismos de R-módulo, $End_R M$, es un campo (no necesariamente conmutativo).*

(*)Texto recibido 29/8/96, revisado 4/11/96. Víctor Ardila, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional, e-mail: viardila@ciencias.ciencias.unal.edu.co.; Sonia Sabogal, Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, e-mail: ssabog@ciencias.ciencias.unal.edu.co. La segunda autora desea dar crédito a COLCIENCIAS, entidad que le otorgó una beca-crédito condonable, durante los años 1994 a 1996, para adelantar sus estudios de doctorado en matemáticas en la Universidad Nacional de Colombia.

En todas las referencias consultadas encontramos que, entre los ejercicios propuestos, se plantea, de una u otra manera, la pregunta de si el recíproco del lema vale o no (ver [1, p.156, ejer.9] y [2, p.164]).

Un contraejemplo usual para este recíproco consiste en considerar $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{Z}$-módulo, el cual no es simple, aunque el anillo de $\mathbb{Z}$-endomorfismos de $\mathbb{Q}$ es campo. A continuación se muestra otro contraejemplo sencillo, aunque *no usual* a dicho recíproco.

Tómese como anillo

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

el conjunto de matrices triangulares superiores de orden 2 con componentes reales, con la suma y el producto usual de matrices, y como R-módulo $M = \mathbb{R}^2$ con la suma usual de $\mathbb{R}^2$ con vectores columna, y como producto escalar, el producto usual de una matriz 2×2 por un vector columna.

Dado $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un endomorfismo de R-módulos, llamemos $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ a la imagen de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mediante f. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= f\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx \\ ny \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y, por otro lado,

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= f\left(\begin{pmatrix} x-y & y \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y & y \\ 0 & y \end{pmatrix} f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x-y & y \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx - my + ny \\ ny \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Concluímos así que $m = n$.

Lo anterior permite entonces afirmar que todo $f \in End_R\mathbb{R}^2$ es de la forma $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx \\ my \end{pmatrix}$, para algún número real m.

Recíprocamente, se puede verificar fácilmente que para cualquier número real m la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por: $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx \\ my \end{pmatrix}$ es un endomorfismo de R-módulos. Así, se ha obtenido una caracterización del anillo $End_R\mathbb{R}^2$:

$f \in End_R\mathbb{R}^2$ si y solo si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx \\ my \end{pmatrix}$ para todo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Es claro ahora que si $f \in End_R\mathbb{R}^2$, y si $f \neq 0$, entonces f es invertible en $End_R\mathbb{R}^2$. Por lo tanto el anillo $End_R\mathbb{R}^2$ es un campo.

Por otra parte se tiene que $\mathbb{R}^2$ como R-módulo no es simple, para lo cual basta observar que, por ejemplo, el conjunto $N = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ es un R-submódulo no trivial de $\mathbb{R}^2$.

Observación 1. Si consideramos $F : \mathbb{R} \longrightarrow End_R\mathbb{R}^2$, la aplicación que a cada real m asigna el endomorfismo F_m definido por $F_m\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx \\ my \end{pmatrix}$, tal F resulta ser un isomorfismo de anillos con unidad (claramente $F(1) = id_{\mathbb{R}^2}$), y puesto que $\mathbb{R}$ es un campo, entonces:

$$End_R\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}\ (isomorfismo\ de\ campos).$$

Observación 2. Los razonamientos anteriores se pueden generalizar sin dificultad a $\mathbb{R}^n$ visto como un módulo sobre el anillo R_n de las matrices triangulares superiores de tamaño $n \times n$ con componentes reales. Si $f \in End_{R_n}\mathbb{R}^n$, sean $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ y $f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$; entonces $f(\vec{x}) = diag(x_1, \ldots, x_n)f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} m_1x_1 \\ \vdots \\ m_nx_n \end{pmatrix}$. Por otra parte,

$$f(\vec{x}) = f(P\vec{u}) = Pf(\vec{u}) = \begin{pmatrix} m_1x_1 - m_1x_2 + m_2x_2 \\ m_2x_2 - m_2x_3 + m_3x_3 \\ \vdots \\ m_{n-1}x_{n-1} - m_{n-1}x_n + m_nx_n \\ m_nx_n \end{pmatrix},$$

donde

$$P = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & x_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & x_2 - x_3 & x_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x_{n-1} - x_n & x_n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & x_n \end{pmatrix}.$$

De lo anterior se puede deducir que $m_1 = m_2 = \ldots = m_n$.

Recíprocamente, dada $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} mx_1 \\ \vdots \\ mx_n \end{pmatrix}$, entonces f es un R_n–endomorfismo de $\mathbb{R}^n$. Se puede afirmar entonces que para cualquier natural n, los campos $End_{R_n}\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$ son isomorfos (basta considerar la aplicación $F : \mathbb{R} \longrightarrow End_{R_n}\mathbb{R}^n$ que a cada real m asigna el endomorfismo F_m definido por $F_m(\vec{x}) = \begin{pmatrix} mx_1 \\ \vdots \\ mx_n \end{pmatrix}$).

La observación anterior no deja de ser interesante pues se obtiene una caracterización del campo de los reales como un conjunto de endomorfismos del R_n-módulo $\mathbb{R}^n$, para cada n entero positivo. Además se obtiene, para cada n entero positivo, $n \geq 2$, un contraejemplo al recíproco del Lema de Schur, ya que en el R_n-módulo $\mathbb{R}^n$, el conjunto $H_n = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ es un submódulo no trivial.

Observación 3. Si, como es más usual, se considerara $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}$-módulo (es decir como espacio vectorial), entonces $End_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$ es un anillo (isomorfo al anillo de matrices cuadradas de orden 2 con componentes reales) que *no es campo*.

Observación 4. Nótese que, mientras que en el ejemplo usual de $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{Z}$–módulo el anillo $End_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ resulta ser en realidad un campo isomorfo a $\mathbb{Q}$, en el ejemplo que presentamos, el anillo $End_R\mathbb{R}^2$ resulta ser también un campo, pero isomorfo a $\mathbb{R}$.

Referencias

1. F. W. Anderson, K. R. Fuller, ***Rings and Categories of Modules***, New York: Springer Verlag, 1974.
2. N. Jacobson, ***Basic Algebra 1***, San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1974.