

El problema de auto-valores sobre dominios paramétricos: algunos experimentos numéricos

Edinson Fuentes^{1,a}

Resumen. En este trabajo revisamos algunos conceptos básicos relacionados al cálculo numérico de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales. En particular, aplicamos el método de (los) elementos finitos al cálculo de auto-valores y auto-funciones de operadores elípticos en dominios paramétricos. Consideramos dos aplicaciones particulares usando el programa especializado en elementos finitos llamado **FreeFem++**. En la primera el dominio es parametrizado por un ángulo θ y consiste de un disco circular de radio uno del que se ha retirado un sector circular de ángulo θ ; el valor ángulo θ varía desde cero hasta noventa grados. Numéricamente calculamos una dependencia cuadrática de los dos primeros auto-valores con respecto al ángulo θ . El segundo ejemplo se considera un parámetro entero n y el dominio consiste de un disco circular del que se han retirado n círculos menores. En este último ejemplo observamos el fenómeno conocido como localización de auto-funciones.

Palabras claves: Ecuaciones diferenciales parciales, método de los elementos finitos, auto-valor, auto-función, Freefem++.

Abstract. In this paper we review some basic facts concerning the numerical approximation of partial differential equations. In particular, we apply the finite element method to the approximations of eigenvalues and eigenfunctions of elliptic operators defined in parametric domains. We consider two applications and compute using the specialized software **FreeFem++**. The first domain is parameterized by an angle θ and consists of a unit disc from which a sector of angle θ its been cut-off; the value of θ runs from zero to ninety degrees. We obtain a quadratic dependence of the first two eigenvalues with respect to the angle θ . For the second example we consider an integer-valued parameter n and the domain consists of a unit disc with n circular holes. In this example we observe localization of eigenvalues.

Keywords: Partial differential equations, finite element method, eigenvalue problems, Freefem++.

Mathematics Subject Classification: 51K99.

Recibido: septiembre de 2014

Aceptado: octubre de 2014

¹Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia y Escuela de Matemáticas y Estadística, Tunja, Boyacá, Colombia

^aedinson.fuentes@uptc.edu.co

1. Introducción

El problema del valor propio en la teoría de operadores elípticos, ha sido investigado en varias disciplinas como matemáticas, física e ingeniería, incluyendo áreas como teoría espectral, probabilidad, procesos estocásticos, sistemas dinámicos, física de la materia condensada, acústica, óptica y ciencias de la computación, entre otras, ver [9].

Por ejemplo, las auto-funciones aparecen como nodos de vibración en la acústica y como funciones de onda de electrones en sistemas de partículas. También aparecen como una base natural para la construcción del núcleo del calor en la teoría de difusión y en muchas otras aplicaciones teóricas y prácticas [9, 10]. Para los orígenes y motivaciones de los problemas de auto-valores en general vea [10, Capítulo X]. Para aplicaciones relacionadas con operadores elípticos vea [1, 9] y las referencias allí citadas.

En este trabajo aplicamos el *método de (los) elementos finitos* para el cálculo de auto-valores y auto-funciones de operadores elípticos. Hacemos una revisión rápida que incluye el problema concreto, su discretización y su solución numérica. No revisamos las cuestiones analíticas, pero en el documento son mencionados algunos aspectos relacionados y los lectores interesados pueden consultar la bibliografía citada; para temas introductorios relacionados vea [3, 9] y para una revisión histórica del método de los elementos finitos aplicado a problemas de auto-valores recomendamos [8].

En el presente manuscrito consideraremos una aplicación al cálculo de auto-valores cuando el dominio depende de un parámetro (que puede afectar las propiedades geométricas y topológicas del mismo). Mostramos aquí el poder de las aplicaciones numéricas ya que si bien este problema puede considerarse desde el punto de vista analítico, tal abordaje requerirá conocimientos avanzados de análisis y ecuaciones diferenciales parciales. Notamos que resultados numéricos así obtenidos, pueden motivar observaciones y resultados teóricos útiles en aplicaciones. Quedando claro que, para el estudio de convergencia y cuestiones avanzadas, es necesario conocer la teoría detrás de los problemas de auto-valores.

Notamos que este trabajo constituye un estudio preliminar en relación a desarrollos teóricos y prácticos en el campo del Método de los Elementos Finitos Multiescala Generalizados (GMsFEM) recientemente introducidos en [6]. GMsFEM es un método numérico eficiente para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales complicadas. Este método usa aproximaciones a problemas de auto-valores locales y el diseño del mismo para aplicaciones específicas requiere de algún grado de entendimiento del comportamiento de los valores propios y de las auto-funciones. Estudios como los de este artículo pretenden contribuir al entendimiento de los auto-valores y auto-funciones en el caso de que los dominios sufran cambios topológicos como los que se presentan en aplicaciones de ecuaciones diferenciales en donde se requiere cambiar las triangulaciones de acuerdo con algún flujo o propiedad de la solución. Este artículo constituye la base de estudios preliminares para la extensión de los métodos (GMsFEM) para este tipo de problemas.

El problema que nos interesa abordar se detalla a continuación. Dado una familia de dominios $\Omega_\theta \subset \mathbb{R}^2$, donde $\theta \in \mathbb{R}$ es un parámetro, se desea estudiar

numéricamente el problema de auto-valores,

$$-\mathbf{div}(k(x, y)\nabla_x \mu_\theta(x, y)) = \lambda_\theta \mu_\theta(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_\theta. \quad (1)$$

Aquí, $\kappa(x, y)$ es una función de valores reales, λ_θ denota el valor propio, μ_θ denota la función propia y Ω_θ denota un dominio abierto y acotado de \mathbb{R}^2 . Queremos investigar y deducir propiedades sobre la dependencia de algunos auto-valores con respecto al parámetro θ . Adicionalmente se desea estudiar la dependencia de las auto-funciones en términos del parámetro θ .

Presentaremos en particular, dos aplicaciones:

1. La primera aplicación corresponde a un disco circular menos una sección angular. Se considera un parámetro de valores reales, $\theta \in \mathbb{R}$ con $0 \leq \theta < 2\pi$ y el dominio definido para $\theta = 0$ por $\Omega_0 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ y para $\theta > 0$ por,

$$\Omega_\theta = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1 \quad \text{y} \quad 2\pi > \text{atan}(y/x) > \theta\}.$$

2. La segunda aplicación corresponde a un disco circular con orificios. Se considera $\theta = 0, 1, 2, \dots, N_\theta$, números reales $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{N_\theta}, y_{N_\theta}$ y definimos

$$\Omega_\theta = B((0, 0), 1) \setminus \cup_{i=1}^{\theta} B((x_i, y_i), \delta)$$

donde $\delta > 0$ y $B((x, y), r)$ denota la bola de centro (x, y) y radio δ .

Para evitar notación pesada, evitaremos escribir la dependencia de los objetos del parámetro θ a menos que sea necesaria. El resto del trabajo está organizado como sigue. En la Sección 2 presentamos la formulación de Galerkin del problema de auto-valores. En la Sección 3 presentamos los resultados del primer ejemplo con observaciones sobre los auto-valores y auto-funciones. En la Sección 4 presentamos el segundo ejemplo. En la Sección 5 presentamos algunas conclusiones y en el Apéndice [A] mostramos en detalle uno de los códigos usados en `FreeFem++`.

2. Formulación de Galerkin para el problema de auto-valores

Para aplicar el método de los elementos finitos al problema (1) debemos escribir la formulación débil del problema de auto-valores y seguidamente proponer la formulación de Galerkin, la cual es equivalente a un problema matricial (de auto-valores generalizados), ver [2, 5, 7].

De ahora en adelante asumiremos que la condición de frontera que acompaña al problema (1) es Dirichlet homogénea. Otras condiciones de frontera y otros problemas de auto-valores para operadores elípticos más generales pueden ser también considerados de manera similar. Ver [1, 3].

La formulación fuerte (S) del problema (1) se puede escribir de la siguiente manera,

$$\begin{cases} \text{Encontrar } \mu(x, y) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ no nulo y } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tales que,} \\ -\mathbf{div}(k(x, y)\nabla \mu(x, y)) = \lambda \mu(x, y), \text{ para } (x, y) \in \Omega, \\ \mu(x, y) = 0 \quad \text{para } (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

Para escribir la formulación débil del problema (S) vamos a introducir un espacio de *Sobolev* adecuado, ver [9]. Sea

$$V = H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\},$$

donde

$$H^1(\Omega) = \{u \mid u \in L^2(\Omega) \text{ y } \partial_x u, \partial_y u \in L^2(\Omega)\}.$$

El lector no familiarizado con los espacios de Sobolev puede, para efectos de los cálculos siguientes, sustituir V por el espacio $C_0^\infty(\Omega)$, el espacio de las funciones que junto con todas sus derivadas parciales son infinitamente diferenciales y tienen soporte compacto contenido en Ω (y por ende tienen valor cero en $\partial\Omega$).

En lo que sigue denominamos $v \in V$ como una función de prueba. Multiplicando la ecuación (2) por una función de prueba arbitraria $v \in V$ e integrando se obtiene que

$$-\int_{\Omega} \mathbf{div}(k(x, y)\nabla\mu(x, y))v(x, y)dx dy = \lambda \int_{\Omega} \mu(x, y)v(x, y)dx dy.$$

Integrando por partes obtenemos,

$$\begin{aligned} & -\int_{\partial\Omega} k(x, y)v(x, y)\nabla\mu(x, y) \cdot n(x, y) + \\ & \int_{\Omega} k(x, y)\nabla\mu(x, y) \cdot \nabla v(x, y)dx dy = \lambda \int_{\Omega} \mu(x, y)v(x, y)dx dy, \end{aligned}$$

donde $n(x, y)$ representa el vector normal exterior a Ω en $(x, y) \in \partial\Omega$. Ahora, como $v \in V$, entonces v se anula en la frontera $\partial\Omega$ y por tanto se tiene que $-k(x, y)v(x, y)\nabla\mu(x, y) = 0$ en $\partial\Omega$. Por lo tanto la formulación débil (W) es,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \mu \in V, \text{ no nulo, y } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ tales que,} \\ \int_{\Omega} k(x, y)\nabla\mu(x, y) \cdot \nabla v(x, y)dx dy = \lambda \int_{\Omega} \mu(x, y)v(x, y)dx dy, \quad v \in V, \\ \mu = 0 \text{ en } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (3)$$

Notamos que la existencia y unicidad para esta formulación débil se sigue del Teorema de Lax-Milgram. Los detalles pueden ser consultados en las referencias [1, 9].

Una aproximación de Galerkin para la formulación débil anterior se basa en re-escribir este problema pero en un espacio de dimensión finita, en lugar del espacio V que es de dimensión infinita, ver [9]. En general, se escogen funciones base $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ($\in H_0^1(\Omega)$) y definimos,

$$V_h = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}.$$

La formulación de Galerkin (G) abstracta es,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \mu_h \in V_h, \text{ no nulo, y } \lambda_h \in \mathbb{R} \text{ tales que,} \\ \int_{\Omega} k(x, y)\nabla\mu_h(x, y) \cdot \nabla v(x, y)dx dy = \lambda_h \int_{\Omega} \mu_h(x, y)v(x, y)dx dy, \quad v \in V_h, \\ \mu = 0 \text{ en } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (4)$$

Esta formulación es equivalente a un problema matricial. Antes de recordar esta equivalencia, vamos a fijar las funciones base φ_i , $i = 1, \dots, n$.

Introducimos ahora el método de elementos finitos. La idea básica del método de los elementos finitos es usar funciones base de soporte pequeño, de tal manera que varias de las integrales que aparecen arriba, cuando son aplicadas a funciones base, se puedan calcular localmente y hasta se anulan varias de ellas.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio (poligonal) en donde está definido el problema de auto-valores. Introducimos una triangulación del dominio Ω , esto es, una partición de Ω en triángulos disyuntos. Llamaremos \mathcal{T}^h a la triangulación del dominio Ω y sus triángulos son llamados *elementos* y denotados por K_i , $i = 1, \dots, N_h$ donde N_h es el número de triángulos y $h = \max_{1 \leq i \leq N_h} \text{diámetro}(K_i)$ es el parámetro de la triangulación. Tenemos,

$$\cup_{i=1}^{N_h} \overline{K}_i = \overline{\Omega}, \quad K_i \cap K_j = \emptyset \text{ para } i \neq j.$$

Asumimos que la triangulación es casi-uniforme (lo que intuitivamente quiere decir que el tamaño y forma de cada triángulo es similar al de sus triángulos vecinos más cercanos, ver [2]). También asumimos que \mathcal{T}^h es una triangulación geoméricamente conforme, es decir, las clausuras de los triángulos son tales que

$$\overline{K}_i \cap \overline{K}_j = \begin{cases} \text{un triángulo completo, ó} \\ \text{un lado común completo, ó} \\ \text{un vértice, o} \\ \emptyset. \end{cases}$$

Mencionamos que los requerimientos sobre la triangulación \mathcal{T}^h son usuales para la aplicación exitosa del método de los elementos finitos, porque permiten aproximar dominios poco regulares usando solo triángulos casi del mismo tamaño, también este tipo de triangulación es el motivo por el cual este método haya tenido tanto éxito en los últimos años, ver [9].

El espacio de funciones lineales por partes asociado a la triangulación \mathcal{T}^h , denotado por $\mathbb{P}^1(\mathcal{T}^h)$ es el definido como

$$\mathbb{P}^1(\mathcal{T}^h) = \left\{ v \in C(\Omega) : \begin{array}{l} v|_K \text{ es un polinomio de grado total } 1 \\ \text{para todo } K \in \mathcal{T}^h \end{array} \right\}. \quad (5)$$

Denotemos por x_i , $i = 1, \dots, N_v$ los vértices de la triangulación donde N_v es el número total de vértices. El conjunto de índices

$$I = \{i \mid x_i \in \text{int}(\Omega)\} \quad \text{y} \quad \Gamma = \{i \mid x_i \in \partial\Omega\}.$$

Para $i = 1, \dots, N_v$ defina las funciones base por,

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = x_i, \\ 0, & \text{si } x = x_j, \quad j \neq i, \\ \text{extensión lineal,} & \text{si } x \text{ no es un vértice.} \end{cases}$$

Es fácil ver que $\mathbb{P}^1(\mathcal{T}^h) = \text{span}\{\phi_i\}$. También definimos

$$\mathbb{P}_0^1(\mathcal{T}^h) = \{v \in \mathbb{P}^1(\mathcal{T}^h) : v(x) = 0 \text{ para todo } x \in \partial\Omega\} = \text{span}\{\varphi_i, \quad i \in I\}.$$

Usamos entonces

$$V_h = \mathbb{P}_0^1(\mathcal{T}^h) = \text{span}\{\varphi_i, \quad i \in I\}.$$

Es decir, buscamos soluciones aproximadas de la forma

$$\mu(x, y) = \sum_{j \in I} \alpha_j \varphi_j.$$

Note que existe una correspondencia bi-unívoca entre escalares α_j y funciones de elementos finitos. Asuma que $n = \#(I)$ es el número de vértices interiores, y ordenando estos vértices de alguna manera podemos asociar a cada función de elementos finitos el vector de sus escalares, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Por la linealidad en las funciones de prueba, para garantizar que vale (G) en (4), basta tomar $v = \varphi_i$, $i \in I$. También observe que

$$\nabla \mu(x, y) = \sum_{j \in I} \alpha_j \nabla \varphi_j,$$

y sustituyendo en la ecuación (4) se obtiene que para todo $i \in I$ vale

$$\sum_{j \in I} \left(\int_{\Omega} k(x, y) \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \right) \alpha_j = \lambda_h \sum_{j \in I} \left(\int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i \right) \alpha_j.$$

Este último sistema de ecuaciones se puede expresar como una formulación matricial (M) que es equivalente a la formulación de Galerkin de la siguiente manera,

$$\begin{cases} \text{Encontrar coeficientes } (\alpha_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^n, \alpha \text{ no nulo y } \lambda_h \in \mathbb{R} \text{ tales que,} \\ A\alpha = \lambda_h M\alpha, \text{ con} \\ A = [a_{i,j}] \text{ donde } a_{ij} = \int_{\Omega} k(x, y) \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i dx dy, \quad y \\ M = [m_{i,j}] \text{ donde } m_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i dx dy. \end{cases} \quad (6)$$

Note que la formulación matricial (M) corresponde a un problema de auto-valores generalizados. Note también que las matrices A y M son simétricas definidas positivas y por tanto existen auto-valores y auto-funciones, además, los auto-valores son reales y positivos. Es importante también mencionar que las matrices A y M son matrices dispersas (sparse matrix en inglés) y por tanto los métodos iterativos son adecuados para el cálculo numérico de estos auto-valores o de algunos de ellos, vea [10].

De ahora en adelante denotamos los auto-valores del problema (M) por

$$0 < \lambda_h^{(1)} \leq \lambda_h^{(2)} \leq \dots \leq \lambda_h^{(n)}.$$

Note que ordenamos los auto-valores de forma creciente.

Para resolver estos sistemas matriciales usaremos el software Freefem++. Freefem++ usa métodos iterativos para encontrar soluciones de sistemas lineales y de problemas de auto-valores. Para más detalles vea [4, 10].

3. Región circular menos una sección angular

Se estudiara el problema de los valores propios en dos dimensiones en un dominio circular (circunferencia unidad) del cual se ha retirado una pequeña rodaja (sector circular) cuyo ángulo varía y es parametrizado por θ . Las condiciones de

frontera serán del tipo Dirichlet homogéneas. Comenzando con una rodaja de 0^0 (la circunferencia unidad sin alteración) hasta llegar a 90^0 , se desea analizar la influencia del ángulo en el primer y segundo auto-valor y auto-función de la formulación de Galerkin (G) en (4).

Para calcular los auto-valores y auto-funciones en forma numérica se usará el software FreeFem++, el código para las simulaciones se encuentra en el Apéndice [A].

3.1. Cálculo de los auto-valores y auto-funciones con

$$k(x, y) = 1$$

En la formulación fuerte, ecuación (2), $k(x, y)$ es una función definida positiva en Ω . Si $k(x, y) = 1$, entonces la formulación fuerte es el problema del auto-valor del operador de Laplace, ver [3, 9]. Este problema se puede formular de la siguiente manera,

$$\begin{cases} \text{Encontrar } \mu(x, y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ no nulo y } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tales que,} \\ -\Delta u(x, y) = \lambda \mu(x, y), \text{ para } (x, y) \in \Omega, \\ \mu(x, y) = 0 \text{ para } (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (7)$$

Donde $\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, es el operador de Laplace en dos dimensiones. Con los pasos anteriormente expuestos encontramos la formulación matricial (6) (con $k(x, y) = 1$). Las matrices A y M son ensambladas usando las definiciones correspondientes y luego se procede a resolver el problema matricial de auto-valores generalizados. Presentamos los resultados a continuación.

3.2. Autovalores del operador de Laplace en la circunferencia unidad

En la Figura 1 se pueden ver algunos dominios y triangulaciones generados en Freefem++ que se usan para las simulaciones de esta sección. Para detalles del código en FreeFem++ vea el Apéndice [A] y [4].

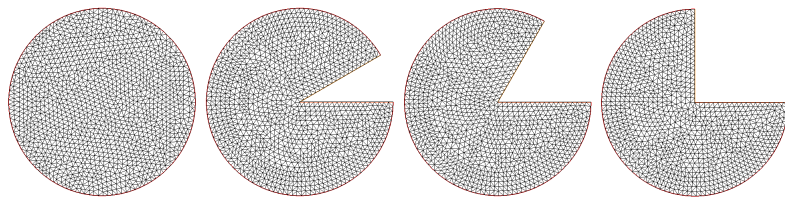


Figura 1: Triangulación usada para los dominios de la sección 3. Dominio (circunferencia unidad) con un ángulo de $\theta = 0^0, 30^0, 60^0, 90^0$.

Por ejemplo, para $\theta = 30^0$, esta triangulación tiene 2505 triángulos, 1331 vértices. Por lo tanto la dimensión del sistema es 2505, en el problema (M) en (6).

En la Tabla 1 se resumen los valores para el primer y segundo auto-valor con su respectiva perturbación en el ángulo.

θ	$\lambda_n^{(1)}$	$\lambda_h^{(2)}$
0^0	9.91865	14.6883
10^0	10.0422	14.9846
20^0	10.1760	15.3010
30^0	10.3117	15.6392
40^0	10.4613	16.0018
50^0	10.6243	16.3912
60^0	10.7977	16.8106
70^0	10.9862	17.2634
80^0	11.1879	17.7539
90^0	11.4089	18.2865

Tabla 1: Primer ($\lambda_h^{(1)}$) y segundo ($\lambda_h^{(2)}$) auto-valor del problema (G) en (4), o equivalentemente (M) en (6), para diferentes valores del ángulo α , con $k(x, y) = 1$. En la Figura 1 se puede ver la ilustración de los dominios.

En la Tabla 1 se puede verificar que los valores propios cumplen las siguientes propiedades, ver [1, pp. 8-16].

- El crecimiento estricto de los valores propios $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$.
- La monotonicidad del dominio cuando las condiciones de frontera son Dirichlet homogéneas, es decir, sea Ω_1 y Ω_2 abiertos y acotados y $\Omega_1 \subset \Omega_2$ entonces $\lambda_k(\Omega_1) \geq \lambda_k(\Omega_2)$.

Realizando una regresión polinomial para los valores del primer auto-valor se encuentra que existe una relación cuadrática en función del ángulo α y tiene como ecuación

$$\lambda = 6.033 \times 10^{-5} \alpha^2 + 0.010997\alpha + 9.9247,$$

donde λ es el valor del auto-valor y α es el valor del ángulo entre $[0, 90^0]$, con una norma en los residuos de 0.013121, ver la Figura 2.

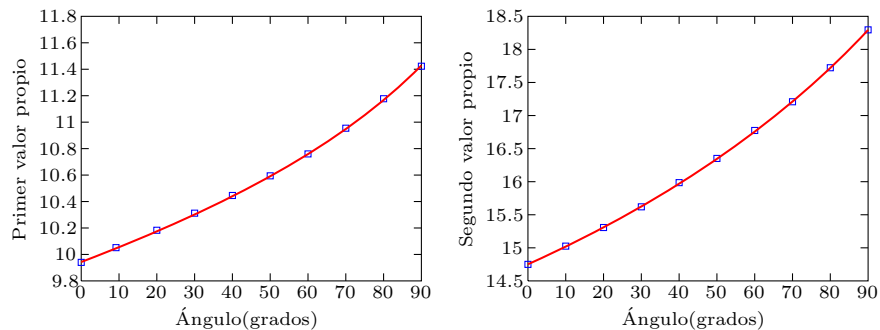


Figura 2: Ángulo versus el valor aproximado del primer auto-valor (Izquierda), ángulo versus el valor aproximado del segundo auto-valor (Derecha).

De igual manera la regresión para los valores del segundo valor propio tiene una estimación cuadrática y tiene como ecuación

$$\lambda = 1.4545 \times 10^{-4} \alpha^2 + 0.026597 \alpha + 14.701,$$

con una norma de los residuos de 0.029075, ver la Figura 2.

La convergencia del método puede ser verificada numéricamente al realizar simulaciones con diferentes tamaños de mallas, ver la Tabla 2, esto significa aumentar el número de triángulos, en consecuencia aumenta el tamaño del sistema. Por ejemplo, consideremos la región circular en la cual se ha retirado un sector de 60° . Presentamos resultados para varios tamaños de triangulación en la Tabla 2

Num. de triángulos	Dim. del sistema	$\lambda_h^{(1)}$	$\lambda_h^{(2)}$
108	249	11.0032	16.9702
162	365	10.9265	16.905
276	605	10.8763	16.8581
571	1220	10.8441	16.8266
1130	2403	10.8145	16.8159
2310	4765	10.7977	16.8106

Tabla 2: Primer auto-valor ($\lambda_h^{(1)}$) y segundo auto-valor ($\lambda_h^{(2)}$) con diferentes tamaños de malla, cuyo dominio es la circunferencia en la cual se ha retirado una porción con un ángulo de 60° .

3.3. Auto-funciones del operador de Laplace en la circunferencia unidad

En las Figuras 3 y 4 se puede observar el comportamiento de la primera y segunda auto-función (respectivamente) en los dominios de la Figura 1. Se observa que la auto-función depende del dominio y que el sector circular eliminado se convierte en un obstáculo para la simetría radial de la auto-función aunque estas auto-funciones siguen siendo simétricas con relación a un eje de simetría determinado por el sector circular eliminado.

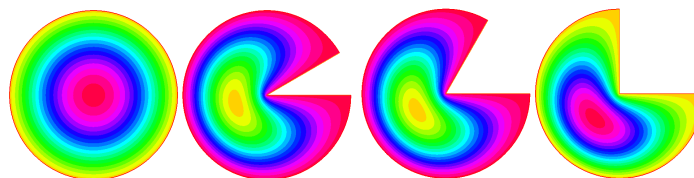


Figura 3: Primer función propia para ángulos de 0, 30, 60 y 90 grados.

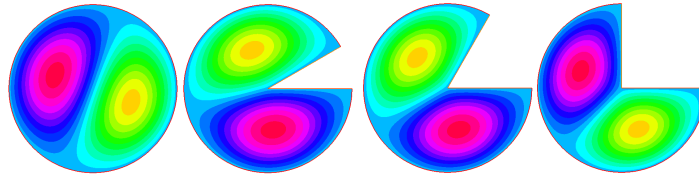


Figura 4: Segunda función propia para ángulos de 0, 30, 60 y 90 grados.

3.4. Coeficiente variable

Consideraremos el mismo dominio y condiciones de frontera Dirichlet homogéneas similares al ejemplo anterior pero $k(x, y) = \frac{1+\sin(x)}{1+\sin(y)}$. Los respectivos valores propios para este ejemplo son presentados en la Tabla 3.

α	$\lambda_h^{(1)}$	$\lambda_h^{(2)}$
0^0	5.72553	11.0898
10^0	5.76648	11.1994
20^0	5.81655	11.3288
30^0	5.87535	11.4815
40^0	5.94858	11.6622
50^0	6.03921	11.8763
60^0	6.15093	12.1314
70^0	6.29107	12.4370
80^0	6.46759	12.8063
90^0	6,69404	13.2574

Tabla 3: Primer ($\lambda_h^{(1)}$) y segundo ($\lambda_h^{(2)}$) valor propio del problema (G) en (4), o equivalentemente (M) en (6), para diferentes valores del ángulo α , con $k(x, y) = 1$. Vea una ilustración de los dominios en la Figura 1. Estos valores propios están determinados con $k(x, y) = \frac{1+\sin(x)}{1+\sin(y)}$.

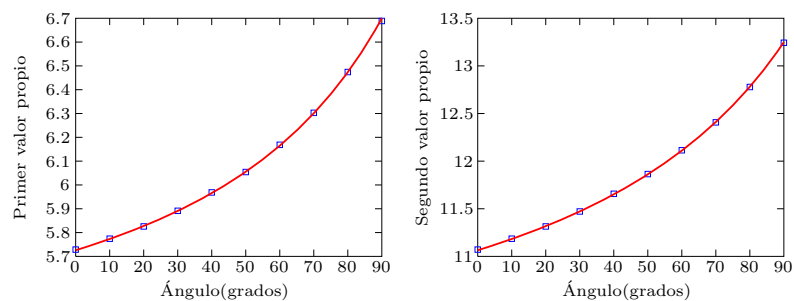


Figura 5: Ángulo versus el valor aproximado del primer valor propio (Izquierda), ángulo versus el valor aproximado del segundo valor propio (Derecha). Estos valores propios están determinados con $k(x, y) = \frac{1+\sin(x)}{1+\sin(y)}$.

La función de aproximación para el primer valor propio es cuadrática y tiene como ecuación

$$\lambda = 1.0788 \times 10^{-4}\alpha^2 + 5.4222 \times 10^{-4}\alpha + 5.7457,$$

con una norma en los residuos de 0.050595.

Para el segundo valor propio se encuentra que la mejor aproximación tiene una relación cuadrática y tiene como función,

$$\lambda = 2.0213 \times 10^{-4}\alpha^2 + 5.1187 \times 10^{-3}\alpha + 11.121,$$

con una norma en los residuos de 0.076948.

La primer y segunda auto-función se puede ver en las Figuras 6 y 7.

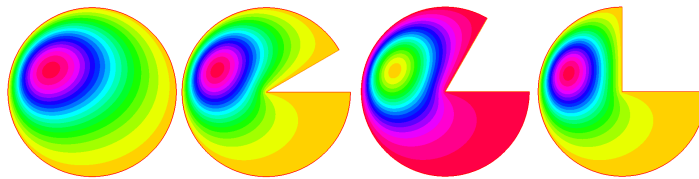


Figura 6: Primer función propia para ángulos de 0, 30, 60 y 90 grados.

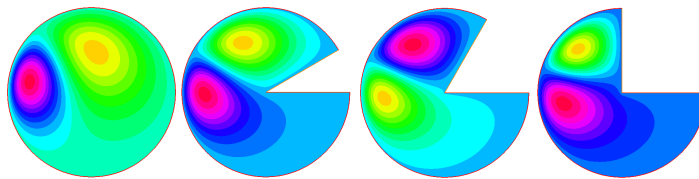


Figura 7: Segunda función propia para ángulos de 0, 30, 60 y 90 grados.

Al realizar los mismos experimentos pero en este caso con la función $k(x, y) = \frac{1+\sin(x)}{1+\sin(y)}$, se observa que los valores aproximados del primer y segundo valor propio al igual que el ejemplo anterior crecen en forma cuadrática solo que cuando $k(x, y)$ es diferente de la unidad los valores numéricos de los auto-valores disminuyen aproximadamente en cuatro unidades. Vemos que se siguen conservando algunas propiedades como la relación de crecimiento tiene una forma cuadrática los valores propios son crecientes y la monotocidad del dominio.

4. Sector circular con orificios circulares

En este ejemplo se analizará el comportamiento de primer y segundo auto-valor y auto-función en la circunferencia unidad en la cual se le irán retirando algunas circunferencias de radio 0.1 contenido en el interior de este dominio. Las condiciones de frontera son Dirichlet homogéneas. Se realizan simulaciones al igual que la Sección 3, con $k(x, y) = 1$, es decir determinar los auto-valores del

operador de Laplace en dos dimensiones y posteriormente las mismas simulaciones pero con $k(x, y) = \frac{1+\sin(x)}{1+\sin(y)}$. Se desea estudiar la influencia en el primer y segundo auto-valor cuando existen perforaciones en el dominio.

4.1. Sector circular con orificios circulares y $k(x, y) = 1$

Se comenzara calculando el primer y segundo auto-valor en la circunferencia unidad, luego se retirara el circulo $(x-0.8)^2+y^2 = 0.1^2$, posteriormente cada 30 grados se retirara otra circunferencia con el mismo radio y así hasta completar 24 circunferencias.

En la Figura 8 se muestran algunas mallas o dominios que se usaran en este ejemplo.

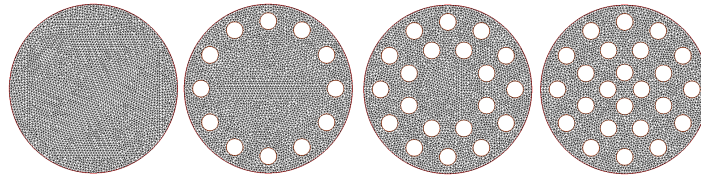


Figura 8: Triangulación usada para los dominios de la Sección 4. En este caso el parámetro es el número de orificios de la bola unitaria, comenzando en 0 y terminando en 24 orificios. Triangulación con 0, 12, 20 y 24 orificios.

En la Tabla 4 se puede observar los diferentes valores aproximados del primer y segundo auto-valor al calcularlos en los diferentes dominios.

<i>Dominio</i>	$\lambda_h^{(1)}$	$\lambda_h^{(2)}$	<i>Dominio</i>	$\lambda_h^{(1)}$	$\lambda_h^{(2)}$
0	5.78415	14.6844	12	10.6318	26.9179
1	6.21132	14.7257	13	12.4756	27.293
2	6.47129	15.002	14	13.5881	29.1396
3	6.73068	15.5168	15	14.8709	32.414
4	7.00845	16.2951	16	16.5421	37.8379
5	7.31767	17.3891	17	18.9606	44.0482
6	7.67163	18.8829	18	22.768	45.061
7	8.08527	19.6064	19	28.0841	54.3303
8	8.57356	19.7552	20	30.9823	77.893
9	9.14224	20.3663	21	48.0905	86.0201
10	9.76015	21.9461	22	61.8061	113.444
11	10.3161	24.8523	23	95.4402	161.57
			24	163.405	163.42

Tabla 4: Primer ($\lambda_h^{(1)}$) y segundo ($\lambda_h^{(2)}$) auto-valor del problema (G) en (4), o equivalentemente (M) en (6), para diferentes valores del número de orificios α , con $k(x, y) = 1$. Vea una ilustración de los dominios en la Figura 8. En este caso tenemos $k(x, y) = 1$.

La relación entre los orificios retirados, el primer y segundo auto-valor se puede observar en la Figura 9.

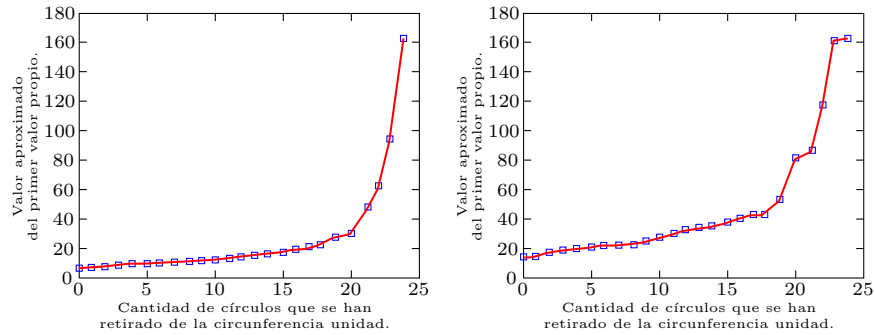


Figura 9: Cantidad de círculos retirados versus el valor aproximado del primer valor propio (Izquierda), ángulo versus el valor aproximado del segundo valor propio (Derecha). Estos valores propios están determinados con $k(x, y) = 1$. Vea una ilustración de los dominios en la Figura 8.

Calculando los dos primeros valores propios con diferentes mallas, se puede verificar la convergencia del método, lo cual se muestra en la Tabla 5.

Num. de triángulos	Dim. del sistema	$\lambda_n^{(1)}$	$\lambda_h^{(2)}$
332	741	10.1679	25.7141
464	1027	10.3188	26.1132
644	1415	10.4113	26.3503
1616	3441	10.5583	26.7289
3340	6512	10.594	26.8213
6276	12981	10.6318	26.9179
25989	53010	10.6482	26.958
37690	76613	10.6484	26.9504

Tabla 5: Primer ($\lambda_h^{(1)}$) y segundo ($\lambda_h^{(2)}$) auto-valor con diferentes tamaños de malla, cuyo dominio es la circunferencia en la cual se ha retirado 12 orificios circulares de radio menor.

En las Figuras 10, 11, 12 y 13 se pueden observar la primera y segunda auto-función. Observamos que las auto-funciones presentan varias simetrías. En el caso del primer auto-valor, vemos que la auto-función correspondiente tiende a localizarse alrededor del origen hasta la primera hilera de orificios. Este hecho puede interpretarse diciendo que, por ejemplo, la primera frecuencia de vibración de un tambor circular con orificios y membrana fija en los bordes de los orificios, se comporta de manera parecida a la de un tambor circular menor. Vemos resultados similares para el segundo auto-valor. Notamos que el hecho de encontrar auto-valores con soporte pequeño se conoce como localización de las auto-funciones y tiene implicaciones interesantes en las aplicaciones y la teoría, vea [9].

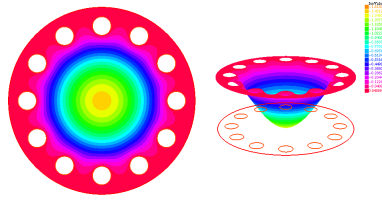


Figura 10: Primer función propia cuyo dominio es la circunferencia unidad y se han retirado 12 círculos de radio 0.1 en su interior. En este caso $k(x, y) = 1$.

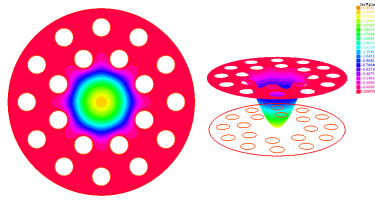


Figura 11: Primer función propia cuyo dominio es la circunferencia unidad y se han retirado 20 círculos de radio 0.1 en su interior. En este caso $k(x, y) = 1$.

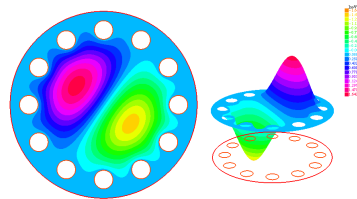


Figura 12: Segunda función propia cuyo dominio es la circunferencia unidad y se han retirado 20 círculos de radio 0.1 en su interior. En este caso $k(x, y) = 1$.

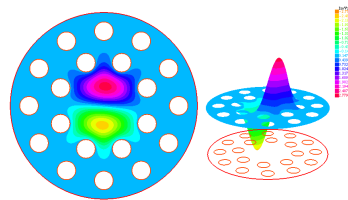


Figura 13: Segunda función propia cuyo dominio es la circunferencia unidad y se han retirado 20 círculos de radio 0.1 en su interior. En este caso $k(x, y) = 1$.

4.2. Sector circular con orificios circulares y $k(x, y) = \frac{1+\sin(x)}{1+\sin(y)}$

Consideraremos el mismo dominio y condiciones de frontera Dirichlet homogéneas similar que en el ejemplo anterior pero la función $k(x, y)$ será $\frac{1+\sin(x)}{1+\sin(y)}$. El valor aproximado del primer y segundo auto-valor está relacionado en la Tabla 6.

<i>Dominio</i>	$\lambda_h^{(1)}$	$\lambda_h^{(2)}$	<i>Dominio</i>	$\lambda_h^{(1)}$	$\lambda_h^{(2)}$
0	4.66005	10.402	12	9.58193	22.4279
1	4.74819	10.652	13	10.4886	24.2919
2	4.83999	10.9929	14	11.5853	25.8294
3	4.99435	11.6258	15	14.0455	28.5497
4	4.99435	12.6258	16	18.9225	37.9496
5	5.95520	12.8086	17	23.5382	46.8898
6	7.24488	14.2036	18	26.5300	46.8900
7	8.49587	18.8952	19	28.7401	46.8895
8	9.02952	21.7922	20	29.9597	46.8908
9	9.25926	21.8958	21	41.0383	46.8913
10	9.39871	22.037	22	46.889	55.857
11	9.50732	22.2374	23	46.8894	55.9313
			24	46.89	55.931

Tabla 6: Primer ($\lambda_h^{(1)}$) y segundo ($\lambda_h^{(2)}$) valor propio del problema (G) en (4), o equivalentemente (M) en (6), cuyo dominio es la circunferencia unidad y se han retirado algunos círculos de radio 0.1 contenidos en su interior. Vea una ilustración de los dominios en la Figura 8. Estos valores propios están determinados con $k(x, y) = \frac{1+\sin(x)}{1+\sin(y)}$.

La relación entre la cantidad de circunferencias retiradas y el primer y segundo auto valor se encuentra en la Figura 14. En este caso no se tiene una relación polinomial simple. Observamos también que el primer y segundo auto-valor crece con el número de orificios, especialmente cuando el orificio siguiente es colocado una hilera más cerca del origen. Notamos que en este caso, cada orificio cambia la topología del dominio (en particular propiedades de conexidad por caminos).

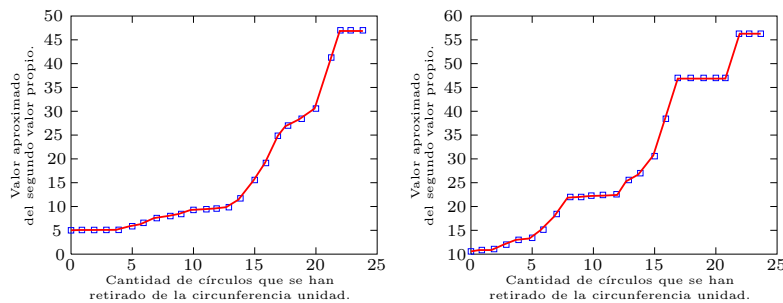


Figura 14: Cantidad de círculos retirados versus el valor aproximado del primer valor propio (Izquierda), Ángulo versus el valor aproximado del segundo valor propio (Derecha). Estos valores propios están determinados con $k(x, y) = \frac{1+\sin(x)}{1+\sin(y)}$. Vea una ilustración de los dominios en la Figura 8.

5. Conclusiones

En este trabajo revisamos algunos aspectos fundamentales del método de elementos finitos aplicado a problemas de ecuaciones diferenciales parciales. Revisamos concretamente el cálculo de auto-valores y auto-funciones. Consideramos aplicaciones del método de los elementos finitos al problema de auto-valores en dominios paramétricos. Mostramos de manera concisa como calcular los auto-valores y auto-funciones en dos casos particulares interesantes en dominios bi-dimensionales. Mostramos detalladamente el código usado empleando **FreeFem++**. Presentamos solamente los pasos básicos para una aplicación adecuada del método de los elementos finitos. Estudios como estos pueden ser hechos de manera rápida, y hoy en día, en cualquier computador personal; convirtiendo este tipo de experimentación en una herramienta poderosa para la investigación, ya sea de aplicaciones prácticas o teóricas sobre temas importantes como el de análisis de auto-valores.

A. Implementación en FreeFem++

El siguiente código escrito en C++ y compilado usando el programa **FreeFem++**, calcula los valores propios del problema (3) y muestra las gráficas de las correspondientes funciones propias, ver [4]. Observamos que este código es una modificación del código presentado en [4] para el cálculo de auto-valores y auto-vectores del Laplaciano usando **FreeFem++**. Observamos que **FreeFem++** solo requiere de la definición del dominio y de la forma débil del problema a resolver, lo cual hace la implementación relativamente simple. Vea el código en el recuadro Código 1.

A continuación detalles sobre las líneas del código 1.

- **Línea 1 a 3.** Son las que construyen la frontera del dominio que corresponde a una circunferencia unidad menos una sección circular de 30 grados, ver Sección 3.2. Con la orden *border* se define un segmento del contorno de la geometría, el comando *label* coloca un nombre a la frontera de ese dominio para luego especificar su valor de contorno.
- **Línea 4.** Las ordenes *mesh* y *buildmesh* generan la malla, por ejemplo *a2(20)* indica que en ese contorno se generan 20 triángulos.
- **Línea 5.** *fspace Vh(Th,P2)*. La instrucción construye un espacio de elementos finitos de nombre *Vh* y con elementos \mathbb{P}^2 sobre *Th*.
- **Línea 6.** Define *u* y *v* como funciones continuas a trozos en \mathbb{P}^2 .
- **Línea 9.** *func* declara una función mediante una expresión analítica.
- **Línea 10 y 11.** Se escribe la formulación débil, ver ecuación (3).
- **Línea 12 y 13.** Se construyen las matrices *A* y *M* de la formulación matricial ver ecuación (6).
- **Línea 14.** Cantidad de valores propios a determinar.
- **Línea 15.** Almacena el valor propio en *ev*.

- **Línea 16.** Almacena el vector propio en eV .
- **Línea 17.** $k=EigenValue$, encuentra los valores propios del sistema $A = \lambda M$.
 - *sym*. El problema es simétrico (todos los valores propios son reales).
 - *value*. Matriz que almacena los valores propios.
 - *vector*. Matriz que almacena los vectores propios.
 - *tol*. La exactitud con respecto a los valores propios que se han de determinar.
 - *maxit*. El número máximo de iteraciones permitidas.
 - *sigma*. El valor de cambio.
 - *ncv*. El número de vectores generado en cada iteración.
- **Líneas 18 a 24.** Se construye un ciclo (for), para imprimir en la pantalla de resultados los 20 primeros valores propios.
- **Líneas 25 a 28.** Se grafica la primera y segunda función propia en dimensiones dos y tres.

```

1 border a1(t=pi/6,2*pi){x=cos(t); y=sin(t); label=1;};
2 border a2(t=0,1){x=1-t;y=0; label=2;};
3 border a3(t=0,1){x=t*cos(pi/6);y=t*sin(pi/6); label=3;};
4 mesh Th = buildmesh (a1(110*pi/3)+ a2(20) + a3(20) );
5 fespace Vh(Th,P2);
6 Vh u1, u2;
7
8 real sigma=20;
9 func K=1;
10 varf op(u1,u2)= int2d(Th)(K*dx(u1)*dx(u2) + K*dy(u1)*dy(u2) -
    sigma* u1*u2 )+on(1,2,3,u1=0) ;
11 varf b([u1],[u2]) = int2d(Th)( u1*u2 );
12 matrix A= op(Vh,Vh,solver=Crout,factorize=1);
13 matrix M= b(Vh,Vh,solver=CG,eps=1e-20);
14 int nev=20;
15 real[int] ev(nev);
16 Vh[int] eV(nev);
17 int k=EigenValue(A,M,sym=true,sigma=sigma,value=ev,vector=eV,tol=1
    e-10,maxit=0,ncv=0);
18 for (int i=0;i<k;i++)
19 { u1=eV[i];
20   real gg = int2d(Th)(K*dx(u1)*dx(u1) + K*dy(u1)*dy(u1));
21   real mm= int2d(Th)(u1*u1) ;
22   cout << " —— " << i << " " << ev[i]<< " err= "
23   <<int2d(Th)(K*dx(u1)*dx(u1) + K*dy(u1)*dy(u1) - (ev[i])*u1*u1)
    << " —— " << endl;
24 }
25 plot(eV[0],dim=2,fill=1,cmm="Valor del vector propio =" + ev[0] ,
    wait=1,value=1);
26 plot(eV[0],dim=3,fill=1,cmm="Valor del vector propio =" + ev[1] ,
    wait=1,value=1);
27 plot(eV[1],dim=2,fill=1,cmm="Valor del vector propio =" + ev[2] ,
    wait=1,value=1);
28 plot(eV[1],dim=3,fill=1,cmm="Valor del vector propio =" + ev[3] ,
    wait=1,value=1);

```

Código 1: Código en Freefem++ para el calcular los valores propios y graficar las funciones propias de problema de la Sección 3.

Referencias

- [1] Henrot A., *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators*, Birkhäuser, Alemania, First ed., 2006.
- [2] Johnson C., *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*, Courier Corporation, Estados Unidos, First ed., 2009.
- [3] Boffi D., *Finite element approximation of eigenvalue problems*, Cambridge University Press, Italia, First ed., 2010.
- [4] Hecht F., **FreeFem++**, Francia, Third ed., 2012.
- [5] Calderón G. and Gallo R., *Introducción al método de los elementos finitos: un enfoque matemático*, Ediciones IVIC, Venezuela, First ed., 2010.
- [6] Efendiev Y. Galvis J. and Hou T., *Generalized multiscale finite element methods (gmsfem)*, Journal of Computational Physics **251** (2013), 116–135.
- [7] Galvis J. and Versieux H., *Introdução à aproximação numérica de equações diferenciais parciais via o método de elementos finitos*, [28th Brazilian Mathematics Colloquium] Inst. Nac. Mat. Pura Apl. (IMPA), Brasil, First ed., 2011.
- [8] Gander M. J. and Wanner G., *From Euler, Ritz, and Galerkin to modern computing*, SIAM Rev. **54** (2012), no. 4, 627–666.
- [9] Grebenkov D. S. and Nguyen B. T., *Geometrical structure of laplacian eigenfunctions*, SIAM Rev. **55** (2013), no. 4, 601–667.
- [10] Saad Y., *Numerical methods for large eigenvalue problems (algorithms and architectures for advanced scientific computing)*, Halsted Press [John Wiley & Sons Inc], Estados Unidos, First ed., 1992.