Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen IV (1997), pp. 85–100

UNA VARIANTE METODOLÓGICA PARA EL ESTUDIO DE LOS CONCEPTOS A PARTIR DE SU DEFINICIÓN

OTILIO B. MEDEROS ANOCETO
BLANCA E. GONZÁLEZ RODRÍGUEZ(*)

Resumen. En este artículo se presenta un procedimiento metódico para el estudio detallado de conceptos complejos en la matemática y se ejemplifica el procedimiento con el estudio general del concepto de métrica y sus variantes matemáticas.

Abstract. We present a procedure to study complex mathematical concepts, and apply it to the study of metrics and their mathematical variations.

Keywords. Concepts, extension, metrics.

0. Introducción

En el estudio de la matemática constantemente se realizan definiciones, generalizaciones, restricciones y clasificaciones de conceptos; pero no siempre se sigue un procedimiento adecuado para obtener un buen conocimiento de los conceptos después que se ha realizado una de estas operaciones.

Este trabajo tiene como objetivo presentar un procedimiento para lograr un conocimiento profundo de un concepto a partir de su definición. En la primera sección del trabajo se explica en qué consiste la definición científica y se describe cómo proceder una vez definido un concepto. En la segunda sección se aplica el procedimiento descrito en la primera sección al estudio del concepto de métrica.

(*)Texto recibido 1/4/98, revisado 21/5/99. Otilio B. Mederos Anoceto, Blanca E. González Rodríguez, Departamento de Matemática, Facultad de Matemática, Física y Computación, Universidad Central de Las Villas, Santa Clara, Cuba.

1. Procedimiento para lograr un conocimiento profundo de un concepto a partir de su definición

Se denomina *extensión de un concepto* a la colección $\mathcal{E}$ de todos los objetos que corresponden a ese concepto, y se llama *contenido de un concepto* a una colección $\mathcal{C} = \{P_i\}$, $i \in I$ (I es un conjunto) de propiedades P_i, que cumplen todos los elementos de $\mathcal{E}$ y sólo estos elementos. Un concepto se indica con frecuencia en el trabajo mediante un par $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$, o simplemente por E cuando no haya dudas. Pueden encontrarse diferentes colecciones $\mathcal{C}$ de propiedades que solo cumplen los elementos de E. Cualquier otra colección $\mathcal{P}$ por la cual pueda sustituirse $\mathcal{C}$ sin alterar $\mathcal{E}$ recibe el nombre de caracterización del concepto $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$.

La operación *definición científica* sobre la colección de conceptos parte de un concepto definido $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$ y agregándole propiedades a la colección $\mathcal{C}$, o sustituyendo algunas de las propiedades de $\mathcal{C}$ por propiedades más fuertes, obtiene una nueva colección de propiedades $\mathcal{C}_1$ a la que corresponde una subcolección $\mathcal{E}_1$ de $\mathcal{E}$. Si se cumple que $\mathcal{C}_1$ implica $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ no implica $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{E}_1$ es una sub-colección propia de $\mathcal{E}$, se tiene un nuevo concepto $(\mathcal{E}_1, \mathcal{C}_1)$ definido a partir de $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$.

Cuando se define un nuevo concepto sólo se tiene determinado su contenido y en el mejor de los casos únicamente se tiene una notación para su extensión. La línea directriz *definición en la enseñanza pre–universitaria* en Cuba sólo se ocupa del estudio del contenido y no de la extensión. Esta situación continúa prácticamente igual en la enseñanza superior; por ejemplo, cuando se estudian mediante teoremas las operaciones internas que satisface la extensión de un concepto, por lo general no se utilizan estos resultados desde un punto de vista metodológico, para ampliar el subconjunto de elementos conocidos de la extensión.

Si se pretende conocer completamente un concepto $(\mathcal{E}_1, \mathcal{C}_1)$, hay que conocer todos los elementos de $\mathcal{E}_1$ y todas sus caracterizaciones $\mathcal{P}_1$, pero obviamente con la simple definición de $(\mathcal{E}_1, \mathcal{C}_1)$ esto no se logra. Consecuentemente, surge de manera natural la pregunta: ¿cómo actuar para conocer completamente a $(\mathcal{E}_1, \mathcal{C}_1)$, o para acercarnos cada vez más a su conocimiento absoluto?

A continuación se propone un procedimiento de seis pasos que constituye una respuesta a la pregunta anterior.

1.1. Realizar un estudio conjuntista de su extensión

En este estudio se debe verificar que $\mathcal{E}_1$ es un subconjunto propio de la extensión $\mathcal{E}$ del concepto de partida de la definición, ya que si $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}$ no se tiene un concepto nuevo y si $\mathcal{E}_1 = \varnothing$ se tendría un concepto que carece de interés. Se deben determinar las cardinalidades de $\mathcal{E}_1$ y de $\mathcal{E} \backslash \mathcal{E}_1$, y comparar estas cardinalidades con la de $\mathcal{E}$.

Si se cumple que $\varnothing \subset \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$, pero la cardinalidad de $\mathcal{E}_1$ está muy distante de la de $\mathcal{E}$, como es el caso cuando $\mathcal{E}$ tiene una cardinalidad grande y $\mathcal{E}_1$ tiene una cardinalidad finita, el concepto $(\mathcal{E}_1, \mathcal{C}_1)$ no es de interés. La cardinalidad de $\mathcal{E}_1$ es un buen indicador de la importancia de $(\mathcal{E}_1, \mathcal{C}_1)$ con respecto a $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$ desde el punto de vista conjuntista.

1.2. Hacer un estudio comparativo entre su extensión y las extensiones de otros conceptos que tienen el mismo concepto de partida.

Si $(\mathcal{E}_2, \mathcal{C}_2)$ es otro concepto definido a partir de $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$, determinar la relación que cumplen $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ entre las siguientes posibilidades:

$$\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2,\ \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{E}_1,\ \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2,\ \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \varnothing \text{ y } (\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \neq \varnothing,\ \mathcal{E}_1 \not\subset \mathcal{E}_2,\ \mathcal{E}_2 \not\subset \mathcal{E}_1).$$

Si se cumple $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$ o $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{E}_1$ o $(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \neq \varnothing,\ \mathcal{E}_1 \not\subset \mathcal{E}_2,\ \mathcal{E}_2 \not\subset \mathcal{E}_1)$, entonces estudiar $\mathcal{E}_1 \backslash \mathcal{E}_2$ o $\mathcal{E}_2 \backslash \mathcal{E}_1$ o $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$.

1.3. Estudiar algunos de sus subconceptos.

Aplicar el paso a $(\mathcal{E}_2, \mathcal{C}_2)$ y determinar las características de los elementos de $\mathcal{E}_1 \backslash \mathcal{E}_2$.

1.4. Analizar si es posible dotar a su extensión de estructuras algebraicas, topológicas, etc

Determinar cuáles estructuras de $\mathcal{E}$ hereda $\mathcal{E}_1$ y cuáles tiene $\mathcal{E}_1$ que no tiene $\mathcal{E}$. Esta es una información muy importante, puesto que a partir de las estructuras de $\mathcal{E}_1$ se puede ampliar la sub–colección de elementos conocidos de $\mathcal{E}_1$.

1.5. Establecer relaciones entre su extensión y las extensiones de otros conceptos definidos.

Por ejemplo, establecer un isomorfismo entre $\mathcal{E}_1$ y la extensión $\mathcal{E}_2$ de un concepto definido utilizando un concepto de partida diferente al de $\mathcal{E}_1$.

1.6. Obtener la mayor cantidad posible de caracterizaciones.

Se debe determinar la mayor cantidad de conjuntos de propiedades $\mathcal{P}_1$ cuyo cumplimiento sea necesario y suficiente para el cumplimiento de las propiedades $\mathcal{C}_1$. Algunas veces sólo se puede obtener una colección $\mathcal{P}_1$ cuyo cumplimiento implica el cumplimiento de $\mathcal{C}_1$ (condiciones suficientes) o cuyo cumplimiento es consecuencia de $\mathcal{C}_1$ (condiciones necesarias).

Estos seis pasos pueden considerarse los pasos generales que deben seguirse después de definido un concepto; pero en ocasiones pueden reducirse o ampliarse. Por razones obvias cuando no hay dudas de cual es el concepto de partida $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$ y $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C} \cup \mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_1 \neq \varnothing$, al referirnos a $(\mathcal{E}_1, \mathcal{C}_1)$ solo se escribirá $(\mathcal{E}_1, \mathcal{P}_1)$.

2. Aplicación del procedimiento antes descrito al estudio del concepto de métrica

2.1. Utilización de las herramientas de la teoría de conjuntos para realizar un estudio conjuntista de su extensión.

Es conocida la definición de métrica siguiente:

Definición 1. *Dado un conjunto M se denomina métrica sobre M a toda función $m : M \times M \to [0, \infty)$ que verifica, para todos los elementos x, y, z de M, las propiedades siguientes:*

m_1) Si $x = y$ entonces $m(x, y) = 0$
m_2) $m(x, y) = m(y, x)$ (propiedad simétrica)
m_3) $m(x, z) \leq m(x, y) + m(y, z)$ (propiedad triangular)
m_4) Si $m(x, y) = 0$ entonces $x = y$

Se desprende de esta definición que el concepto de partida es el de función f de $M \times M$ en $[0, +\infty)$, cuya extensión se indica aquí por comodidad mediante el símbolo no usual $\mathbf{F}_M$. El contenido de este concepto lo constituye, como es conocido, la colección de propiedades $\mathcal{P} = \{f_1, f_2, f_3\}$, donde

f_1) $f \subset [M \times M) \times [0, +\infty)]$
f_2) Para todo (x, y) de $M \times M$ existe un r de $[0, +\infty)$ tal que $((x, y), r) \in f$.
f_3) Si $((x, y), r_1) \in f$ y $((x, y), r_2) \in f$; entonces $r_1 = r_2$.

Así, el concepto de partida puede indicarse por $(F_M, \mathcal{P})$. Evidentemente el contenido del concepto de métrica es la colección de propiedades $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P} \cup \{m_i\}_{i=1,4}$ la cual contiene estrictamente a $\mathcal{P}$. Sea M_M la extensión del concepto de métrica. A continuación se determina en qué casos M_M es distinto del conjunto vacío y está contenido estrictamente en F_M.

Si $M = \varnothing$, entonces aceptando que $M \times M = \varnothing$, se tiene que $F_M = \{\varnothing\}$. Como la aplicación vacía no incumple las propiedades $m_1)_{i=1,2,3,4}$, entonces $M_M = F_M$ y se concluye que en este caso el concepto de métrica sobre M coincide con el concepto de función sobre $M \times M$. Esta es la razón por la cual en muchos libros se considera $M \neq \varnothing$ al definir el concepto de métrica.

Si $M = \{a\}$; entonces $M_M = \{m_0\}$, donde por m_0 se indica la función con dominio $M \times M = \{(a, a)\}$ y con imagen $\{0\}$ en $[0, +\infty)$. Evidentemente M_M está estrictamente contenida en F_M. En este caso no tiene interés el concepto de métrica ya que M_M tiene un solo elemento y F_M tiene la cardinalidad del continuo. Si M tiene más de dos elementos, entonces trivialmente $M_M \subset F_M$.

Si $M \neq \varnothing$, entonces $M_M \neq \varnothing$, ya que cualquier función real simétrica m que satisface la condición m_1) y que cumple además la desigualdad $a \leq m(x, y) \leq 2a$ para todo par (x, y) de $M \times M$ que no esté en la diagonal pertenece a M_M, pues obviamente satisface m_4) y para cualquier sub–conjunto $\{x, y, z\}$ de M (consecuentemente x, y, z son distintas dos a dos) se tiene que

$$m(x,y) + m(y,z) \geq a + a = 2a \geq m(x,z)$$

y si $x = y$, $x = z$ o $y = z$, se tiene también trivialmente la condición m_3). En particular, la colección $\{m_r\}_{r\in[0,+\infty)}$ de funciones m_r definidas sobre $M \times M$ por

$$m_r(x,y) = \begin{cases} r, & \text{si } x \neq y \\ 0, & \text{si } x = y \end{cases} \tag{1}$$

cumple las propiedades antes descritas y consecuentemente forma una colección de métricas.

Hasta aquí se tiene que si $M \neq \varnothing$, entonces $\varnothing \subset M_M \subset F_M$ y que el concepto de métrica para conjuntos de un solo elemento no es importante. Pasemos a determinar la cardinalidad de M_M y $F_M \backslash M_M$.

Proposición 1. *Si M es finito con más de un elemento; entonces M_M tiene la cardinalidad del continuo.*

Demostración. La demostración se hace para el caso en que M tiene dos elementos, o sea, $M = \{a, b\}$. Toda métrica m sobre M tiene que cumplir las condiciones.

1) $m(a,a) = m(b,b) = 0$
2) $m(a,b) = m(b,a) = r$,

donde r es un número real positivo. Como $M \times M = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b)\}$ y como toda función m_r, $r \in (0, +\infty)$ definida sobre $M \times M$ mediante las condiciones 1) y 2) es una métrica, se tiene que la cardinalidad de M_M es mayor o igual que $\mathbf{c}$ (cardinalidad del continuo). Como F_M tiene la cardinalidad $\mathbf{c}$, se tiene que el cardinal de M_M es precisamente $\mathbf{c}$.

Por otro lado, las funciones constantes pertenecen a $F_M \backslash M_M$, se tiene que el cardinal de $F_M \backslash M_M$ es $\mathbf{c}$.

Proposición 2. *Si M es infinito de cardinalidad $\mathbf{m}$ entonces M_M tiene cardinalidad $2^{\mathbf{m}}$.*

Demostración. El cardinal de F_M es $2^{\mathbf{m}}$; luego el cardinal de M_M es menor o igual que $2^{\mathbf{m}}$.
Sea M_1 un subconjunto de M y d_{M_1} la función definida sobre $M_1 \times M_1$ por

$$d_{M_1}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \\ 1, & \text{si } x \in M \ \&\ y \in M_1, x \neq y \\ 2, & \text{si } x \notin M \text{ o } y \notin M_1, x \neq y \end{cases}$$

Esta función es una métrica sobre M por ser simétrica, cumplir la condición m_1) y pertenecer $d_{M_1}(x,y)$ a $[1,2]$ para todo (x,y) que no está en la diagonal de $M \times M$. Si M_1 y M_2 son subconjuntos diferentes de M con más de dos elementos cada uno entonces $d_{M_1} \neq d_{M_2}$, pues para $x \in M_1 \backslash M_2$ e $y \in M_1$ resulta que $d_{M_1}(x,y) \neq d_{M_2}(x,y)$. Por lo tanto, a diferentes subconjuntos de M con más de dos elementos corresponden métricas diferentes. Como el conjunto potencia de un conjunto de cardinal **m** tiene cardinalidad 2^m, resulta que la cardinalidad de M_M es mayor o igual que 2^m. De las dos desigualdades probadas para la cardinalidad de M_M se tiene que el cardinal de M_M es 2^m.

Se puede probar sin dificultad que el conjutno $F_M \backslash M_M$ también tiene cardinalidad 2^m. En efecto, como $(F(M \times M, (0,+\infty)) \subset F_M \backslash M_M \subset F_M$ y como card $F(M \times M, (0,+\infty)) =$ card $F_M = 2^m$, se tiene que card $(F_M \backslash M_M) = 2^m$.

Con los resultados hasta ahora obtenidos se puede concluir que si un conjunto M tiene más de un elemento, entonces el número de elementos de F_M que son métricas sobre M es muy "grande", mayor que el número de elementos de M y tan "grande" como el número de elementos de F_M que no son métricas. Sin embargo, resulta difícil para algunas personas encontrar una métrica con determinadas propiedades sobre un conjunto dado M; es por ello importante pasar a estudiar formas de obtener nuevos elementos de M_M a partir de uno dado. Con este objetivo consideremos la colección **A** de las funciones continuas de $(0,+\infty)$ en sí mismo no idénticamente nulas que satisfacen las condiciones

i) $f(0) = 0$
ii) f es creciente
iii) $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ para todo x, $y \in [0,+\infty)$.

La colección **A** es:

a) *No vacía.* En efecto, las funciones f_1, $i = 1,2$ definidas sobre $(0,+\infty)$ por $f_1(t) = t/(1+t)$, $f_2(t) = \log(1+t)$ pertenece a esta clase. Si f pertenece a esta clase; entonces $g = \min(r,f)$ con $r \in [0,+\infty)$ también pertenece a esta clase.
b) *Semi-grupo con la suma usual y con la composición de funciones; no monoide.*

Obsérvese además que si $f \in$ **A** entonces $\alpha f \in$ **A** para todo número real α positivo.

Lema 1. *Todo elemento f de* **A** *satisface la condición*

iv) Si $f(x) = 0$ entonces $x = 0$.

Demostración. Supongamos que existe un número real positivo r tal que $f(r) = 0$; entonces f se anula sobre $[0,r]$ por ser f creciente. Como f cumple la condición iii) se tiene que f se anula sobre $[0,2r]$. Continuando en esta forma se tiene que f es idénticamente nula. Luego la suposicón es falsa y consecuentemente si $f(x) = 0$ entonces $x = 0$.

Proposición 3. *Si M es un conjunto no vacío y m es un elemento de M_M entonces $f \circ m \in M_M$ para todo $f \in \mathbf{A}$.*

Demostración. Obviamente $f \circ m \in F_M$. Las condiciones m_1), m_2), m_3) y m_4) las cumple $f \circ m$ por ser m una métrica sobre M y por cumplir f la condición i), ser una función, satisfacer las condiciones ii) e iii), y cumplir la condición iv) respectivamente.

La proposición 3 nos permite ampliar la colección $\mathcal{C}_M$ de elementos conocidos de M_M a la colección $\cup \mathbf{A}_m$, $m \in \mathcal{C}_M$; donde $\mathbf{A}_m = \{d_M = f \circ m : m \in \mathcal{C}_M\}$. En resumen, utilizando la colección $\mathbf{A}$ se amplia considerablemente la colección de elementos conocidos de M_M. Sin embargo, para un elemento m de M_M pueden existir funciones de $[0, +\infty)$ en sí mismo que no pertenezcan a la colección $\mathbf{A}$ y que $f \circ m$ pertenezca a M_M.

La proposición 3 permite ampliar los elementos conocidos de M_M componiendo estos elemento por la izquierda con los elementos de una clase suficientemente buena. Surge entonces la pregunta: ¿es posible componer un elemento m de M_M por la derecha con los elementos de una clase $\mathbf{B}$ suficientemente buena para que el resultado de esta composición siempre esté en M_M y de esta forma ampliar aun más la clase de los elementos conocidos de M_M? A continuación se pasa a dar una respuesta positiva a esta pregunta.

Sea $\mathbf{B}$ la colección de funciones $g = (h o \pi_1, h o \pi_2)$, donde h es una función inyectiva de M en M y π_i, $i = 1, 2$, son las funciones proyección de $M \times M$ en M.

Proposición 4. *Si $m \in M_M$ y $g \in \mathbf{B}$ entonces $m \circ g \in M_M$.*

Demostración. Trivial.

Corolario 1. *Si $m \in M_M$, $f \in \mathbf{A}$ y $g \in \mathbf{B}$ entonces las funciones m_1, m_2 y m_3 definidas por el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[r, "m"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "m_2"'] & {[0,+\infty)} \arrow[d, "f"] \\ M \times M \arrow[r, "m_3"'] \arrow[ur, "m_1"] & {[0,+\infty)} \end{tikzcd}$$

pertenecen a M_M.

2.2. Otros conceptos relacionados con el concepto de métrica y definidos a partir de $(\mathbf{F_M}, \mathbf{P})$.

Bajo este título no se hará el estudio comparativo entre M_M y las extensiones de otros conceptos definidos a partir de (F_M, P) a que se refiere el paso 1.1; sólo se darán las definiciones de algunos de esos conceptos y se establecerán algunas relaciones con M_M.

Para el trabajo matemático en muchas direcciones, por ejemplo para la formación de clusters (agrupamiento de objetos), algunas de las condiciones que cumple una métrica no son esenciales. Es por ello que surgieron varios conceptos con distintas variantes de combinaciones de estas condiciones.

Un elemento m de F_M que satisface las condiciones $m_i)$, $i = 1, 2, 3$, se denomina pseudométrica sobre M. Si se indica la extensión del concepto de pseudo–métrica por P_M, entonces obviamente $\varnothing \subset M_M \subseteq P_M \subseteq F_M$.

Teniendo en cuenta que si $M = \{a\}$ entonces $M_M = P_M = \{0\} \subset F_M$ y que si M tiene más de dos elementos entonces $M_M \subset P_M \subset F_M$, se concluye que para que el concepto de seudo–métrica constituya un nuevo concepto el conjunto M debe tener dos o más elementos. Si $m \in P_M$, entonces el par (M, m) recibe el nombre de espacio pseudo–métrico. Si $p \in P_M$, entonces fácilmente se prueba que la relación definida sobre M por $a\ R\ b$ si y sólo si $p(a, b) = 0$ es una relación de equivalencia y que la función m definida sobre el conjunto cociente M/R por $m([a], [b]) = p(a, b)$ es una métrica sobre M/R. Los espacios pseudo–métricos fueron investigados por Birkhoff[1].

Un elemento m de F_M que satisface las condiciones $m_1)$, $m_2)$ y $m_4)$ de la definición de métrica se denomina semi–métrica sobre M. La colección de todas las semi–métricas sobre un conjunto M se indica por S_M y obviamente cumple que

$$\varnothing \subset M_M \subseteq S_M \subseteq F_M \quad \text{y} \quad P_M \cap S_M = M_M.$$

Si M es un conjunto con dos elementos como máximo, entonces $M_M = S_M$.

Si M es un conjunto con tres o más elementos se cumple $M_M \subset S_M$. En efecto, si $\{a, b, c\}$ es un subconjunto de M entonces cualquier elemento s de S_M tal que $s(a, b) = s(b, a) = r_1$, $s(b, c) = s(c, b) = r_2$, $s(a, c) = s(c, a) = r_3$, donde r_i, $i = 1, 2, 3$, son elementos de $[0, +\infty)$ que cumplen la desigualdad $r_j > r_k + r_l$, para un elemento (j, k, l) de $I \times I \times I$, $I = \{1, 2, 3\}$, es tal que s no pertenece a M_M. Se cumple además que $S_M \subset F_M$ porque toda función constante sobre $M \times M$ no pertenece a S_M. Luego el concepto de semi–métrica constituye un nuevo concepto si y solo si M tiene tres o más elementos. Su extensión satisface las relaciones siguientes

$$M_M \subset S_M \subset F_M \quad \text{y} \qquad S_M \cap P_M = M_M.$$

Consecuentemente, como para todo conjunto finito M los conjuntos M_M y F_M tienen la cardinalidad del continuo, se tiene que S_M también tiene la cardinalidad del continuo. Si r_1 es mayor que r_2 el conjunto de los r_3 tales que $r_1 > r_2 + r_3$ es $(0, r_1 - r_2)$ y tiene la cardinalidad del continuo, luego $S_M \backslash M_M$ también tiene esa cardinalidad. Como toda función constante de $M \times M$ en $[0, +\infty)$ no pertenece a S_M resulta que $F_M \backslash S_M$ tiene la cardinalidad del continuo.

Proposición 5. *Si M es infinito de cardinalidad* $\mathbf{m}$ *entonces S_M, $S_M \backslash M_M$ y $F_M \backslash S_M$ tienen cardinalidad $2^{\mathbf{m}}$.*

Demostración. Como $M_M \subset S_M \subset F_M$ y M_M tienen cardinalidad $2^{\mathbf{m}}$, entonces S_M tiene cardinalidad $2^{\mathbf{m}}$. Sean M_1 un subconjunto no vacío cualquiera de M y s_{M_1} y f_{M_1} las funciones definidas sobre $M \times M$ por

$$s_{M_1}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \\ 3, & \text{si } x \in M_1 \ \& \ y \in M_1, \ x \neq y \\ 1, & \text{si } x \notin M_1 \text{ o } y \notin M_1, \ x \neq y \end{cases}$$

$$f_{M_1}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in M_1 \ \& \ y \in M_1 \\ 1, & \text{si } x \notin M_1 \text{ o } y \notin M_1. \end{cases}$$

Si M_1 tiene más de dos elementos, entonces s_{M_1} no es una métrica y f_{M_1} no es una semi–métrica sobre M. Sean M_2 y M_3 subconjuntos diferentes de M con más de dos elementos cada uno y considérese, sin perdida de generalidad, que $M_2 \backslash M_3 = \varnothing$. Las semi–métricas s_{M_1} y s_{M_3} y las funciones f_{M_2} y f_{M_3} son diferentes ya que si $x \in M_2 \backslash M_3$ e $y \in M_2$, entonces $s_{M_2}(x,y) \neq s_{M_3}(x,y)$ y $f_{M_2}(x,y) \neq f_{M_3}(x,y)$. Por lo tanto, a diferentes subconjuntos de M con más de dos elementos corresponden semimétricas diferentes que no son métricas y funciones diferentes que no son semimétricas sobre M. Se sabe que la cardinalidad de la colección de todos los subconjuntos con tres o más elementos de un conjunto de cardinalidad $\mathbf{m}$ tiene cardinalidad $2^{\mathbf{m}}$. Consecuentemente $S_M \backslash M_M$ y $F_M \backslash S_M$ tienen cardinalidad $2^{\mathbf{m}}$.

Nota. Se concluye que, sobre un conjunto M con tres o más elementos, las colecciones de las semi–métricas que no son métricas y de las funciones que no son semi–métricas son amplísimas. Los orígenes de la palabra semi–métrica pueden verse en [2], [3], [4] y [5].

Se denomina espacio con una métrica débil a todo par (M, m) en el cual m satisface las condiciones $m_1)$ y $m_3)$, pero no necesariamente las condiciones $m_2)$ y $m_4)$. Este tipo de espacios fue estudiado por Ribeiro [6]. Se han estudiado espacios en los que m satisface las condiciones $m_1)$ y $m_2)$ y una condición más débil que la condición $m_3)$; por ejemplo, los espacios casi–métricos de Menger [3] y [7]. Espacios todavía más generales, en los cuales se exige a la función m

que satisfaga solo las condiciones m_1) y m_4) fueron investigados también por Menger [8]. Alexandroff y Hopf [9] denominaron espacio métricos abstractos a los pares (M, m), donde m es una función real no negativa definida sobre $M \times M$ que satisface condiciones no específicas. Espacios (M, m) en los que m no es necesariamente un número real fueron estudiados por Menger [10] y Golab [11]. Bieberbach [12] denominó espacio de Frechet localmente métrico a todo par (F, f), donde f es una función que a cada elemento del espacio le asigna una vencidad que es un espacio métrico. En diferentes algoritmos de agrupamientos (Clustering Algorithms) y de la Teoría de Reconocimientos de Patrones de las redes neurales se utiliza (ver [13] y [14]) la palabra distancia con un sentido más amplio que una métrica, por ejemplo, puede indicar una semi–métrica, pseudo–métrica, casi–métrica, etc.

Para dos elementos cualesquiera x e y de M, independientemente de que m sea una métrica, pseudo–métrica, semi–métrica, casi–métrica, etc, se denomina distancia de x a y, y si hay posibilidad de confusión m–distancia, al número $m(x, y)$.

2.3 Ultramétrica.

Se ha querido con esta sub–sección ilustrar parcialmente el paso 1.3.

Definición. *Un elemento u de F_M se denomina ultramétrica si cumple en lugar de la condición m_3) la condición más fuerte*

m'_3) $u(x, z) \leq \max[u(x, y), u(y, z)]$, *cualesquiera sean x, y, z de M.*

No es difícil probar que la condición m'_3) implica la condición m_3) y que el recíproco de esta afirmación no es cierto. Consecuentemente, indicando la extensión del concepto de ultramétrica por U_m y su contenido por P', se tiene que $U_M \subset M_M$ y que del cumplimiento de las propiedades P' se deduce el cumplimiento de las propiedades P pero no recíprocamente. Obviamente el estudio detallado de U_M y de $M_M \backslash U_M$ contribuye al mejor conocimiento de M_M.

Si M es un conjunto unitario, entonces $U_M = M_M$ y para este caso no tiene sentido el concepto de ultramétrica. Si M tiene dos o más elementos, se prueba con facilidad que $U_M \subset M_M$ y que $U_M \neq \varnothing$, pues toda métrica m_r es ultramétrica.

Proposición 6. *Si u es una ultramétrica sobre el conjunto M con dos o más elementos, x, y, z son elementos cualesquiera de M y se construye en el plano real un triángulo cuyos lados tengan por longitud $u(x, z)$, $u(x, y)$ y $u(y, z)$, entonces ese triángulo es isósceles.*

Demostración. Si $u(x, y) = u(y, z)$ el triángulo es isósceles o equilátero. Si $u(x, y) \neq u(y, z)$, supongamos sin perdida de generalidad que $u(x, y) < u(y, z)$; entonces la condición m'_3) nos permite asegurar que

$$u(x, z) \leq \max\left[u(x, y),\ u(y, z)\right] = u(y, z)$$

y que

$$u(y,z) \leq \max\,[u(y,x),\ u(x,z)] = u(x,z)$$

luego $u(x,z) = u(y,z)$. Resulta así que en este caso también el triángulo es isósceles.

La ultramétrica se utiliza en algoritmos de agrupamientos de enlace simple; ver por ejemplo, *Sinle-link Clustering Algorithms* [Cap. 12, sec. 3.2], "Algorithms based on an ultrametric transformation" [14, pp. 271–272].

2.4 Estructuras algebraicas y topológicas de $\mathbf{M_M}$.

2.4.1 Estructuras algebraicas de $\mathbf{M_M}$.

En esta sub–sección se probará que M_M hereda algunas de las estructuras de $[0,+\infty)$.

Proposición 7. *El par $(M_M,+)$ donde $+$ es la suma heredada de $([0,+\infty),+)$ es un semi–grupo abeliano que no es un monoide.*

Demostración. Trivial

Obsérvese que $([0,+\infty),+)$ es un monoide abeliano y que $(F_M,+)$ hereda esta estructura; pero como el cero no pertenece a M_M, entonces se debe esperar como máximo la estructura de semi–grupo abeliano para $(M_M,+)$.

Proposición 8. *El par $(M_M,\vee)$, donde $\vee$ es la operación definida sobre $M\times M$ por $(m_1,m_2)\to m_1\vee m_2$, $(m_1\vee m_2)(x,y)=\max\{m_1(x,y),\ m_2(x,y)\}$ es un semi–grupo abeliano que no es un monoide.*

Demostración. Se debe probar que $\vee$ es una operación interna de M; i.e. que $m_1\vee m_2$ pertenece a M_M. Se pasa a probar que $m_1\vee m_2$ cumple la desigualdad triangular ya que el resto de las condiciones de métrica se cumplen trivialmente. Por propiedades de máximo se tiene que

$$\begin{aligned}(m_1\vee m_2)(x,y) &\leq \max\{m_1(x,y)+m_1(y,z), m_2(x,y)+m_2(y,z)\}\\ &\leq \max\{m_1(x,y),\ m_2(x,y)\}+\max\{m_1(y,z),\ m_2(y,z)\}\\ &= (m_1\vee m_2)(x,y)+(m_1\vee m_2)(y,z).\end{aligned}$$

Una observación similar a la hecha después de la Proposición 7 se puede hacer ahora con solo sustituir la operación $+$ por la operación $\vee$.

Proposición 9. *Si α es un número real positivo y $m\in M_M$ entonces $\alpha m\in M_M$.*

Demostración. Trivial.

Las estructuras algebraicas de F_M y consecuentemente las de M_M, son elementales; no obstante, utilizando las operaciones correspondientes a estas estructuras se puede ampliar considerablemente el conjunto de elementos conocidos de M_M.

2.4.2 Estructuras topológicas de $\mathbf{M_M}$.

Proposición 10. *Si $\{m_n\}$ es una sucesión de métricas de M_M que converge puntualmente a m entonces m satisface las condiciones m_1), m_2) y m_3).*

Corolario 1. *Si existe un número positivo k tal que $k \leq m_n$ sobre $M \times M \backslash \triangle_M$ para todo n de N entonces m pertenece a M_M.*

Corolario 2. *Si $\alpha_k \in (0, +\infty)$, $m_k \in M_M$, $k \in N$ y $\sum_{k\geq 1} \alpha_k\, m_k$ es puntalmente convergente entonces $\sum_{k\geq 1} \alpha_k\, m_k$ pertenece a M_M.*

Corolario 3. *Si $\sum_{k\geq 1} \alpha_k$ es una serie convergente cuyo términos pertenece a $(0, +\infty)$ y $\{m_k\}_{k\in N}$ es una sucesión uniformemente acotada de M_M entonces $\sum_{k\geq 1} \alpha_k\, m_k$ pertenece a M_M.*

Las estructuras topológicas de M_M son también muy simples.

2.5 Métricas sobre conjuntos con estructuras algebraicas.

En esta sub–sección, para el caso en que M es un espacio vectorial, se estudiarán dos subclases importantes de M_M y se establecerá un isomorfismo entre una de estas clases y la clase N_M de las normas sobre M.

Si $(G, +)$ es un grupo, las métricas que son compatibles con la operación $+$, i.e. las métricas que satisfacen la condición

m_5) $m(x + z, y + z) = m(x, y)$ (invarianza para traslaciones)

para x, y, z cualesquiera de G, son muy importantes para el estudio del grupo $(G, +)$. La colección de métricas sobre $(G, +)$ que satisfacen m_5) se denota por $M_{(G,+)}$.

Los elementos m de $M_{(G,+)}$ tienen propiedades muy importantes, por ejemplo, la operación $+$ es una operación continua de $G \times G$ en G (considerando una métrica producto de m con m en $G \times G$). Otra propiedad importante de estos elementos se establece en la proposición 11.

Sea $F_{(G,+)}$ la colección de funciones f de $(G, +)$ en $[0, +\infty)$ que cumplen para todo x e y de G las condiciones

i) $f(x) = 0$ si y solo si $x = 0$
ii) $f(-x) = f(x)$
iii) $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$

Esta colección con la suma heredada de $([0, +\infty), +)$ es un semi–grupo conmutativo.

Proposición 11. *La aplicación F definida sobre $(M_{(G,+)},+)$ por $F(m) = m\,o(I,O)$, donde $m \in M_{(G,+)}$, I es la aplicación identidad y O la aplicación nula sobre G, es un isomorfismo de semigrupo entre los semigrupos $(M_{(G,+)},+)$ y $(F_{(G,+)},+)$.*

Demostración. Obviamente $f = mo(I,O)$ pertenece a F_G, probemos que pertenece a $F_{(G,+)}$. En efecto, $f(x) = m(x,0) = 0$ se cumple si y solo si $x = 0$ porque $m \in M_{(G,+)}$. Por una razón similar se cumple que

$$f(-x) = m(-x,0) = m(0,x) = m(x,0) = f(x)$$

$$\begin{aligned} f(x+y) &= m(x+y,0) = m(x,-y) \leq m(x,0) + m(0,-y) \\ &= f(x) + m(-y,0) = f(x) + f(-y) = f(x) + f(y) \end{aligned}$$

Si m_1 y m_2 son dos elementos diferentes de $(M_{(G,+)},+)$, tales que $F(m_1) = F(m_2)$ entonces $m_1(x,y) = m_1(x-y,0) = m_1 o(I,O)(x-y) = F(m_2)(x-y) = m_2 o(I,O)(x-y) = m_2(x-y,0) = m_2(x,y)$, i.e., $m_1 = m_2$. Queda así probada la inyectividad de F.

Probemos ahora la sobreyectividad de F.

Si f es un elemento cualquiera de $F_{(G,+)}$ y r es la resta de G, entonces $m = for$ es un elemento de $M_{(G,+)}$ tal que $F(m) = f$. En efecto, por ser $f \in F_{(G,+)}$, se tiene que $m(x,y) = f(x-y) = 0$ si y solo si $x = y$, $m(x,y) = f(x-y) = f(y-x) = m(y,x)$, y $m(x,z) = f(x-z) = f(x-y+y-z) \leq f(x-y)+f(y-z) = m(x,y) + m(y,z)$, y además $F(m)(x) = (for)o(I,O)(x) = (for)(x,0) = f(x-0) = f(x)$. O sea, $F(m) = f$. Finalmente, $F(m_1 + m_2) = (m_1 + m_2)o(I,O) = m_1 o(I,O) + m_2 o(I,O) = F(m_1) + F(m_2)$.

Los dos isomorfismos de semigrupo establecidos fueron:

$$(M_{(G,+)},+) \xrightarrow{\qquad F \qquad} (F_{(G,+)},+)$$

$$\begin{array}{l} G \times G \xrightarrow{m} [0,+\infty) \\ (x,y) \to m(x,y) \end{array} \longrightarrow \begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f = F(m) = mo(I,O)"] \arrow[d, "\begin{matrix} x \\ (I,O) \end{matrix}"'] & & {[0,+\infty)} \\ G \times G \arrow[urr, "m"'] & & f(x) = m(x,0) \\ (x,0) & & \end{tikzcd}$$

y

$$(F_{(G,+)},+) \xrightarrow{\quad F^{-1} \quad} (M_{(G,+)},+)$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "m"] & {[0,+\infty)} \arrow[r] & G\times G \arrow[r, "m=F^{-1}(f)=for"] \arrow[dd, "r"'] & {[0,+\infty)} \\
x \to f(x) & & (x,y) & m(x,y)=f(x-y) \\
 & & G \arrow[uur, "f"] & \\
 & & x-y &
\end{tikzcd}$$

Si $(V,+,.)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, las métricas sobre V que satisfacen, para x,y,z cualesquiera de V, las condiciones m_5) y m_6): $m(\alpha x,\alpha y) = |\alpha| m(x,y)$ (homogeneidad positiva para homotecia), son métricas compatibles con las operaciones de suma y multiplicación por un escalar de V y hacen de estas operaciones funciones continuas. La colección de estas métricas se indica por $M_{(V,+,\bullet)}$. Se cumple que $M_{(V,+)} \backslash M_{(V,+,\bullet)} \neq \varnothing$, pues la métrica descrita pertenece a $M_{(V,+)}$ y no a $M_{(V,+,\bullet)}$. La colección de las funciones f de $(V,+,\bullet)$ en $[0,+\infty)$ que satisfacen las condiciones i) e iii) de la clase $F_{(V,+)}$ y en lugar de la condición ii) satisfacen la condición

ii) $f(\alpha x) = \mid \alpha \mid f(x)$ para todo x de V y todo α de R,

se indica por $F_{(V,+,\bullet)}$ y forma con la suma heredada de $[0,+\infty)$ un semi–grupo conmutativo que está estrechamente relacionado con el semi–grupo conmutativo $(M_{(V,+,\cdot)},+)$.

Proposición 12. *Si $(V,+,\bullet)$ es un k–espacio vectorial, $K=\mathbb{R}$ o $K=\mathbb{C}$, la igualdad $F(m) = m\ o(I,O)$, donde I y O son las funciones identidad o idénticamente nulas sobre V, define un isomorfismo (de semi–grupo) entre los semi–grupos $(M_{(V,+,\bullet)},+)$ y $(F_{(V,+,\bullet)},+)$.*

Demostración. Es similar a la de la proposición anterior.

Los elementos de $F_{(V,+,\bullet)}$ se llaman normas de $(V,+,\bullet)$ y generalmente se denotan por el símbolo $\|\ \|$ Todo espacio vectorial $(V,+,\bullet)$ dotado de un elemento $\|\ \|$ de $F_{(V,+,\bullet)}$ se denomina espacio vectorial normado y se denota por $(V,\|\ \|)$. Con estas nuevas notaciones la colección $F_{(V,+,\bullet)}$ se indica por $N_{(V,\|\ \|)}$ o simplemente por N_V. La colección N_V es isomorfa a la sub–colección propia $M_{(V,+,\bullet)}$ de la colección M_V.

Dado un K–espacio vectorial $(V,+,\bullet)$, $K=\mathbb{R}$ o $K=\mathbb{C}$, se dice que un elemento m de M_V es topológicamente compatible con la estructura vectorial de $(V,+,\bullet)$ si sus operaciones suma y producto por un escalar son continuas con respecto a m; o sea, si para todo par de sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ de V y toda sucesión $\{\lambda_n\}$ de K tales que

$$x_n \xrightarrow{m} x, \quad y_n \xrightarrow{m} y \quad \text{y} \quad \lambda_n \longrightarrow \lambda$$

se tiene que

$$x_n + y_n \xrightarrow{m} x + y \quad \text{y} \quad \lambda_n x_n \xrightarrow{m} \lambda x.$$

La colección de todas las métricas topológicamente compatibles con su estructura de espacio vectorial se indica en el trabajo por M_t.

Como la métrica discreta sobre cualquier espacio vectorial no es métricamente compatible con la estructura vectorial y sin embargo es topológicamente compatible con esta estructura, ya que una sucesión $\{x_n\}$ de V es convergente a un valor con esta métrica si y solo si todos sus términos salvo un número finito son iguales a x, resulta que $M_{(V,+,\bullet)}$ está contenida estrictamente en M_t.

Dado un espacio vectorial normado $(V, \| \ \|)$, se tienen varias colecciones de métricas; por ejemplo, la colección de las métricas que satisfacen la condición $m_5)$, las que satisfacen la condición $m_6)$, las que satisfacen las condiciones $m_5)$ y $m_6)$, las que son topológicamente compatibles con la estructura de grupo, las que son topológicamente compatibles con la estructura de espacio vectorial y las que son topológicamente compatibles con la operación multiplicación por un escalar. El estudio de las relaciones entre todas estas colecciones, así como el de su cardinalidad es muy importante para el conocimiento de la colección M_V y será objeto de estudio en un artículo posterior.

2.6 Caracterizaciones del concepto de métrica.

En esta sub–sección se da cumplimiento al paso 1.6 de la sección uno.

Lindenbaum (ver [15]) probó que la colección de condiciones $P_1 = \{m_i)\}$, $i = 1, 2, 3, 4$ es equivalente a la colección $Q = \{m_1),\ m_{23}),\ m_4)\}$, donde $m_{23})$ indica la condición

$$m(x, z) \leq m(x, y) + m(z, y), \text{ para } x, y, z \text{ cualesquiera de } M.$$

Si se plantea la desigualdad triangular solo para los casos en que x, y, z son diferentes dos a dos y se indica esta nueva propiedad por $m_3'')$, entonces las propiedades $\{m_1),\ m_2),\ m_3''),\ m_4)\}$ constituyen también una caracterización del concepto de métrica.

La no negatividad de m es una consecuencia de las condiciones $m_2)$ y $m_3)$. En efecto, $m_3)$ nos permite asegurar que para todo y de M se cumple que

$$m(x, y) \leq m(x, y) + m(y, y)$$

y de aquí resulta trivialmente que $m(y,y) \geq 0$ para todo y de M. De m_2) y m_3) se tiene que

$$m(x,x) \leq 2\,m(x,y)$$

para x e y cualesquiera de M. Luego $m(x,y) \geq 0$ para todo x e y de M.

Consecuentemente, una métrica m sobre M se puede definir como una función de $M \times M$ en R que cumple las dos propiedades siguientes:

m_{14}) $m(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$

m_{23}) $m(x,y) \leq m(x,z) + m(y,z)$ para todo x, y, z de M;

o como una función m de $M \times M$ en $[0, +\infty)$ que cumple m_{14}) y

m''_{23}) $m(x,y) \leq m(x,z) + m(y,z)$ para x, y, z de M diferentes dos a dos.

Referencias

1. G. Birkhoff, Fundamenta Mathematicae **26** (1936), 156.
2. K. Menger, Math. Ann. **100** (1928).
3. K. Menger, Jber. Dtsch. Math. V. **40** (1931).
4. K. Menger, Proc. Ale. Amst. **30** (1927), 710.
5. W. E. Chittenden, Traus. Amer. Math. Soc. **18** (1917), 161-166.
6. H. Ribeiro, Portug. Math. **4** (1943-5), 21-40.
7. K. Menger, Math. Zeit **33** (1931), 396.
8. K. Menger, C. R. Paris **202** (1936), 1007.
9. P. Alexandroff y H. Hopf (1935), Topologic I. Berlin.
10. K. Menger, Fundamenta Mathematicae **25** (1935), 445.
11. S. Golab, Fundamenta Mathematicae **31** (1938), 67.
12. I. Bieberbach, Sbert. Preuss. Akad. Wiss. (1929), 612.
13. P. R. Krishnaiah and L. N. Kanal, *Handbook of Statistics 2. Classification Pattern Recognition and Reduction of Dimensionality*, Amsterdam: North Holland, 1982, 271-272.
14. Peper Ferdinand, Shirazi, Mehdi N, and Nudehidiki, "A noise suppressing Distance Measure for Competitive Learning Neural Networks", IEEE Transactions on neural networks **4** (January 1993), 151-153.
15. A. Lindenbaum, Fundamenta Mathematicae **8** (1926), 211.