Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen IV (1997), pp. 49–55

PUNTOS FIJOS PARA OPERADORES EN ESPACIOS METRICOS CONVEXOS

LUIS RAFAEL JIMÉNEZ(*)

Resumen. En el presente artículo se generalizará un resultado presentado por A.K.Kalinde para una clase de operadores no necesariamente continuos y que incluyen como caso especial a las aplicaciones no-expansivas.

Abstract. We generalize Kalinde's result for a class of operators not necessarily continuous and including non - expansive mappings.

Keywords. Convex metric spaces, orbital diametral functions, diminishing orbital diametral functions.

1. Introducción

La existencia de puntos fijos para aplicaciones no expansivas que satisfacen ciertas condiciones especiales en espacios métricos convexos ha sido estudiada extensivamente en [1], [2], [4], [5], [7]. En este artículo generalizaremos uno de los resultados más importantes [5 th. 1.6] [4 th. 2.1] para una clase de aplicaciones no continuas que incluyen como caso especial a las aplicaciones no expansivas.

Definición 1.1. Sean (E, d) un espacio métrico e I el intervalo cerrado $[0, 1]$. Una aplicación continua $W : E \times E \times I \to E$ se llama una *estructura convexa* sobre E si para todo $(x, y, \lambda) \in E \times E \times I$ se cumple la condición
$$d(a, W(x, y, \lambda)) \leq \lambda d(a, x) + (1 - \lambda)d(a, y)$$
para todo $a \in E$.

(*)Texto recibido 31/3/98, revisado 20/7/98. Luis Rafael Jiménez, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional-sede Bogotá.
e-mail:rjimenez@matematicas.unal.edu.co

Si el espacio métrico (E, d) está dotado de una estructura convexa, se llama un espacio *métrico convexo*. Representamos este espacio por la notación (E, d, W).

Ejemplo 1.1. Un espacio de Banach, o cualquiera de sus subconjuntos convexos, es un espacio métrico convexo donde su estructura convexa está determinada por la aplicación $W(x, y, \lambda) = \lambda x + (1 - \lambda)y$.

Definición 1.2. Sea (E, d, W) un espacio métrico convexo. Un subconjunto no vacío K de E se llama *convexo* si $W(x, y, \lambda) \in K$ siempre que $x, y \in K$ y $\lambda \in I$.

Takahashi en [8] demostró que la bola abierta $B(x, r) = \{z \in E : d(x, z) < r\}$ y la bola cerrada $B[x, r] = \{z \in E : d(x, z) \leq r\}$ son conjuntos convexos y que la intersección de cualquier familia de subconjuntos convexos de E es también un conjunto convexo.

Definición 1.3. Sea (E, d, W) un espacio métrico convexo. La *envolvente convexa* de un subconjunto $A \subset E$, $Co(A)$ es la intersección de todos los subconjuntos convexos de E que contienen a A. La *envolvente convexa cerrada* $\overline{Co(A)}$ es la intersección de todos los subconjuntos cerrados y convexos que contienen a A.

2. Puntos fijos para algunas aplicaciones de la clase $\mathbf{D(a, b, c)}$

Sean (E, d) un espacio métrico y K un subconjunto de E. Como en [6], establecemos que una aplicación $T : K \to K$ pertenece a la clase $D(a, b, c)$ sobre K si satisface la condición

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, y) + b[d(x, Tx) + d(y, Ty)] + c[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$$

para todos $x, y \in K$, donde a, b, c son números no negativos.

Observamos que si $b = c = 0$ y $a = 1$ obtenemos las aplicaciones no expansivas sobre K.

Sea $T : E \to E$ una aplicación del espacio métrico (E, d) sobre sí mismo. Para cada $z \in E$ definimos su órbita $O(z)$ como el conjunto $O(z) = \{z, Tz, T^2z, ...\}$. Además, representamos el diámetro de la órbita $O(z)$ por $D(O(z)) = \sup\{d(T^n z, T^m z) : n, m \in \mathbb{N}\}$. La función ρ definida por $\rho(z) = D(O(z))$, $z \in E$ se llama la función *orbital diametral* asociada con T.

Sea $P_T = \{z \in E : \rho(z) > 0\}$. Observamos que si $P_T = \emptyset$, T es la aplicación idéntica sobre E.

Definición 2.1. Sea (E, d) un espacio métrico y $T : E \rightarrow E$ una aplicación de E sobre sí mismo. Decimos que T tiene una *función orbital diametral decreciente* sobre E si para todo subconjunto no vacío, T-invariante y acotado A de E tal que $A \cap P_T \neq \emptyset$, existe $z_1 \in A$ tal que $\rho(z_1) < D(A)$.

Ejemplo 2.1. La aplicación $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{x}{5} & \text{si } 0 \leq x < \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x}{4} & \text{si } \dfrac{1}{3} \leq x < \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{x}{3} & \text{si } \dfrac{2}{3} \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{6} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

pertenece a la clase $D(\frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{29}{300})$ y tiene una función orbital diametral decreciente.

Definición 2.2. Sea (E, d) un espacio métrico. La aplicación $T : E \rightarrow E$ tiene *diámetro orbital decreciente* sobre E si para cada $z \in E$ tal que $D(O(z)) > 0$ se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} D(O(T^n z)) < D(O(z))$.

Veamos que el concepto de aplicación con función orbital diametral decreciente sobre E generaliza el concepto de aplicación que tiene diámetro orbital decreciente sobre E. En efecto, sea $T : E \rightarrow E$ una aplicación que tiene diámetro orbital decreciente. Si A es un subconjunto no vacío, T-invariante y acotado de E tal que $A \cap P_T \neq \emptyset$, hay un $z \in A$ tal que $\rho(z) > 0$ y como T tiene diámetro orbital decreciente sobre E, $\lim_{n \rightarrow \infty} D(O(T^n z)) < \rho(z)$. Luego existe $z_1 = T^m z \in O(z) \subset A$ tal que $\rho(z_1) < D(O(z)) \leq D(A)$. Por lo tanto T tiene una función orbital diametral decreciente sobre E.

Definición 2.3. Sea M un subconjunto no vacío de un espacio métrico convexo (E, d, W). Decimos que M tiene la propiedad (C) si para toda cadena decreciente $(K_i)_{i \in I}$ de subconjuntos no vacíos, cerrados y convexos de E tales que $K_i \cap M \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, se tiene que $(\cap K_i) \cap M \neq \emptyset$.

Un teorema de Smulian [4] muestra que un subconjunto convexo de un espacio de Banach tiene la propiedad (C) si y sólo si es débilmente compacto.

El teorema siguiente generaliza los teoremas 1.6 de [5] y 2.1 de [4].

Teorema 2.1. *Sean* (E, d, W) *un espacio métrico convexo y* K *un subconjunto no vacío, acotado, cerrado y convexo de* E. *Sea* M *un subconjunto de* E *que tiene la propiedad* (C). *Si* $T : K \to K$ *es una aplicación de la clase* $D(a,b,c)$ *con* $a + 3b + 3c \leq 1$ *que satisface:*

(i) T *tiene una función orbital diametral decreciente sobre* K,

(ii) *Para cada* $z \in K$, $\overline{Co(O(z))} \cap M \neq \emptyset$,

entonces existe un punto $z_o \in M$ *tal que* $Tz_o = z_o$. *Además este punto es único si* $a \neq 1$.

Demostración. Sea $\mathfrak{J} = \{A \subset K : A$ es no vacío, cerrado, convexo, $T-$invariante y $A \cap M \neq \emptyset\}$. Como $K \in \mathfrak{J}$ la colección $\mathfrak{J}$ es no vacia. Sobre $\mathfrak{J}$ definimos una relación de orden parcial mediante $A < B$ si y sólo si $B \subset A$. Como M tiene la propiedad (C), por el lema de Zorn hay un elemento maximal K_1 en $\mathfrak{J}$ que resulta minimal con respecto a la inclusión de conjuntos.

Si demostramos que $\rho(z) = 0$ para todo $z \in K_1$, por la condición (ii) existe al menos un punto $z_o \in M$ tal que $Tz_o = z_o$.

Supongamos que existe $x \in K_1$ tal que $\rho(x) > 0$. Luego $K_1 \cap P_T \neq \emptyset$ y como K_1 es no vacío, acotado y T-invariante, por la condición (i) existe $z_1 \in K_1$ tal que $\rho(z_1) < D(K_1)$. Elijamos $r > 0$ tal que $\rho(z_1) \leq r < D(K_1)$ y definamos $U = \{z \in K_1 : d(T^n z_1, z) \leq r$ para casi todo $n \in \mathbb{N}\}$. Probaremos que $U \in \mathfrak{J}$.

Observamos que $U \neq \emptyset$ pues $z_1 \in U$. Veamos ahora que U es T-invariante. Sea $z \in U$; como K_1 es T-invariante y $z \in K_1$ entonces $Tz \in K_1$. Además como $T \in D(a,b,c)$ tenemos

$$\begin{aligned} d(T^n z_1, Tz) \leq\ & ad(T^{n-1}z_1, z) + b[d(T^{n-1}z_1, T^n z_1) + d(z, Tz)] + \\ & c[d(T^{n-1}z_1, Tz) + d(z, T^n z_1)] \\ \leq\ & ad(T^{n-1}z_1, z) + b[d(T^{n-1}z_1, T^n z_1) + d(z, T^n z_1) + d(T^n z_1, Tz)] + \\ & c[d(T^{n-1}z_1, T^n z_1) + d(T^n z_1, Tz) + d(z, T^n z_1)] \end{aligned}$$

y como $z_1 \in U$ y $\rho(z_1) \leq r$ entonces $(1 - b - c)d(T^n z_1, Tz) \leq (a + 2b + 2c)r$ para casi todo $n \in \mathbb{N}$, y dado que $a + 3b + 3c \leq 1$, concluimos que

$$d(T^n z_1, Tz) \leq \frac{a + 2b + 2c}{1 - b - c}\, r \leq r$$

para casi todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $Tz \in U$ y U resulta T-invariante.

Probemos enseguida que U es convexo. Como $U \subset K_1$ y K_1 es convexo, entonces para todo z, $z' \in U$ y $\lambda \in I$ tenemos que $W(z, z', \lambda) \in K_1$. Además como (E, d, W) es un espacio métrico convexo, por la definición de U tenemos que

$$d(T^n z_1, W(z, z', \lambda)) \leq \lambda d(T^n z_1, z) + (1 - \lambda) d(T^n z_1, z') \leq \lambda r + (1 - \lambda) r = r$$

para casi todo $n \in \mathbb{N}$, lo que prueba la convexidad de U.

Veamos que U es cerrado. Sea (z_m) una sucesión en U que converge a z. Como $U \subset K_1$ y K_1 es cerrado, $z \in K_1$. Además para todo $\varepsilon > 0$ existe $N_o \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N_o$ entonces $d(T^n z_1, z) \leq d(T^n z_1, z_m) + d(z_m, z) < r + \varepsilon$ para casi todo $n \in \mathbb{N}$. Luego $d(T^n z_1, z) \leq r$ para casi todo $n \in \mathbb{N}$, lo que prueba que $z \in U$ y U es cerrado.

Finalmente, como $z_1 \in U$, U es cerrado, convexo y T- invariante entonces $\overline{Co(O(z_1))} \subset U$, y por la condición (ii) $\emptyset \neq \overline{Co(O(z_1))} \cap M \subset U \cap M$. Luego $U \cap M \neq \emptyset$ y $U \in \mathfrak{I}$ como queríamos demostrar.

Por la minimalidad de K_1 tenemos que $U = K_1$. Sea $S = \{z \in K_1 : K_1 \subset B[z, r]\}$. Probaremos que $S \in \mathfrak{I}$. Veamos primero que $S \neq \emptyset$. Si $p \in K_1 = U$ entonces $d(T^n z_1, p) \leq r$ para casi todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $O(T^n z_1) \subset B[p, r]$ para todo $n \geq N_1$ y como $B[p, r]$ es cerrado y convexo entonces $\overline{Co(O(T^n z_1)} \subset B[p, r]$ para $n \geq N_1$.
Consideremos el conjunto $H = \cap_{n \geq 1} \overline{Co(O(T^n z_1))} \cap K_1 \cap M$. Como $z_1 \in K_1$ y K_1 es cerrado, convexo y T-invariante entonces $\overline{Co(O(T^n z_1))} \subset K_1$ para todo $n \geq 1$ y como M tiene la propiedad (C) tenemos que $H = \cap_{n \geq 1} \overline{Co(O(T^n z_1))} \cap M \neq \emptyset$.
Sea $u \in H$. Por nuestra discusión anterior $u \in B[p, r]$ para todo $p \in K_1$ y en consecuencia $p \in B[u, r]$ para todo $p \in K_1$ luego $K_1 \subset B[u, r]$, o sea $u \in S$ y $S \neq \emptyset$.

Veamos ahora que S es convexo. En efecto, si z, $z' \in S$ y $\lambda \in I$, entonces $W(z, z', \lambda) \in K_1$ pues $S \subset K_1$ y K_1 es convexo. Además para cualquier $p \in K_1$ tenemos

$$d(p, W(z, z', \lambda)) \leq \lambda d(z, p) + (1 - \lambda) d(z', p) \leq \lambda r + (1 - \lambda) r = r$$

lo que prueba que $K_1 \subset B[W(z, z', \lambda), r]$, luego $W(z, z', \lambda) \in S$ y S es convexo.

A continuación veamos que S es cerrado. Sea (z_m) una sucesión en S que converge a z. Como $S \subset K_1$ y K_1 es cerrado entonces $z \in K_1$.

Además, para todo $\varepsilon > 0$ y cualquier $p \in K_1$ existe $N_o \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N_o$ entonces $d(z,p) \leq d(z,z_m) + d(z_m,p) < \varepsilon + r$. Luego para todo $p \in K_1$, $d(z,p) \leq r$ o sea $K_1 \subset B[z,r]$ y en consecuencia $z \in S$ y S es cerrado.

Demostremos por contradicción que S es T-invariante. Supongamos que existe $z_2 \in S$ tal que $Tz_2 \notin S$. Si $y \in F = B[Tz_2, r] \cap K_1$ entonces

$$\begin{aligned} d(Ty,Tz_2) &\leq ad(y,z_2) + b[d(y,Ty) + d(z_2,Tz_2)] + c[d(y,Tz_2) + d(z_2,Ty)] \\ &\leq ad(y,z_2) + b[d(y,Tz_2) + d(Tz_2,Ty) + d(z_2,Tz_2)] + \\ &\quad c[d(y,Tz_2) + d(z_2,Ty)] \end{aligned}$$

luego

$$(1-b)d(Ty,Tz_2) \leq ad(y,z_2) + b[d(y,Tz_2) + d(z_2,Tz_2)] + c[d(y,Tz_2) + d(z_2,Ty)]$$

y como $z_2 \in S$, Ty, $Tz_2 \in K_1$ se sigue que

$$d(Ty,Tz_2) \leq \frac{(a+2b+2c)}{1-b} r \leq r.$$

Luego $Ty \in F$ y F es T-invariante.

Como F es cerrado, convexo y T-invariante; y además $Tz_2 \in F$ entonces $\overline{Co(O(Tz_2))} \subset F$ y por la condición (ii) $\overline{Co(O(Tz_2))} \cap M \neq \emptyset$, luego $F \cap M \neq \emptyset$. Además, como $Tz_2 \notin S$, existe $t \in K_1$ tal que $d(t,Tz_2) > r$. Luego $t \notin F$. Por todo lo anterior tenemos que F es un subconjunto propio de K_1 que pertenece a la clase $\mathfrak{I}$, lo cual contradice la minimalidad de K_1. Por lo tanto S es T-invariante.

Como $S \neq \emptyset$ y T-invariante, por la condición (ii), $S \cap M \neq \emptyset$. Luego $S \in \mathfrak{I}$. Por la definición de S y la elección de r tenemos que $D(S) \leq r < D(K_1)$. Luego S es un subconjunto propio de K_1, lo cual contradice nuevamente la minimalidad de K_1.

Por lo tanto no puede existir $x \in K_1$ tal que $\rho(x) > 0$ y en consecuencia $\rho(x) = 0$ para todo $x \in K_1$. De esta forma tenemos que $Tx = x$ para todo $x \in K_1$ y por la condición (ii) existe al menos un $z_o \in M$ tal que $Tz_o = z_o$.

Por último, probaremos ahora que si $a \neq 1$ el punto fijo es único. En efecto, si suponemos que u, v son puntos fijos diferentes de T tenemos

$$d(u,v) \leq ad(u,v) + 2cd(u,v) = (a+2c)d(u,v) < d(u,v)$$

lo que es contradictorio.

Referencias

1. L.P. Belluce and W.Kirk, "Fixed-point theorems for certain classes of nonexpansive mappings", Proc. Amer. Soc. **20** (1969), 141-146.
2. L.P. Belluce and W.Kirk, "Some fixed points theorems in metrics and Banach spaces", Canad. Math. Bull. **12** (1969), 481-491.
3. N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear Operators Part I, General Theory*, New York: Wiley, 1964.
4. A.K. Kalinde, "Fixed points for mappings with diminishing orbital diametral functions", Math. Japonica **38** (1993), 659-665.
5. S.A. Naimpally, K.L. Singh and J.H.M. Whitfield, "Fixed points in convex metrics spaces", Math. Japonica **29** (1984), 585-597.
6. R.A. Rashwan, "On the existence of fixed points for some discontinuous operators", Math. Japonica **35** (1990), 97-104.
7. S.L.Singh, *Generalized diminishing orbital diametral sum*, Math. Seminar Notes, Kobe University 5, 1977.
8. W. Takahashi, "A convexity in metric space and nonexpansive mappings", I.Kodai math. sem. rep. **22** (1970), 142-149.