Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen IV (1997), pp. 43–47

PUNTOS FIJOS COMUNES

LUCIMAR NOVA-G.(*)

Resumen. El objeto del presente artículo es el de mostrar un caso especial de aquel observado por B. Fisher sobre puntos fijos comunes a dos operadores, en el que la continuidad de uno de los operadores es reemplazada por el hecho de pertenecer a la clase $D(a, b)$, con $a + 2b < 1$.

Abstract. We study common fixed points for two operators, in which the condition of continuity for one of them is replaced by the condition of belonging to the class $D(a, b)$ with $a + 2b < 1$.

Keywords. Common fixed points, regular asymptotic functions.

1. Introducción

El estudio de puntos fijos comunes se remonta al año 1936, cuando Markov y Kakutani probaron que "Si K es un subconjunto convexo, compacto y no-vacío de un espacio localmente convexo X y si $\mathcal{F}$ es una familia de aplicaciones lineales continuas de K en sí mismo, las cuales conmutan entre sí, entonces existe un punto $p \in K$ tal que $Tp = p$ para todo $T \in \mathcal{F}$".

Muchos otros autores han estudiado el conjunto de puntos fijos comunes de operadores, entre ellos B. Fisher [1], quien mostró que "Si S y T son aplicaciones de un espacio métrico completo X en sí mismo y si

(i) S es continua,
(ii) $d(Sx, TSy) \leq \alpha d(x, Sy) + \beta[d(x, Sx) + d(Sy, TSy)] + \gamma[d(x, TSy) + d(Sy, Sx)]$

(*)Texto recibido 12/3/98, revisado 20/7/98. Lucimar Nova, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional - sede Bogotá. e-mail:lnova@matematicas.unal.edu.co

para todo $x, y \in X$, algunos $\alpha,\ \beta,\ \gamma \geq 0$, con $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$, entonces S y T tienen un único punto fijo en común".

En 1980, en [2], se introdujeron los operadores de la clase $D(a, b)$ definidos en subconjuntos de espacios normados, los cuales pueden ser generalizados cuando se consideran espacios métricos. Un operador S, definido de un espacio métrico X en sí mismo, se dice que pertenece a la clase $D(a, b)$ si

$$d(Sx, Sy) \leq ad(x, y) + b[d(x, Sx) + d(y, Sy)], \tag{1}$$

para todo $x, y \in X$.

Así mismo, en [3] se mostró que "Si K es un subconjunto cerrado de un espacio de Banach y $T \in D(a, b)$ con $a + 2b < 1$, entonces

(a) T es asintóticamente regular en todo punto de K.

(b)La sucesión de iterativas de Picard $(T^n x_o)_n$, definida a partir de $x_o \in K$ (arbitrario), es una sucesión de Cauchy y converge al único punto fijo de T".

Este mismo resultado también se obtiene si se supone que K es un subconjunto cerrado de un espacio métrico completo X.

Se dice que un operador T definido de K en sí mismo es *asintóticamente regular* en $x_o \in K$, si

$$\lim_{n\to\infty} d(T^n x_o, T^{n+1} x_o) = 0.$$

La idea del presente artículo es reemplazar la continuidad de S, en el artículo de Fisher, por el hecho de pertenecer a la clase $D(a, b)$, con $a+2b < 1$, la cual no implica continuidad.

2. El resultado principal

Dadas S, T dos aplicaciones definidas de un espacio métrico X en sí mismo, diremos que $S \in F(T, \alpha, \beta, \gamma)$ si

$$d(Sx, TSy) \leq \alpha d(x, Sy) + \beta[d(x, Sx) + d(Sy, TSy)] + \gamma[d(x, TSy) + d(Sx, Sy)] \tag{2}$$

para todo $x, y \in X$ y algunos $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, con $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$.

Diremos que $S \in N(T, \alpha, \beta)$ si

$$d(Sx, TSy) \leq \alpha d(x, Sy) + \beta[d(x, Sx) + d(Sy, TSy)], \tag{3}$$

para todo $x, y \in X$, y algunos $\alpha, \beta \geq 0$ con $\beta < 1$.

Observación 1. *Si* $S \in F(T,\alpha,\beta,\gamma)$, *entonces* $S \in N(T,\alpha+2\gamma,\beta+\gamma)$.

En efecto, si $S \in F(T,\alpha,\beta,\gamma)$, entonces $d(Sx,TSy) \leq \alpha d(x,Sy)+\beta[d(x,Sx)+d(Sy,TSy)]+\gamma[d(Sy,Sx)+d(x,TSy)]$. Usando la desigualdad triangular de la métrica, y agrupando términos, se obtiene: $d(Sx,TSy) \leq (\alpha+2\gamma)d(x,Sy)+(\beta+\gamma)[d(x,Sx)+d(Sy,TSy)]$ y puesto que $\beta+\gamma \leq \alpha+2(\beta+\gamma) < 1$, entonces $S \in N(T,\alpha+2\gamma,\beta+\gamma)$.

Veamos ahora el principal resultado de este artículo:

Teorema. *Si* S, T *son aplicaciones definidas de un espacio métrico completo* X *en sí mismo y si*

$$(i)\ S \in D(a,b), \text{ con } a+2b<1,$$
$$(ii)\ S \in N(T,\alpha,\beta),$$

entonces

(*i*) *existe un único punto* $z \in X$ *tal que* $z = Tz = Sz$.

(*ii*) $\lim_{n\to\infty} S^n x = z$, *para* $x \in X$.

(*iii*) $\lim_{n\to\infty} TS^n x = z$, *para* $x \in X$.

Demostración. Por el resultado presentado en [3], se tiene que existe un único $z \in X$ tal que $z = Sz$ y

$$\lim_{n\to\infty} S^n x = z.$$

para todo $x \in X$.

Como $S \in N(T,\alpha,\beta)$, entonces

$$d(z,Tz) = d(Sz,TSz) \leq \beta d(z,Tz)$$

con $\beta < 1$; entonces $z = Tz$.

De otra parte:

$$d(S^n x, TS^n x) \leq \alpha d(S^{n-1}x, S^n x) + \beta[d(S^{n-1}x, S^n x) + d(S^n x, TS^n x)]$$

con $\beta < 1$, entonces

$$d(S^n x, TS^n x) \leq \frac{\alpha+\beta}{1-\beta} d(S^n x, S^{n-1}x).$$

y puesto que S es asintóticamente regular y $S^n x \to z$, entonces $TS^n x \to z$.

De acuerdo con la observación 1, se concluye

Corolario. *Si* S, T *son aplicaciones definidas de un espacio métrico completo* X *en sí mismo y si*

$$(i)\ S \in D(a, b),\ \text{con } a + 2b < 1,$$
$$(ii)\ S \in F(T, \alpha, \beta, \gamma),$$

entonces existe un único $z \in X$ *tal que* $z = Sz = Tz$, $S^n x \to z$, $TS^n x \to z$ *para* $x \in X$.

Observación 2. *Si* X *es un espacio métrico completo y* $S : X \to X$ *es tal que*

$$(i)\ S \in D(a, b),\ \text{con } a + 2b < 1,$$
$$(ii)\ S \in N(I, \alpha, \beta),$$

entonces S *es constante.*

En efecto, como $S \in N(I, \alpha, \beta)$, se tiene que

$$d(Sy, Sx) \leq \alpha d(y, Sx) + \beta d(y, Sy).$$

Por la desigualdad triangular de la métrica y el hecho de ser $\beta < 1$, se obtiene:

$$d(Sx, Sy) \leq \frac{\alpha + \beta}{1 - \beta} d(y, Sx) \tag{4}$$

para todo $x, y \in X$.

En particular para $y = Sx$, se tiene

$$d(Sx, S^2x) \leq \frac{\alpha + \beta}{1 - \beta} d(Sx, Sx).$$

Es decir $Sx = S^2x$.

De nuevo, si en (4) hacemos $y = S^2x$, tenemos

$$d(Sx, S^3x) \leq \frac{\alpha + \beta}{1 - \beta} d(S^2x, Sx).$$

Siguiendo este proceso reiteradamente, se obtiene que

$$d(Sx, S^n x) = 0$$

para $n \geq 1$.

Es decir, la órbita de cualquier punto $x \in X$ bajo S se reduce a $\{x, Sx\}$ y puesto que $S^n x \to z$, donde z es el único punto fijo de S, entonces $Sx = z$ para todo $x \in X$.

Observación 3. *Si* $T : X \to X$ *es tal que* $I \in N(T, \alpha, \beta)$, *entonces* T *es la aplicación identica.*

En efecto:

$$d(x, Ty) \leq \alpha d(x, y) + \beta d(y, Ty).$$

De nuevo por la desigualdad triangular de la métrica y el hecho de ser $\beta < 1$, se tiene que

$$d(x, Ty) \leq \frac{\alpha + \beta}{1 - \beta} d(x, y),$$

para todo $x, y \in X$.

En particular para $y = x$, se concluye lo deseado.

Referencias

1. B. Fisher, "Results on common fixed points", Math. Japonica **22** (1977), 335-338.
2. L. Nova, *Some Fixed Point Theorems*, Ph.D. Dissertation (U. of Montana) (1980).
3. L. Nova, "Fixed point theorems for some discontinuous operators", Pac. J. of Math. **123** **No.1** (1986), 189-196.