Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen V No. 2 (1998), pp. 129–145

$\rightarrow$ CONSISTENCIA DE LOS SISTEMAS LD5 A LD10

MANUEL SIERRA ARISTIZÁBAL(*)

Resumen. Los sistemas proposicionales LD5,..., LD10 soportan una forma general de la paradoja de Russell y son $\rightarrow$consistentes.

Abstract. The propositional systems LD5,..., LD10 support a general form of Russell paradox and are $\rightarrow$consistent.

Keywords. Russell paradox, $\rightarrow$consistent, contraction, simplification, modus ponens.

1. Introducción

Sea T una teoría que tiene una lógica de base en la cual son válidas la regla de Modus Ponens $A, A \rightarrow B \vdash B$, la regla de contracción $A \rightarrow (A \rightarrow B) \vdash A \rightarrow B$ y la regla de simplificación $A \leftrightarrow B \vdash A \rightarrow B,\ B \rightarrow A$, además de las reglas de especificación para los cuantificadores, si en T vale el esquema E1. $\exists z\forall x(x \in z \leftrightarrow \alpha(x))$, entonces T es inconsistente (demuestra todas sus sentencias), este hecho es conocido como la paradoja de Curry.

Prueba:

1. $\exists z\forall x(x \in z \leftrightarrow (x \in x \rightarrow B))$	E1 con B sentencia
2. $\forall x(x \in z \leftrightarrow (x \in x \rightarrow B))$	Especificación existencial en 1
3. $z \in z \leftrightarrow (z \in z \rightarrow B)$	Especificación universal en 2
4. $z \in z \rightarrow (z \in z \rightarrow B)$	Simplificación en 3
5. $(z \in z \rightarrow B) \rightarrow z \in z$	Simplificación en 3

(*)Texto recibido 2/08/99, revisado 6/03/00. Manuel Sierra Aristizábal, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia; e-mail: msierra@matematicas.unal.edu.co

6. $z \in z \to B$	Contracción en 4
7. $z \in z$	Modus Ponens entre 5 y 6
8. B	Modus Ponens entre 6 y 7

Podemos observar en particular, que en una teoría T que tiene una lógica de base en la cual son válidas la regla de Modus Ponens, la regla de contracción y la regla de simplificación, si en T vale el esquema E2. $A \to B \leftrightarrow (A \to B) \to B$ para algún A, entonces T es inconsistente. En la lógica clásica, cuando A es $R \in R$ y B es la falsedad, E2 es la paradoja de Russell $R \in R \leftrightarrow \neg R \in R$.

Prueba:

1. $(A \to B) \leftrightarrow ((A \to B) \to B)$	E2 con B arbitrario
2. $(A \to B) \to ((A \to B) \to B)$	Simplificación en 1
3. $((A \to B) \to B) \to (A \to B)$	Simplificación en 1
4. $(A \to B) \to B$	Contracción en 2
5. $A \to B$	Modus Ponens entre 3 y 4
6. B	Modus Ponens entre 4 y 5

Las Lógicas Diagonales LD1 y LD2 construidas en [1], codifican la regla de contracción y soportan la codificación de E2 sin perder la consistencia. Los teoremas más elementales que genera el sistema LD2 son de la forma $A \to B$, por lo que la $\to$consistencia (existencia de al menos una fórmula $A \to B$ que no es teorema) es el tipo de consistencia que debe considerarse.

En este trabajo se presentan por primera vez los sistemas $\to$consistentes LD5, ..., LD10, los cuales codifican las reglas de contracción, simplificación, algunas formas débiles de modus ponens y E2.

2. Lógica Diagonal LD1

El conjunto de fórmulas es generado recursivamente a partir de los símbolos primarios utilizando los conectivos $\cdot$ y $\equiv$. La lógica diagonal LD1 consta de los siguientes 3 **axiomas** (notación: $AB = A \cdot B, ABC = (AB)C$):

Ax1	$\mathbf{A(AB) \equiv AB}$
Ax2	$\mathbf{ABC \equiv A(BC)}$
Ax3	$\mathbf{A(ABC) \equiv ABC}$

Reglas de inferencia:

Tran1	$\mathbf{AB,\ BC \vdash AC}$
Tran2	$\mathbf{A \equiv B,\ B \equiv C \vdash A \equiv C}$
Simet	$\mathbf{A \equiv B \vdash B \equiv A}$
Mp	$\mathbf{A \equiv B,\ A \vdash B}$

Traducimos las fórmulas diagonales en el cálculo proposicional clásico, interpretando $\cdot$ como $\wedge$ y $\equiv$ como $\leftrightarrow$, tenemos que las traducciones de los axiomas son teoremas en el cálculo proposicional clásico y la traducción de las reglas de inferencia produce reglas clásicas que preservan validez. De lo anterior se infiere que la traducción de teoremas diagonales produce teoremas clásicos, tenemos así que LD1 no demuestra todas sus fórmulas, es decir,

1. **LD1 es consistente.**
   Podemos probar además que
2. **Los axiomas son independientes [1].**
3. **La regla de sustitución por equivalencia no es válida en LD1 [1].**

3. Lógica Diagonal LD2

El conjunto de fórmulas, es generado recursivamente a partir de los símbolos primarios utilizando los conectivos diagonales $\cdot, \rightarrow, -, \equiv$. La lógica diagonal LD2 consta de los siguientes **axiomas**:

A1	$\mathbf{A \rightarrow A - B \equiv A \rightarrow B}$
A2	$\mathbf{AB \rightarrow C \equiv A \rightarrow B - C}$
A3	$\mathbf{A \rightarrow AB - C \equiv AB \rightarrow C}$

Donde las letras mayúsculas son fórmulas generadas por $\cdot$ y $-$, omitimos los paréntesis para indicar asociatividad a la izquierda, omitimos $\cdot$, $\equiv$ será el conectivo principal seguido por $\rightarrow$.

LD2 utiliza las siguientes **reglas de inferencia**:

Tran $\rightarrow$	$\mathbf{A \rightarrow B,\ B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C}$
Tran $\equiv$	$\mathbf{A \rightarrow B \equiv C \rightarrow D,\ C \rightarrow D \equiv E \rightarrow F \vdash A \rightarrow B \equiv E \rightarrow F}$
Simet $\equiv$	$\mathbf{A \rightarrow A' \equiv B \rightarrow B' \vdash B \rightarrow B' \equiv A \rightarrow A'}$
Mp $\equiv$	$\mathbf{A \rightarrow A' \equiv B \rightarrow B',\ A \rightarrow A' \vdash B \rightarrow B'}$
Red$\cdot$	$\mathbf{AB \vdash A.} \qquad \mathbf{AB \vdash B}$
Imp$\cdot$	$\mathbf{A - B \rightarrow C \vdash AB \rightarrow C}$
Imp $\rightarrow$	$\mathbf{AB \rightarrow C - (A - B) \vdash A - B \rightarrow C - (A - B)}$

$$\mathbf{Mp1\cdot} \quad \mathbf{A \rightarrow B,\ AB \rightarrow A - C \vdash A \rightarrow C}$$
$$\mathbf{Mp2\cdot} \quad \mathbf{A \rightarrow C,\ AC \rightarrow AB - D \vdash AB \rightarrow D}$$

LD2 puede reducirse a LD1 (extendida con la regla de reducción) si se interpretan $-$ y $\rightarrow$ como $\cdot$. por lo tanto:

4. LD2 es consistente.
5. La regla de sustitución por equivalencia no es válida en LD2.
6. Los axiomas son independientes.

4. LD2 Extendida y la paradoja de Russell

El sistema LD2.1 se obtiene al extender LD2 con el axioma $\mathbf{A4}$: $\mathbf{A \rightarrow B \equiv A - B \rightarrow B}$ (este axioma está codificando en forma abstracta la paradoja de Russell), el sistema LD2.2 se obtiene al extender LD2.1 con la regla $\mathbf{Simp \equiv}$: $\mathbf{A \rightarrow B \equiv C \rightarrow D \vdash A - B \rightarrow C \rightarrow D}$, es decir,

$$\begin{aligned}
\underline{\text{LD2.1}} &= \mathbf{LD2 + A4}\\
&= \mathbf{A1, A2, A3, A4, Tran \equiv, Tran \rightarrow, Simet \equiv, Red\cdot, Imp\cdot, Imp \rightarrow,}\\
&\quad\ \mathbf{Mp \equiv, Mp1\cdot, Mp2\cdot.}\\
\underline{\text{LD2.2}} &= \mathbf{LD2.1 + Simp \equiv}\\
&= \mathbf{A1, A2, A3, A4, Tran \equiv, Tran \rightarrow, Simet \equiv, Simp \equiv, Red\cdot, Imp\cdot,}\\
&\quad\ \mathbf{Imp \rightarrow, Mp \equiv, Mp1\cdot, Mp2\cdot.}\\
\underline{\text{LD2.3}} &= \mathbf{LD2 + Simp \equiv}\\
&= \mathbf{A1, A2, A3, Tran \equiv, Tran \rightarrow, Simet \equiv, Simp \equiv, Red\cdot, Imp\cdot,}\\
&\quad\ \mathbf{Imp \rightarrow, Mp \equiv, Mp1\cdot, Mp2\cdot.}\\
\underline{\text{LD2.4}} &= \mathbf{LD2 - Mp \equiv}\\
&= \mathbf{A1, A2, A3, Tran \equiv, Tran \rightarrow, Simet \equiv, Red\cdot, Imp\cdot, Imp \rightarrow,}\\
&\quad\ \mathbf{Mp1\cdot, Mp2\cdot.}\\
\underline{\text{LD2.5}} &= \mathbf{LD2 - Imp \rightarrow}\\
&= \mathbf{A1, A2, A3, A4, Tran \equiv, Tran \rightarrow, Simet \equiv, Simp \equiv, Red\cdot, Imp\cdot,}\\
&\quad\ \mathbf{Mp \equiv, Mp1\cdot, Mp2\cdot.}
\end{aligned}$$

Traducimos las fórmulas de LD2 en el cálculo proposicional clásico, interpretando $\cdot$ como $\wedge$, $\equiv$ como $\leftrightarrow$, $\rightarrow$ y $-$ como $\rightarrow$ (a esta traducción la llamaremos en lo que sigue **Interpretación Natural**)[1]. Las traducciones de los axiomas son teoremas en el cálculo proposicional clásico, la traducción de las reglas de inferencia produce reglas clásicas que preservan validez. De lo anterior se infiere que la traducción de teoremas de LD2 produce teoremas clásicos, como en general la traducción de $A \rightarrow B$ no es un teorema clásico, tenemos que LD2 no demuestra todas las fórmulas de la forma $A \rightarrow B$ y por lo tanto,

7. LD2 es $\rightarrow$ consistente.

Puesto que LD2.1 admite la interpretación de $\equiv$ como $\leftrightarrow$, de $\cdot$, $-$ y $\rightarrow$ como $\wedge$ en el cálculo proposicional clásico (interpretación que en lo que sigue llamaremos **Interpretación en Conjunción**)[2], tenemos que la traducción de $A \rightarrow B$ no es un teorema clásico, y así LD2 no demuestra todas las fórmulas de la forma

[1]**INTERPRETACION NATURAL**
Sean A y B fórmulas arbitrarias, a una fórmula atómica,

$$\begin{aligned} a^* &= a \\ (A \cdot B)^* &= A^* \wedge B^* \\ (A \equiv B)^* &= A^* \leftrightarrow B^* \\ (A \rightarrow B)^* &= A^* \rightarrow B^* \\ (A - B)^* &= A^* \rightarrow B^* \\ (A \vdash B)^* &= A^* \vdash_{\text{cls}} B^* \end{aligned}$$

Obtenemos la siguiente interpretación de los axiomas y reglas de inferencia:
(escribimos A, B, C, D en vez de A^*, B^*, c^*, D^* y $\vdash$ en vez de $\vdash_{\text{clas}}$)
(A1)* : $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow B))$ **(A1a)*** : $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow B))$
(A1b)* : $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$ **(A2)*** : $((A \wedge B) \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
(A2a)* : $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$ **(A2b)*** : $((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
(A3)* : $(A \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$ **(A3a)*** : $(A \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$
(A3b)* : $((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C))$ **(A4)*** : $(A \rightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$
(A4a)* : $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$ **(A4b)*** : $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
(Tran $\equiv$)* : $(A \rightarrow A') \leftrightarrow (B \rightarrow B'), (B \rightarrow B') \leftrightarrow (C \rightarrow C') \vdash (A \rightarrow A') \leftrightarrow (C \rightarrow C')$
(Tran $\rightarrow$)* : $A \rightarrow B,\ B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$
(Simet $\equiv$)* : $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (C \rightarrow D) \vdash (C \rightarrow D) \leftrightarrow (A \rightarrow B)$
(Simp $\equiv$)* : $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (C \rightarrow D) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow D)$
(Red$\cdot$)* : $A \wedge B \vdash A$ $A \wedge B \vdash B$
(Imp $\rightarrow$)* : $(A \wedge B) \rightarrow (C \rightarrow (A \rightarrow B)) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow (A \rightarrow B))$
(Imp$\cdot$)* : $(A \rightarrow B) \rightarrow C \vdash (A \wedge B) \rightarrow C$
(Mp $\equiv$)* : $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (C \rightarrow D), A \rightarrow B \vdash C \rightarrow D$
(Mp $\rightarrow$)* : $A \rightarrow B, (A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow D) \vdash C \rightarrow D$
(Mp1 $\rightarrow$)* : $A \rightarrow B, (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C$
(Mp2 $\rightarrow$)* : $A \rightarrow C, (A \rightarrow C) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow D) \vdash (A \wedge B) \rightarrow D$
(Mp3 $\equiv$)* : $A \rightarrow B, (A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C$
(Mp4 $\equiv$)* : $A \rightarrow C, (A \rightarrow C) \leftrightarrow ((A \wedge B) \rightarrow D) \vdash (A \wedge B) \rightarrow D$
(Mp1$\cdot$)* : $A \rightarrow B, (A \wedge B) \rightarrow (A \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C$
(Mp2$\cdot$)* : $A \rightarrow C, (A \wedge C) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow D) \vdash (A \wedge B) \rightarrow D$.

[2]**INTERPRETACION EN CONJUNCION**

$A \to B$, por lo tanto,

8. **LD2.1 es $\to$ consistente.**
   Además,
9. **LD2.3 y LD2.4 son $\to$ consistentes** porque admiten la interpretación natural.
   Pero,
10. **LD2.2 y LD2.5 son $\to$ inconsistentes** (no son $\to$ consistentes).

Sean A y B fórmulas arbitrarias, a una fórmula atómica,

$$\begin{aligned} a^* &= a \\ (A \cdot B)^* &= A^* \wedge B^* \\ (A \equiv B)^* &= A^* \leftrightarrow B^* \\ (A \to B)^* &= A^* \wedge B^* \\ (A - B)^* &= A^* \wedge B^* \\ (A \vdash B)^* &= A^* \vdash_{\text{cls}} B^* \end{aligned}$$

Obtenemos la siguiente interpretación de los axiomas y reglas de inferencia:
(escribimos A, B, C, D en vez de A^*, B^*, c^*, D^* y $\vdash$ en vez de $\vdash_{\text{clas}}$)
(A1)* : $(A \wedge B) \leftrightarrow (A \wedge (A \wedge B))$ **(A1a)*** : $(A \wedge B) \wedge (A \wedge (A \wedge B))$
(A1b)* : $(A \wedge (A \wedge B)) \wedge (A \wedge B)$ **(A2)*** : $((A \wedge B) \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$
(A2a)* : $(A \wedge (B \wedge C)) \wedge ((A \wedge B) \wedge C)$ **(A2b)*** : $((A \wedge B) \wedge C) \wedge (A \wedge (B \wedge C))$
(A3)* : $(A \wedge ((A \wedge B) \wedge C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$ **(A3a)*** : $(A \wedge ((A \wedge B) \wedge C)) \wedge ((A \wedge B) \wedge C)$
(A3b)* : $((A \wedge B) \wedge C) \wedge (A \wedge ((A \wedge B) \wedge C))$ **(A4)*** : $(A \wedge B) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge B)$
(A4a)* : $(A \wedge B) \wedge ((A \wedge B) \wedge B)$ **(A4b)*** : $((A \wedge B) \wedge B) \wedge (A \wedge B)$
(Tran $\equiv$)* : $(A \wedge A') \leftrightarrow (B \wedge B'), (B \wedge B') \leftrightarrow (C \wedge C') \vdash (A \wedge A') \leftrightarrow (C \wedge C')$
(Tran $\to$)* : $A \wedge B,\ B \wedge C \vdash A \wedge C$
(Simet $\equiv$)* : $(A \wedge B) \leftrightarrow (C \wedge D) \vdash (C \wedge D) \leftrightarrow (A \wedge B)$
(Simp $\equiv$)* : $(A \wedge B) \leftrightarrow (C \wedge D) \vdash (A \wedge B) \wedge (C \wedge D)$
(Red$\cdot$)* : $A \wedge B \vdash A$ $\quad A \wedge B \vdash B$
(Imp $\to$)* : $(A \wedge B) \wedge (C \wedge (A \wedge B)) \vdash (A \wedge B) \wedge (C \wedge (A \wedge B))$
(Imp$\cdot$)* : $(A \wedge B) \wedge C \vdash (A \wedge B) \wedge C$
(Mp $\equiv$)* : $(A \wedge B) \leftrightarrow (C \wedge D), A \wedge B \vdash C \wedge D$
(Mp $\to$)* : $A \wedge B, (A \wedge B) \wedge (C \wedge D) \vdash C \wedge D$
(Mp1 $\to$)* : $A \wedge B, (A \wedge B) \wedge (A \wedge C) \vdash A \wedge C$
(Mp2 $\to$)* : $A \wedge C, (A \wedge C) \wedge ((A \wedge B) \wedge D) \vdash (A \wedge B) \wedge D$
(Mp3 $\equiv$)* : $A \wedge B, (A \wedge B) \leftrightarrow (A \wedge C) \vdash A \wedge C$
(Mp4 $\equiv$)* : $A \wedge C, (A \wedge C) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge D) \vdash (A \wedge B) \wedge D$
(Mp1$\cdot$)* : $A \wedge B, (A \wedge B) \wedge (A \wedge C) \vdash A \wedge C$
(Mp2$\cdot$)* : $A \wedge C, (A \wedge C) \wedge ((A \wedge B) \wedge D) \vdash (A \wedge B) \wedge D$.

Prueba:

1. $\mathbf{A \to B \equiv A - B \to B}$	$A4$
2. $\mathbf{A - B \to A - B - B}$	Simp $\equiv$ en 1
3. $\mathbf{A - B \to A - B - B \equiv A - B \to B}$	$A1$
4. $\mathbf{A - B \to B}$	Mp $\equiv$ entre 2 y 3
5. $\mathbf{A - B \to B \equiv A \to B}$	Simet $\equiv$ en 1
6. $\mathbf{A \to B}$	Mp $\equiv$ entre 4 y 5

Con el fin de evitar este tipo de inconsistencia, construimos nuevos sistemas debilitando Mp $\equiv$.

5. Nuevos sistemas de lógica diagonal

Buscamos sistemas → consistentes que contengan A4 y Simp $\equiv$.

5.1 Sistema de lógica diagonal LD3

$$\begin{aligned}
&\underline{\mathbf{LD3}} = \mathbf{LD2.3 - Red \cdot -Imp \to -Mp1 \cdot -Mp2 \cdot}\\
&\quad = \mathbf{A1, A2, A3, Tran \equiv, Tran \to, Simet \equiv, Simp \equiv, Mp \equiv .}\\
&\underline{\mathbf{LD3.1}} = \mathbf{LD3 - Simp \equiv}\\
&\quad = \mathbf{A1, A2, A3, Tran \equiv, Tran \to, Simet \equiv, Mp \equiv .}\\
&\underline{\mathbf{LD3.2}} = \mathbf{LD3 - Mp \equiv +Mp1 \to +Mp2 \to}\\
&\quad = \mathbf{A1, A2, A3, Tran \equiv, Tran \to, Simet \equiv, Simp \equiv, Mp1 \to,}\\
&\quad\quad \mathbf{Mp2 \to .}
\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Mp1 \to :} \quad && \mathbf{A \to B,\ A - B \to A - C \vdash A \to C}\\
&\mathbf{Mp2 \to :} \quad && \mathbf{A \to C, A - C \to AB - D \vdash AB \to D}
\end{aligned}$$

El sistema LD3.3 se obtiene de LD3.2 cambiando los axiomas por sus consecuencias al utilizar la regla simp$\equiv$ y eliminando las reglas simp$\equiv$, simet$\equiv$ y tran$\equiv$:

$$\begin{aligned}
&\underline{\mathbf{LD3.3}} = \mathbf{LD3.2 \equiv}\\
&\quad = \mathbf{A1a, A1b, A2a, A2b, A3a, A3b, Tran \to, Mp1 \to, Mp2 \to .}
\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A1a:}\quad & \mathbf{A - (A - B) \to A - B}\\
\mathbf{A1b:}\quad & \mathbf{A - B \to A - (A - B)}\\
\mathbf{A2a:}\quad & \mathbf{AB - C \to A - (B - C)}\\
\mathbf{A2b:}\quad & \mathbf{A - (B - C) \to AB - C}\\
\mathbf{A3a:}\quad & \mathbf{A - (AB - C) \to AB - C}\\
\mathbf{A3b:}\quad & \mathbf{AB - C \to A - (AB - C)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\text{LD3.4}} &= \mathbf{LD3.3Mp1 \to -Mp2 \to +Mp1 \cdot +Mp2 \cdot +Imp\cdot}\\
&= \mathbf{A1a, A1b, A2a, A2b, A3a, A3b, Tran \to, Mp1\cdot, Mp2\cdot, Imp\cdot}
\end{aligned}$$

Observamos que

11. **LD3, LD3.1, LD3.2, LD3.3 y LD3.4 son → consistentes** puesto que admiten la interpretación natural.
    Como LD3, LD3.1, LD3.2, LD3.3 y LD3.4 son reducciones de LD2.3, podemos asegurar que
12. **En LD3, LD3.1, LD3.2, LD3.3 y LD3.4 los axiomas son independientes.**

5.2 Sistema de lógica diagonal LD4

Construimos el sistema LD4 agregando el axioma A4: $A \to B \equiv A - B \to B$ a LD3.

$$\begin{aligned}
\underline{\text{LD4}} &= \mathbf{LD3 + A4}\\
&= \mathbf{A1, A2, A3, A4, Tran \equiv, Tran \to, Simet \equiv, Simp \equiv, Mp \equiv .}\\
\underline{\text{LD4.1}} &= \mathbf{LD4 - Simp \equiv}\\
&= \mathbf{A1, A2, A3, A4, Tran \equiv, Tran \to, Simet \equiv, Mp \equiv .}
\end{aligned}$$

Observamos que al contrario de LD3 y LD3.1, los sistemas LD4 y LD4.1 no admiten la interpretación natural, puesto que la traducción de A4: $A \to B \leftrightarrow (A \to B) \to B$ no es teorema clásico, tenemos así que

13. **A4 es independiente en LD4 y en LD4.1.**
    Los sistemas LD3.1 y LD4.1 admiten la interpretación en conjunción, al contrario de LD3 y LD4 ya que la traducción de Simp≡: $A \wedge B \leftrightarrow C \wedge D \vdash A \wedge B \wedge C \wedge D$ no es una regla clásicamente válida, es decir
14. **Simp≡ es independiente en LD3 y en LD4.**
    Por otro lado, la prueba de → inconsistencia de LD2.2 vale en LD4, por lo que

15. LD4 es → inconsistente (no es → consistente).
Pero

16. LD4.1 es → consistente ya que admite la interpretación en conjunción.

5.3 Modus Ponens en LD3.0

Construimos el sistema LD3.0 eliminando Mp≡ de LD3, LD3.0 es el sistema base para estudiar las reglas de modus ponens Mp≡, Mp→, Mp1→, Mp2→, Mp1·, Mp2·, Mp3≡ y Mp4≡.

$$\underline{\mathbf{LD3.0}} = \mathbf{LD3Mp} \equiv .$$
$$= \mathbf{A1, A2, A3, Tran} \equiv, \mathbf{Tran} \rightarrow, \mathbf{Simet} \equiv, \mathbf{Simp} \equiv .$$

$\mathbf{Mp} \equiv :$	$\mathbf{A \rightarrow B, A \rightarrow B \equiv C \rightarrow D \vdash C \rightarrow D}$
$\mathbf{Mp} \rightarrow :$	$\mathbf{A \rightarrow B, A - B \rightarrow C - D \vdash C \rightarrow D}$
$\mathbf{Mp1} \rightarrow :$	$\mathbf{A \rightarrow B, A - B \rightarrow A - C \vdash A \rightarrow C}$
$\mathbf{Mp2} \rightarrow :$	$\mathbf{A \rightarrow C, A - C \rightarrow AB - D \vdash AB \rightarrow D}$
$\mathbf{Mp3} \equiv :$	$\mathbf{A \rightarrow B, A \rightarrow B \equiv A \rightarrow C \vdash A \rightarrow C}$
$\mathbf{Mp4} \equiv :$	$\mathbf{A \rightarrow C, A \rightarrow C \equiv AB \rightarrow D \vdash AB \rightarrow D}$

Obtenemos las siguientes conexiones:
Notación: $\vdash R$ significa que la regla R es derivada en el sistema LD3.0.

17. $\vdash$ Mp1 → sii $\vdash$ Mp3 ≡

Prueba:

1. $A \rightarrow B$	Premisa
2. $A - B \rightarrow A - C$	Premisa
3. $A \rightarrow B \equiv A \rightarrow A - B$	A1 y Simet ≡
4. $A \rightarrow A - B$	Mp3≡ entre 1 y 3
5. $A \rightarrow A - C$	Tran→ entre 4 y 2
6. $A \rightarrow A - C \equiv A \rightarrow C$	A1
7. $A \rightarrow C$	Mp3≡ entre 5 y 6

1. $A \rightarrow B$	Premisa
2. $A \rightarrow B \equiv A \rightarrow C$	Premisa
3. $A - B \rightarrow A - C$	Simp≡ en 2
4. $A \rightarrow C$	Mp1→ entre 1 y 3

18. Si $\vdash$ Mp3$\equiv$ y $\vdash$ Mp4$\equiv$ entonces $\vdash$ Mp2$\rightarrow$
Prueba:

1. $A \rightarrow C$	Premisa
2. $A - C \rightarrow AB - D$	Premisa
3. $A \rightarrow C \equiv A \rightarrow A - C$	A1 y Simet $\equiv$
4. $A \rightarrow A - C$	Mp3$\equiv$ entre 1 y 3
5. $A \rightarrow AB - D$	Tran$\rightarrow$ entre 4 y 2
6. $A \rightarrow AB - D \equiv AB \rightarrow D$	A3
7. $AB \rightarrow D$	Mp4$\equiv$ entre 5 y 6

19. $\vdash$ Mp2$\rightarrow$ implica $\vdash$ Mp4$\equiv$
Prueba:

1. $A \rightarrow C$	Premisa
2. $A \rightarrow C \equiv AB \rightarrow D$	Premisa
3. $A - C \rightarrow AB - D$	Simp$\equiv$ en 2
4. $AB \rightarrow D$	Mp2$\rightarrow$ entre 1 y 3

Podemos concluir que
20. $\vdash$ Mp1$\rightarrow$ y $\vdash$ Mp2$\rightarrow$ sii $\vdash$ Mp3$\equiv$ y $\vdash$ Mp4$\equiv$
Como Mp3$\equiv$ y Mp4$\equiv$ son formas débiles de Mp$\equiv$, tenemos
21. $\vdash$ Mp$\equiv$ implica $\vdash$ Mp1$\rightarrow$ y $\vdash$ Mp2$\rightarrow$ y $\vdash$ Mp3$\equiv$ y $\vdash$ Mp4$\equiv$

Con base en los resultados anteriores, buscamos construir sistemas un poco mas débiles que LD4 que sean $\rightarrow$ consistentes.

Podemos observar que la prueba dada de $\rightarrow$ inconsistencia de LD4 no es válida si cambiamos Mp $\equiv$ por Mp $\rightarrow$ 1 y Mp2 $\rightarrow$ o por Mp3$\equiv$ y Mp4$\equiv$. Conjeturamos que este debilitamiento de LD4 es $\rightarrow$ consistente. Continuamos entonces la construcción de lógicas diagonales a fin de estudiar esta conjetura.

5.4 Sistemas de lógica diagonal LD5

El sistema LD5 se obtiene cambiando en LD4 la regla Mp$\equiv$ por las reglas Mp1$\rightarrow$ y Mp2$\rightarrow$:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{LD5}} &= \mathbf{LD4} - \mathbf{Mp} \equiv + \mathbf{Mp1} \rightarrow + \mathbf{Mp2} \rightarrow \\ &= \mathbf{LD3} + \mathbf{A4} - \mathbf{Mp} \equiv + \mathbf{Mp1} \rightarrow + \mathbf{Mp2} \rightarrow \\ &= \mathbf{LD3.2} + \mathbf{A4} \\ &= \mathbf{A1, A2, A3, A4, Tran} \equiv, \mathbf{Tran} \rightarrow, \mathbf{Simet} \equiv, \mathbf{Simp} \equiv, \mathbf{Mp1} \rightarrow, \\ &\quad \mathbf{Mp2} \rightarrow .\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\underline{\mathbf{LD5.1}} &= \mathbf{LD5 - Simp} \equiv \\
&= \mathbf{LD4.1 - Mp \equiv +Mp1 \rightarrow +Mp2 \rightarrow} \\
&= \mathbf{A1, A2, A3, A4, Tran \equiv, Tran \rightarrow, Simet \equiv, Mp1 \rightarrow, Mp2 \rightarrow}
\end{aligned}
$$

Puesto que LD5 y LD5.1 son mas débiles que LD4, tenemos que:

22. Simp≡ es independiente en LD5 y no es derivada en LD5.1.

23. A4 es independiente en LD5 y en LD5.1

Además,

24. LD5.1 es → consistente puesto que admite la interpretación en conjunción.

5.5 Sistema de lógica diagonal LD6

El sistema LD6 se obtiene de LD5 cambiando los axiomas por sus consecuencias al utilizar la regla simp≡ y eliminando las reglas simp≡, simet≡ y tran≡:

$$
\begin{aligned}
\underline{\mathbf{LD6}} &= \mathbf{LD5} - \equiv \\
&= \mathbf{A1a, A1b, A2a, A2b, A3a, A3b, A4a, A4b, Tran \rightarrow, Mp1 \rightarrow,} \\
&\quad \mathbf{Mp2 \rightarrow} .
\end{aligned}
$$

Donde

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A4a}: &\quad A - B \rightarrow A - B - B \\
\mathbf{A4b}: &\quad A - B - B \rightarrow A - B
\end{aligned}
$$

LD6 admite la siguiente interpretación: $-$ y $\cdot$ como $\wedge$, $\rightarrow$ como $\rightarrow$ en el cálculo proposicional clásico (en lo que sigue llamaremos a esta lectura **Interpretación en Implicación-Conjunción**)[3], por lo tanto:

25. LD6 es → consistente.

---

[3]INTERPRETACION EN IMPLICACION CONJUNCION

Sean A y B fórmulas arbitrarias, a una fórmula atómica,

$$
\begin{aligned}
a^* &= a \\
(A \cdot B)^* &= A^* \wedge B^* \\
(A \equiv B)^* &= A^* \leftrightarrow B^* \\
(A \rightarrow B)^* &= A^* \wedge B^* \\
(A - B)^* &= A^* \wedge B^* \\
(A \vdash B)^* &= A^* \vdash_{\mathrm{cls}} B^*
\end{aligned}
$$

Obtenemos la siguiente interpretación de los axiomas y reglas de inferencia: (escribimos A, B, C, D en vez de A^*, B^*, c^*, D^* y $\Box$ en vez de $\Box_{\mathrm{clas}}$)

26. **LD5 es $\rightarrow$ consistente** ya que si no lo fuese, entonces existiría una prueba $P = P1, \ldots, Pn$ con algún $Pk = A4$ y algún $Pt =$ Simp$\equiv$ y $Pn = A \rightarrow B$ para A y B arbitrarios, si en tal prueba cambiamos los axiomas de LD5 por los correspondientes axiomas de LD6 y las fórmulas $A \rightarrow B \equiv C \rightarrow D$ por $A - B \rightarrow C - D$ y $C - D \rightarrow A - B$, tendríamos que Tran$\equiv$ se reduce a Tran$\rightarrow$, Simet$\equiv$ se reduce a la elección de las formas a ó b de los axiomas de LD6, Simp$\equiv$ no tiene aplicación puesto que en la prueba no figura $\equiv$. Tendríamos entonces una prueba P' cuyo último paso es $A \rightarrow B$ para A y B arbitrarios, es decir, tendríamos una prueba de la $\rightarrow$ inconsistencia de LD6, lo cual sabemos es imposible.

En LD2, LD2.1, LD2.2, LD2.3 y LD2.4 además de la regla Imp$\cdot$ tenemos otras formas del Modus Ponens:

$$\begin{aligned} \textbf{Mp1}\cdot: &\quad A \rightarrow B,\ AB \rightarrow A - C \vdash A \rightarrow C \\ \textbf{Mp2}\cdot: &\quad A \rightarrow B,\ AB \rightarrow AC - D \vdash AC \rightarrow D \\ \textbf{Imp}\cdot: &\quad A - B \rightarrow C \vdash AB \rightarrow C \end{aligned}$$

Como consecuencia inmediata tenemos que

27. **En LD2, LD2.1, LD2.2, LD2.3 y LD2.4 las reglas Mp1$\rightarrow$, Mp2$\rightarrow$, Mp3$\equiv$ y Mp4$\equiv$ son derivadas.**

(A1)* : $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow (A \wedge B))$ **(A1a)*** : $(A \wedge B) \rightarrow (A \wedge (A \wedge B))$
(A1b)* : $(A \wedge (A \wedge B)) \rightarrow (A \wedge B)$ **(A2)*** : $((A \wedge B) \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \wedge C))$
(A2a)* : $(A \wedge (B \wedge C)) \rightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$ **(A2b)*** : $((A \wedge B) \wedge C) \rightarrow (A \wedge (B \wedge C))$
(A3)* : $(A \rightarrow ((A \wedge B) \wedge C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$ **(A3a)*** : $(A \wedge ((A \wedge B) \wedge C)) \rightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$
(A3b)* : $((A \wedge B) \wedge C) \rightarrow (A \wedge ((A \wedge B) \wedge C))$ **(A4)*** : $(A \rightarrow B) \leftrightarrow ((A \wedge B) \rightarrow B)$
(A4a)* : $(A \wedge B) \rightarrow ((A \wedge B) \wedge B)$ **(A4b)*** : $((A \wedge B) \wedge B) \rightarrow (A \wedge B)$
(Tran $\equiv$)* : $(A \rightarrow A') \leftrightarrow (B \rightarrow B'), (B \rightarrow B') \leftrightarrow (C \rightarrow C') \vdash (A \rightarrow A') \leftrightarrow (C \rightarrow C')$
(Tran $\rightarrow$)* : $A \rightarrow B,\ B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$
(Simet $\equiv$)* : $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (C \rightarrow D) \vdash (C \rightarrow D) \leftrightarrow (A \rightarrow B)$
(Simp $\equiv$)* : $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (C \rightarrow D) \vdash (A \wedge B) \rightarrow (C \wedge D)$
(Red$\cdot$)* : $A \wedge B \vdash A$ $\qquad A \wedge B \vdash B$
(Imp $\rightarrow$)* : $(A \wedge B) \rightarrow (C \wedge (A \wedge B)) \vdash (A \wedge B) \rightarrow (C \wedge (A \wedge B))$
(Imp$\cdot$)* : $(A \wedge B) \rightarrow C \vdash (A \wedge B) \rightarrow C$
(Mp $\equiv$)* : $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (C \rightarrow D), A \rightarrow B \vdash C \rightarrow D$
(Mp $\rightarrow$)* : $A \rightarrow B, (A \wedge B) \rightarrow (C \wedge D) \vdash C \rightarrow D$
(Mp1 $\rightarrow$)* : $A \rightarrow B, (A \wedge B) \rightarrow (A \wedge C) \vdash A \rightarrow C$
(Mp2 $\rightarrow$)* : $A \rightarrow C, (A \wedge C) \rightarrow ((A \wedge B) \wedge D) \vdash (A \wedge B) \rightarrow D$
(Mp3 $\equiv$)* : $A \rightarrow B, (A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C$
(Mp4 $\equiv$)* : $A \rightarrow C, (A \rightarrow C) \leftrightarrow ((A \wedge B) \rightarrow D) \vdash (A \wedge B) \rightarrow D$
(Mp1$\cdot$)* : $A \rightarrow B, (A \wedge B) \rightarrow (A \wedge C) \vdash A \rightarrow C$
(Mp2$\cdot$)* : $A \rightarrow C, (A \wedge C) \rightarrow ((A \wedge B) \wedge D) \vdash (A \wedge B) \rightarrow D.$

Prueba de Mp1$\rightarrow$:

1. $A \rightarrow B$	Premisa
2. $A - B \rightarrow A - C$	Premisa
3. $AB \rightarrow A - C$	Imp$\cdot$ en 2
4. $A \rightarrow C$	Mp1$\cdot$ entre 1 y 3

Las pruebas Mp2$\rightarrow$, Mp3$\equiv$ y Mp4$\equiv$ son similares.

5.6 Sistema de lógica diagonal LD7

Con base en lo anterior, construimos el sistema LD7, eliminando Mp$\equiv$ e Imp$\rightarrow$ de LD2 y agregando A4 y Simp$\equiv$, es decir, cambiando en LD5 MP1$\rightarrow$ por Mp1$\cdot$ y MP2$\rightarrow$ por Mp2$\cdot$ y agregando las reglas Red$\cdot$ e Imp$\cdot$:

$$\begin{aligned}
\underline{\textbf{LD7}} &= \textbf{LD5} - \textbf{Mp1} \rightarrow -\textbf{Mp2} \rightarrow +\textbf{Mp1} \cdot +\textbf{Mp2} \cdot +\textbf{Red} \cdot +\textbf{Imp}\cdot \\
&= \textbf{LD2} - \textbf{Mp} \equiv +\textbf{A4} + \textbf{Simp} \equiv -\textbf{Imp} \rightarrow \\
&= \textbf{LD2.1} - \textbf{Mp} \equiv +\textbf{Simp} \equiv -\textbf{Imp} \rightarrow \\
&= \textbf{LD2.4} + \textbf{A4} + \textbf{Simp} \equiv -\textbf{Imp} \rightarrow \\
&= \textbf{A1}, \textbf{A2}, \textbf{A3}, \textbf{A4}, \textbf{Tran} \equiv, \textbf{Tran} \rightarrow, \textbf{Simet} \equiv, \textbf{Simp} \equiv, \textbf{Mp1}\cdot, \\
&\quad \textbf{Mp2}\cdot, \textbf{Red}\cdot, \textbf{Imp}\cdot. \\
\underline{\textbf{LD7.1}} &= \textbf{LD7A4} \\
&= \textbf{A1}, \textbf{A2}, \textbf{A3}, \textbf{Tran} \equiv, \textbf{Tran} \rightarrow, \textbf{Simet} \equiv, \textbf{Simp} \equiv, \textbf{Mp1}\cdot, \textbf{Mp2}\cdot, \\
&\quad \textbf{Red}\cdot, \textbf{Imp}\cdot. \\
\underline{\textbf{LD7.2}} &= \textbf{LD7} - \textbf{Simp} \equiv \\
&= \textbf{A1}, \textbf{A2}, \textbf{A3}, \textbf{A4}, \textbf{Tran} \equiv, \textbf{Tran} \rightarrow, \textbf{Simet} \equiv, \textbf{Mp1}\cdot, \textbf{Mp2}\cdot, \textbf{Red}\cdot, \\
&\quad \textbf{Imp}\cdot.
\end{aligned}$$

Tenemos que:

28. **LD7.1 es $\rightarrow$ consistente** ya que admite la interpretación natural.
29. **LD7.2 es $\rightarrow$ consistente** ya que admite la interpretación en conjunción.
30. **A4 es independiente en LD7** puesto que al contrario de LD7.1, A4 no admite la interpretación natural.
31. **Simp $\equiv$ es independiente en LD7** puesto que al contrario de LD7.2, Simp$\equiv$ no admite la interpretación en conjunción.

5.7 Sistema de lógica diagonal LD8

Construimos el sistema LD8 cambiando Mp1→ y Mp2→ en LD6 por Mp1· y Mp2· y además agregando las reglas Red· e Imp·:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{LD8}} &= \mathbf{LD6 - Mp1 \rightarrow -Mp2 \rightarrow +Mp1 \cdot +Mp2 \cdot +Red \cdot +Imp\cdot}\\ &= \mathbf{A1a, A1b, A2a, A2b, A3a, A3b, A4a, A4b, Tran \rightarrow, Mp1\cdot, Mp2\cdot,}\\ &\quad \mathbf{Red\cdot, Imp \cdot .}\end{aligned}$$

Tenemos que:

32. LD8 es → consistente ya que admite la interpretación en implicación-conjunción.

33. LD7 es → consistente, para probarlo utilizamos la misma técnica que se utilizó para probar la → consistencia de LD5, basta cambiar en dicha prueba LD5 por LD7 y LD6 por LD8.

Por otro lado, puesto que LD4 es → inconsistente y LD5 es → consistente tenemos que

34. **⊢ Mp1 →, ⊢ Mp2 →, ⊢ Mp3 ≡ y ⊢ Mp4 ≡ no implican ⊢ Mp ≡**, es decir, no vale el recíproco de 21.

Además como LD2.5 es → inconsistente y LD7 es → inconsistente, tenemos que

35. Mp ≡ no es derivada en LD7.

Concluimos así que

36. ⊢ Mp1→, ⊢ Mp2→, ⊢ Mp3≡, ⊢ Mp4≡, ⊢ Mp1· y ⊢ Mp2·, no implican ⊢ Mp≡, es decir, Mp≡ es estrictamente mas fuerte que Mp1→, Mp2→, Mp3≡, Mp4≡, Mp1· y Mp2· en LD3.0.

5.8 Sistema de lógica diagonal LD9

Construimos el sistema LD9 cambiando en LD7 Mp1· y Mp2· por Mp1→ y Mp2→:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{LD9}} &= \mathbf{LD7 - Mp1 \cdot -Mp2 \cdot +Mp1 \rightarrow +Mp2 \rightarrow}\\ &\quad \mathbf{LD2 + A4 - Mp \equiv -Mp1 \cdot -Mp2 \cdot +Mp1 \rightarrow +Mp2 \rightarrow -}\\ &\quad \mathbf{Imp \rightarrow +Simp \equiv}\\ &\quad \mathbf{A1, A2, A3, A4, Tran \equiv, Tran \rightarrow, Simet \equiv, Simp \equiv, Mp1 \rightarrow,}\\ &\quad \mathbf{Mp2 \rightarrow, Red\cdot, Imp \cdot .}\\ \underline{\mathbf{LD9.1}} &= \mathbf{LD9 - A4}\\ &= \mathbf{A1, A2, A3, Tran \equiv, Tran \rightarrow, Simet \equiv, Simp \equiv, Mp1 \rightarrow,}\\ &\quad \mathbf{Mp2 \rightarrow, Red\cdot, Imp \cdot .}\\ \underline{\mathbf{LD9.2}} &= \mathbf{LD9 - Simp \equiv}\\ &= \mathbf{A1, A2, A2, A4, Tran \equiv, Tran \rightarrow, Simet \equiv, Mp1 \rightarrow, Mp2 \rightarrow,}\\ &\quad \mathbf{Red\cdot, Imp \cdot .}\end{aligned}$$

Podemos observar que

37. **LD9.1 es → consistente** puesto que admite la interpretación natural.
38. **A4 es independiente en LD9** ya que LD9.1 admite la interpretación natural y A4 no la admite
39. **LD9.2 es → consistente** puesto que admite la interpretación en conjunción.
40. **Simp≡ es independiente en LD9** ya que LD9.2 admite la interpretación en conjunción y Simp≡ no la admite.

5.9 Sistema de lógica diagonal LD10

Construimos el sistema LD10 cambiando en LD8 Mp1· y Mp2· por Mp1→ y Mp2→:

$$\underline{\mathrm{LD10}} = \mathbf{LD8 - Mp1\cdot - Mp2\cdot + Mp1 \rightarrow + Mp2 \rightarrow}$$
$$= \mathbf{A1a, A1b, A2a, A2b, A3a, A3b, A4a, A4b, Tran \rightarrow, Mp1 \rightarrow, Mp2 \rightarrow, Red\cdot, Imp\cdot}.$$

41. **LD10 es → consistente** puesto que admite la interpretación en implicación-conjunción.
42. **LD9 es → consistente** para probarlo utilizamos la misma técnica que se utilizó para probar la → consistencia de LD5, basta cambiar en dicha prueba LD5 por LD9 y LD6 por LD10.

6. Resumen

6.1 Sistemas de deductivos LD1, …, LD10

Ax1 : AB≡ A(AB)	A1: A→ B≡ A → A-B	A1a : A-B → A-(A-B)
A1b : A-(A-B) → A-B	Ax2 : ABC≡A(BC)	A2 : AB→C≡A→B-C
A2a : A-(B-C) → AB-C	A2b : AB-C → A-(B-C)	Ax3 : A(ABC) ≡ ABC
A3 : A→AB-C≡AB→C	A3a : A-(AB-C)→AB-C	A3b :AB-C→A-(AB-C)
Ax4 : AB≡ ABB	A4 : A→ B≡ A-B→ B	A4a : A-B→ (A-B)-B
A4b : (A-B)-B→ A-B		

6.2 Reglas de inferencia

Tran ≡ : $A\to A' \equiv B\to B', B\to B' \equiv C\to C' \vdash A\to A \equiv C\to C$

Tran → : $A\to B, B\to C \vdash A\to C$

Simet ≡ : $A\to B \equiv C\to D \vdash C\to D \equiv A\to B$

Simp ≡ : $A\to B \equiv C\to D \vdash A\text{-}B\to C\text{-}D$

Imp → : $AB\to C\text{-}(A\text{-}B) \vdash A\text{-}B\to C\text{-}(A\text{-}B)$

Mp ≡ : $A\to B \equiv C\to D, A\to B \vdash C\to D$

Mp1 → : $A\to B, A\text{-}B\to A\text{-}C \vdash A\to C$

Mp3 ≡ : $A\to B, A\to B \equiv A\to C \vdash A\to C$

Mp1· : $A\to B, AB\to A\text{-}C \vdash A\to C$

Tran1 : $AB, BC \vdash AC$

Simet : $AB \equiv CD \vdash CD \equiv AB$

Red· : $AB \vdash A \quad AB \vdash B$

Imp· : $A\text{-}B\to C \vdash AB\to C$

Mp → : $A\to B, A\text{-}B\to C\text{-}D \vdash C\to D$

Mp2 → : $A\to C, A\text{-}C\to AB\text{-}D \vdash AB\to D$

Mp4 ≡ : $A\to C, A\to C \equiv AB\to D \vdash AB\to$

Mp2· : $A\to C, AC\to AB\text{-}D \vdash AB\to D$.

6.3 Sistemas deductivos

LD1 = Ax1, Ax21, Ax3, Tran1, Tran2, Mp, Simet.
LD2= A1, A2, A3, Tran≡, Tran→, Simet≡, Red·, Imp·, Imp→, Mp≡, Mp1·, Mp2·.
LD2.1= A1, A2, A3, A4, Tran≡, Tran→, Simet≡, Red·, Imp·, Imp→, Mp≡, Mp1·, MP2·.
LD2.2= A1, A2, A3, A4, Tran≡, Tran→, Simet≡, Simp≡, Red·, Imp·, Imp→, Mp≡, Mp1·, Mp2·.
LD2.3= A1, A2, A3, Tran≡, Tran→, Simet≡, Simp≡, Red·, Imp·, Imp→, Mp≡, Mp1·, Mp2·.
LD2.4= A1, A2, A3, Tran≡, Tran→, Simet≡, Red·, Imp·, Imp→, Mp1·, Mp2·.
LD2.5= A1, A2, A3, Tran≡, Tran→, Simet≡, Simp≡, Red·, Imp·, Imp≡, Mp1·, Mp2·.
LD3= A1, A2, A3, Tran≡, Tran→, Simet≡, Simp≡, Mp≡.
LD3.0= A1, A2, A3, Tran≡, Tran→, Simet≡, Simp≡.
LD3.1= A1, A2, A3, Tran≡, Tran→, Simet≡, Mp≡.
LD3.2= A1, A2, A3, Tran≡, Tran→, Simet≡, Simp≡, Mp1→, Mp2→.
LD3.3= A1a, A2a, A3a, A1b, A2b, A3b, Tran→, Mp1→, Mp2→.
LD3.4= A1a, A2a, A3a, A1b, A2b, A3b, Tran→, Mp1·, Mp2·, Imp·.
LD4= A1, A2, A3, A4, Tran≡, Tran→, Simet≡, Simp≡, Mp≡.
LD4.1= A1, A2, A3, A4, Tran≡, Tran→, Simet≡, Mp≡.
LD5= A1, A2, A3, A4, Tran≡, Tran→, Simet≡, Simp≡, Mp1→, Mp2→.
LD5.1= A1, A2, A3, A4, Tran≡, Tran→, Simet≡, Mp1→, Mp2→.
LD6= A1a, A1b, A2a, A2b, A3a, A3b, A4a, A4b, Tran→, Mp1→, Mp2→.
LD6.1= A1a, A1b, A2a, A2b, A3a, A3b, Tran→, Mp1→, Mp2→.
LD7= A1, A2, A3, A4, Tran≡, Tran→, Simet≡, Simp≡, Mp1·, Mp2· + Red· + Imp·.
LD7.1= A1, A2, A3, Tran≡, Tran→, Simet≡, Simp≡, Mp1·, Mp2· + Red· + Imp·.
LD7.2= A1, A2, A3, A4, Tran≡, Tran→, Simet≡, Mp1·, Mp2· + Red· + Imp·.
LD8= A1a, A1b, A2a, A2b, A3a, A3b, A4a, A4b, Tran→, Mp1·, Mp2·, Red·,

Imp·.
LD9= A1, A2, A3, A4, Tran≡, Tran→, Simet≡, Simp≡, Mp1→, Mp2→, Red·, Imp·.
LD9.1= A1, A2, A3, Tran≡, Tran→, Simet≡, Simp≡, Mp1→, Mp2→, Red·, Imp·.
LD9.2= A1, A2, A3, A4, Tran≡, Tran→, Simet≡, Mp1→, Mp2→, Red·, Imp·.
LD10= A1a, A1b, A2a, A2b, A3a, A3b, A4a, A4b, Tran→, Mp1→, Mp2→, Red·, Imp·.

Referencias

1. M. Sierra, *Lógica Diagonal*, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, 1996.
2. M. Sierra, *Lógica Diagonal*, Boletín de Matemáticas, Nueva Serie **III** (1996), no. 2.