

COMPACIDAD COMPENSADA APLICADA A UN GAS POLITRÓPICO

ANA LUZ VIVAS
LEONARDO RENDÓN(*)

Resumen. En este artículo se considera un teorema de convergencia para el sistema de los gases isentrópicos, usando la teoría de la compacidad compensada.

Abstract. In this paper we consider a convergence theorem for the isentropic equations of gas dynamics using the theory of compensated compactness

Keywords. Compensated Compactness, Isentropic Gas, Riemann Invariants, Entropy Flux, Young Measures.

1. Introducción

En el presente artículo se usa la teoría de la *Compacidad Compensada* para hallar una solución débil del sistema

$$(1) \quad \begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p(\rho))_x &= 0, \quad p'(\rho) > 0 \end{aligned}$$

$$(2) \quad (\rho, u) \Big|_{t=0} = (\rho_0(x), u_0(x)),$$

(*)Texto recibido 11/12/99, revisado 7/03/00. Ana Luz Vivas, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia; e-mail: avivas@matematicas.unal.edu.co
Leonardo Rendón, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia; e-mail: rendon@matematicas.unal.edu.co

1991 AMS Subject Classification. Primary 35L65. Secondary 35L45.

donde $u_0, \rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ y $\rho_0(x) \geq 0$, para el caso particular en que $p(\rho) = \frac{\rho^\gamma}{\gamma}$ (gas politrópico). Este sistema representa las leyes de conservación de masa y de momento para un gas isentrópico (entropía constante). Aquí ρ es la densidad de masa, u es la velocidad y p es la presión. El sistema (1) puede ser considerado en forma matricial como

$$(3) \quad U_t + F(U)_x = 0,$$

el cual se ubica dentro de las ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

2. Preliminares

Una solución débil para (3) es una función $U(x, t) = (\rho(x, t), u(x, t))$ medible tal que U y $F(U)$ estén en $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times (0, \infty); \mathbb{R}^2)$ y

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left\{ U \frac{\partial}{\partial t} \zeta + F(U) \frac{\partial}{\partial x} \zeta \right\} dx dt + \int_{-\infty}^\infty U_0 \zeta dx = 0,$$

para toda $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$, [7], [11].

Mediante el uso del método de la viscosidad nula se encuentran soluciones aproximadas del sistema. El método consiste en perturbar el sistema $U_t + F(U)_x = 0$, obteniendo un sistema parabólico dado por

$$U_t + F(U)_x = \varepsilon U_{xx},$$

encontrar soluciones U^ε para cada valor de ε , construyendo así la sucesión $\{U^\varepsilon\}$ de soluciones aproximadas del sistema perturbado, luego extraer una subsucesión $\{U^{\varepsilon_k}\}$, que converge en la topología débil, ésto es $U^{\varepsilon_k} \rightharpoonup U$, [10].

El teorema de Tartar sobre medidas parametrizadas dice que dada una sucesión $\{U^\varepsilon\}$ uniformemente acotada en $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ entonces existe una subsucesión, que también se denota por $\{U^\varepsilon\}$, y una familia de medidas de probabilidad (medidas parametrizadas de Young) ν_x , $x \in \Omega$, definidas sobre \mathbb{R}^m tales que si $F \in C_b(\mathbb{R}^m)$ y

$$\begin{aligned} \bar{F}(x) &= \langle \nu_x, F(\lambda) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} F(\lambda) d\nu_x(\lambda), \end{aligned}$$

entonces $F(U^\varepsilon) \rightharpoonup \bar{F}$ en $L^\infty(\Omega)$ débil*, [6], [12].

Diperna demostró un gran teorema de existencia para $1 < \gamma \leq \frac{5}{3}$, con $\gamma = 1 + \frac{2}{2m+1}$ y $m \geq 1$ entero, mediante el uso del método de la viscosidad nula y la teoría de la *Compacidad Compensada* que es el caso que se analizará aquí.

El Teorema de Diperna, afirma que en el caso en que se tenga una sucesión de soluciones aproximadas $\{\rho^\epsilon, u^\epsilon\}$ tales que $\|\rho^\epsilon\|_\infty + \|u^\epsilon\|_\infty < M$, y, $\rho^\epsilon \geq 0$ entonces pasando a una subsucesión si es necesario, $\{\rho^\epsilon, u^\epsilon\}$ converge débil \rightarrow^* hacia una solución $\{\rho(x, t), u(x, t)\}$ del sistema (1), [3], [4].

Este resultado es obtenido a través de un análisis sobre el soporte de las medidas de Young asociadas a la sucesión $\{\rho^\epsilon, u^\epsilon\}$, como es usual en esta teoría. Pero específicamente el análisis de Diperna muestra que el soporte de estas medidas o se reduce a un punto o está totalmente contenido en la recta $\rho = 0$. Como las funciones no lineales en las variables (ρ, u) que aparecen en el sistema se anulan en $\{\rho = 0\}$, estas dos alternativas nos dan la convergencia débil \rightarrow^* a una solución débil del sistema.

El sistema (1) es equivalente a

$$(4) \quad \begin{aligned} \rho_t + (m)_x &= 0, \\ (m)_t + \left(\frac{m^2}{\rho} + p(\rho)\right)_x &= 0, \end{aligned}$$

en coordenadas (ρ, m) donde $m = \rho u$ representa el momento por unidad de volumen.

En coordenadas lagrangianas (y, t) con y dado implícitamente por

$$y = \int_0^{x(y,t)} \rho(s, t) ds,$$

el sistema (1) puede ser transformado en

$$(5) \quad \begin{aligned} v_t - u_y &= 0, \\ u_t - P(v)_y &= 0, \end{aligned}$$

donde $v = \frac{1}{\rho}$ es el volumen específico.

El sistema (4) puede ser considerado en forma similar por

$$U_t + \nabla F(U)U_x = 0,$$

donde

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho} + p(\rho) \end{pmatrix}, \quad \nabla F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{m^2}{\rho^2} + p' & \frac{2m}{\rho} \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = u - c$, $\lambda_2 = u + c$, con $c = \sqrt{p'(\rho)}$.

Definición 1. El sistema (3), es estrictamente hiperbólico si para cada $U \in \mathbb{R}^2$ la matriz $2 \times 2 \nabla F$ tiene autovalores reales y distintos $\lambda_1(U) < \lambda_2(U)$.

Definición 2. Dado un sistema 2×2 estrictamente hiperbólico, a las funciones diferenciables α, β , definidas en \mathbb{R}^2 , cuyos gradientes $\nabla\alpha, \nabla\beta$ son autovectores a izquierda de ∇F , es decir

$$\nabla\alpha\nabla F = \lambda_1\nabla\alpha, \quad \nabla\beta\nabla F = \lambda_2\nabla\beta,$$

se les llama invariantes de Riemann.

Los invariantes de Riemann del sistema (3), son

$$(6) \quad \alpha = u - \frac{\rho^\theta}{\theta}, \quad \beta = u + \frac{\rho^\theta}{\theta},$$

con $\theta = \frac{\gamma-1}{2}$ y los valores propios toman la siguiente forma

$$(7) \quad \lambda_1 = \left(\frac{\gamma+1}{4}\right)\alpha + \left(\frac{3-\gamma}{4}\right)\beta, \quad \lambda_2 = \left(\frac{\gamma+1}{4}\right)\beta + \left(\frac{3-\gamma}{4}\right)\alpha.$$

Definición 3. Una entropía η para el sistema $U_t + F(U)_x = 0$ y su flujo de entropía q , asociado a η , son funciones diferenciables en \mathbb{R}^2 que satisfacen

$$(8) \quad \nabla q(U) = \nabla\eta(U) \nabla F(U),$$

a la pareja (η, q) que satisfaga (8) se llama un par entropía-flujo, abreviadamente un par e-f.

Para reducir el soporte de las medidas de Young se utiliza la relación de conmutatividad

$$(9) \quad \langle \nu, \eta\bar{q} - \bar{\eta}q \rangle = \langle \nu, \eta \rangle \langle \nu, \bar{q} \rangle - \langle \nu, \bar{\eta} \rangle \langle \nu, q \rangle,$$

que debe ser válida para un número suficiente de parejas (η, q) , $(\bar{\eta}, \bar{q})$, la demostración de (9) se puede ver en [14].

La ecuación de Euler-Poisson-Darboux

$$(10) \quad \eta_{\alpha\beta} - \frac{k}{(\beta - \alpha)} (\eta_\beta - \eta_\alpha) = 0,$$

donde $k = \frac{-1}{2} \frac{(3-\gamma)}{(\gamma-1)}$ se utiliza para encontrar las entropías del sistema, [6].

En particular se puede verificar que (1) admite la entropía (energía mecánica)

$$(11) \quad \eta_*(\rho, u) = \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{\rho^\gamma}{\gamma(\gamma-1)} = \frac{m^2}{2\rho} + \frac{\rho^\gamma}{\gamma(\gamma-1)},$$

que es estrictamente convexa en las variables (ρ, m) cuando $1 < \gamma \leq 2$.

La existencia de una entropía estrictamente convexa es un hecho de importancia decisiva para la demostración de que

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial t} \eta(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x} q(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon) \in \{\text{compacto de } W^{-1,2}\},$$

para pares e-f suaves y asegurar la convergencia de $F(U^\varepsilon) \rightarrow F(U)$. Los espacios $W^{-m,p}(\Omega)$ se encuentran en [1]. Para poder demostrar (12), se debe tener en las variables (ρ, m)

$$(13) \quad |\nabla^2 \eta| \leq C_\eta \nabla^2 \eta_*,$$

como formas bilineales, donde η_* es una entropía estrictamente convexa asociada al sistema en cuestión, ver demostración de (12) en [14].

Si $\nabla^2 \eta$ esta acotada entonces existe C_1 tal que

$$|\nabla^2 \eta(\alpha, \alpha)| \leq C_1 \|\alpha\|^2,$$

como η_* es estrictamente convexa entonces existe C_2 tal que

$$C_2 \|\alpha\|^2 \leq |\nabla^2 \eta_*(\alpha, \alpha)|,$$

de donde se tiene

$$|\nabla^2 \eta(\alpha, \alpha)| \leq C_1 \|\alpha\|^2 \leq C_\eta |\nabla^2 \eta_*(\alpha, \alpha)|,$$

y así se concluye (13).

Si $\rho = 0$ la ecuación (10) es singular ($\alpha = u = \beta$), en general las entropías para (1) son también singulares en $\rho = 0$, es decir que $\nabla^2 \eta$ no estará acotada cerca de $\rho = 0$. Como esto también ocurre con η_* , la desigualdad (13) será satisfecha por aquellas entropías para las cuales

$$(\nabla^2 \eta_*)^{-\frac{1}{2}} (\nabla^2 \eta) (\nabla^2 \eta_*)^{-\frac{1}{2}},$$

sea acotada uniformemente, en las variables (ρ, m) .

Una acotación

$$(14) \quad \left| (\nabla^2 \eta_*)^{-\frac{1}{2}} (\nabla^2 \eta) (\nabla^2 \eta_*)^{-\frac{1}{2}} \right| \leq C,$$

puede ser verificada en cada punto (ρ, m) en cualquier base de \mathbb{R}^2 .

Si se consideran los autovectores para (1)

$$(15) \quad \begin{aligned} r_1 &= (1, \lambda_1) = \left(1, \frac{m}{\rho} - c \right), \\ r_2 &= (1, \lambda_2) = \left(1, \frac{m}{\rho} + c \right). \end{aligned}$$

De modo general, si se tiene un par linealmente independiente de autovectores para un sistema 2×2 de leyes de conservación como (4), estrictamente hiperbólico, si η fuera una entropía dos veces diferenciable entonces

$$(16) \quad \nabla^2 \eta(r_1, r_2) = 0.$$

Por lo tanto, denotando con $B = (\nabla^2 \eta_*)^{\frac{1}{2}}$ se tiene que $\left\{ \frac{B_{r_1}}{\|B_{r_1}\|}, \frac{B_{r_2}}{\|B_{r_2}\|} \right\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^2 .

$$(17) \quad |\nabla^2 \eta(r_i, r_i)| \leq C \nabla^2 \eta_*(r_i, r_i), \quad i = 1, 2$$

Ahora (1) deja de ser estrictamente hiperbólico en $\{\rho = 0\}$. No obstante si (14) vale para una región acotada cualquiera en $\{\rho > 0\}$, por continuidad (14) es válida en el cerrado de la misma región.

La condición (14) representa una restricción en el universo de las entropías de las cuales se puede disponer para el análisis de las medidas de Young. Además así se tiene un número suficiente de entropías como se observa más adelante.

3. Entropías Admisibles del Sistema

Dados dos pares e-f (η, q) , $(\bar{\eta}, \bar{q})$ que satisfagan (14) se tiene la relación de conmutatividad

$$(18) \quad \langle \nu, \eta q - \bar{\eta} \bar{q} \rangle = \langle \nu, \eta \rangle \langle \nu, \bar{q} \rangle - \langle \nu, \bar{\eta} \rangle \langle \nu, q \rangle,$$

donde $\nu = \nu_{x,t}$ es una familia de medidas de Young obtenida a partir de una sucesión aproximadora $(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)$.

En esta sección se describe cómo es posible obtener pares entropía-flujo con la propiedad (18), a los que Diperna denomina pares débiles. Volviendo a la ecuación que deben satisfacer las entropías

$$(19) \quad \eta_{\alpha\beta} - \frac{k}{(\beta - \alpha)} (\eta_\beta - \eta_\alpha) = 0,$$

para $k = \frac{-(3-\gamma)}{2(\gamma-1)} < 0$, el caso que se trata aquí es $1 < \gamma \leq 5/3$. Antes de analizar (19), se considera una ecuación semejante

$$(20) \quad \eta_{\alpha\beta} - \frac{k'}{(\beta - \alpha)} (\eta_\beta - \eta_\alpha) = 0,$$

con $k' > 0$. Se pueden obtener infinitas soluciones para (20), en la región $\beta - \alpha \geq 0$. Se supone que (20) admite soluciones de la forma

$$(21) \quad \eta(\alpha, \beta) = \alpha^n f\left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha}\right),$$

ver [13], sustituyendo en (20) y tomando $\sigma = \frac{\alpha - \beta}{\alpha}$ se llega a

$$\sigma(1 - \sigma) f''(\sigma) + \{\sigma(n - 1) + k'(2 - \sigma)\} f'(\sigma) + nk' f(\sigma) = 0,$$

por último se tiene

$$(22) \quad \sigma(1 - \sigma) f''(\sigma) + \{2k' - (-n + k' + 1)\sigma + k'(2 - \sigma)\} f'(\sigma) + nk' f(\sigma) = 0.$$

Se observa que (22) tiene la forma de una ecuación hipergeométrica

$$(23) \quad \sigma(1 - \sigma) f''(\sigma) + \{c - (a + b + 1)\sigma\} f'(\sigma) - abf(\sigma) = 0,$$

la solución de (23) analítica en $|\sigma| < 1$, con $f(0) = 1$, es una función hipergeométrica $f(\sigma) = F(a, b, c; \sigma)$, ver [15]. La ecuación (22) es hipergeométrica con $a = -n$, $b = k'$, $c = 2k'$, por lo tanto admite como solución una función $f(\sigma) = F(-n, k', 2k'; \sigma)$. Ahora, cuando $\Re(c) > \Re(b)$, como es este caso, ya que se supone que $k' > 0$, existe una representación integral para $F(a, b, c; \sigma)$,

$$F(a, b, c; \sigma) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \theta^{b-1} (1 - \theta)^{c-b-1} (1 - \theta\sigma)^{-a} d\theta.$$

$$f(\sigma) = \frac{\Gamma(2k')}{\Gamma(k')^2} \int_0^1 \theta^{k'-1} (1 - \theta)^{k'-1} (1 - \theta\sigma)^n d\theta,$$

reemplazando en (21)

$$\eta(\alpha, \beta) = \alpha^n f\left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(2k')}{\Gamma(k')^2} \int_0^1 \theta^{k'-1} (1 - \theta)^{k'-1} (\alpha - \theta(\alpha - \beta))^n d\theta.$$

Así, por linealidad, para todo polinomio $p(t)$ se tiene una solución de (20) de la forma

$$\eta(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(2k')}{\Gamma(k')^2} \int_0^1 \theta^{k'-1} (1 - \theta)^{k'-1} p(\alpha - \theta(\alpha - \beta)) d\theta.$$

Por densidad, para toda función $\phi(t)$ de clase C^2 , se encuentra una solución de (20) de la forma

$$(24) \quad \eta(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(2k')}{\Gamma(k')^2} \int_0^1 \theta^{k'-1} (1-\theta)^{k'-1} \phi(\alpha - \theta(\alpha - \beta)) d\theta.$$

Ahora, no es difícil ver que $\eta(\alpha, \beta)$ dada por (24) es solución del problema con valores inicial para (20) con datos

$$\eta(\alpha, \beta) \Big|_{\alpha=\beta=t} = \phi(t),$$

$$\lim_{\beta-\alpha \rightarrow 0} (\beta - \alpha)^{2k'} (\eta_\beta - \eta_\alpha) = 0.$$

Regresando a la ecuación (19) con $k < 0$, se supone que

$$(25) \quad \eta(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha)^d \tilde{\eta},$$

para algún $d \in \mathbb{R}$. Derivando (25), con respecto a α , y con respecto a β

$$\eta_\alpha = -d(\beta - \alpha)^{d-1} \tilde{\eta} + (\beta - \alpha)^d \tilde{\eta}_\alpha,$$

$$\eta_\beta = d(\beta - \alpha)^{d-1} \tilde{\eta} + (\beta - \alpha)^d \tilde{\eta}_\beta,$$

$$\eta_{\alpha\beta} = -d(d-1)(\beta - \alpha)^{d-2} \tilde{\eta} - d(\beta - \alpha)^d \tilde{\eta}_\beta + d(\beta - \alpha)^d \tilde{\eta}_\alpha + (\beta - \alpha)^d \tilde{\eta}_{\alpha\beta},$$

y sustituyendo en (19) se obtiene

$$(26) \quad \tilde{\eta}_{\alpha\beta} - \frac{k+d}{\beta-\alpha} (\tilde{\eta}_\beta - \tilde{\eta}_\alpha) - \frac{d(2k-1+d)}{(\beta-\alpha)^2} \tilde{\eta} = 0,$$

asi, para que el coeficiente del término de orden cero en (26) sea cero, se debe tener $d = 0$ o $d = 1 - 2k$. En este último caso $\tilde{\eta}$ satisface una ecuación como (20), con $k' = 1 - k > 0$.

Por lo tanto, (19) admite una solución de la forma

$$(27) \quad \eta(\alpha, \beta) = \text{const.} (\beta - \alpha)^{1-2k} \int_0^1 \theta^{-k} (1-\theta)^{-k} \phi(\alpha - \theta(\alpha - \beta)) d\theta,$$

para toda función ϕ de clase C^2 .

Ahora, η dada por (27), para “const.” adecuadamente escogida, es solución del problema de valor inicial para (19) con condiciones

$$\eta \Big|_{\alpha=\beta} = 0,$$

$$\lim_{\beta-\alpha \rightarrow 0} a(\beta-\alpha)^{2k} (\eta_\beta - \eta_\alpha) \Big|_{\alpha=\beta=t} = \phi(t),$$

donde $a = \left(\frac{\gamma-1}{4}\right)^{2k}$.

Se observa que cuando $0 < k' < 1$ la ecuación (20), admite soluciones con representación integral de la forma (27), con $k' = 1 - k$.

Escogiendo una constante en (27), se analizan las entropías del sistema (1) dadas por la fórmula (27).

De ahora en adelante se toma γ de la forma

$$\gamma = 1 + \frac{2}{N}, \quad N = 2m + 1, \quad m \geq 1, \text{ entero.}$$

Los resultados que se muestran aquí pueden ser extendidos a cualquier γ , sin embargo las complicaciones técnicas aumentan significativamente, [2].

Como

$$k = -\frac{1}{2} \left(\frac{3-\gamma}{\gamma-1} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{3 - \left(1 + \frac{2}{2m+1}\right)}{1 + \frac{2}{2m+1} - 1} \right) = -m \implies -k = m,$$

por lo tanto

$$(28) \quad \eta(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha)^{2m+1} \int_0^1 [\theta(1-\theta)]^m \phi(\alpha + (\beta - \alpha)\theta) d\theta,$$

luego

$$(29) \quad \eta(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta (\tau - \alpha)^m (\beta - \tau)^m \phi(\tau) d\tau.$$

A partir de la expresión (28) tomando

$$\phi = D^{2m}\psi,$$

integrando por partes m veces, inicialmente se obtiene

$$\eta(\alpha, \beta) = (-1)^m (\beta - \alpha) \int_0^1 \frac{d^m}{d\theta^m} [\theta(1-\theta)]^m \frac{d^m}{d\theta^m} \psi(\alpha + (\beta - \alpha)\theta) d\theta,$$

haciendo otras m integraciones por partes, se llega a la siguiente expresión

$$(30) \quad \eta(\alpha, \beta) \equiv P_m \psi(\alpha, \beta) = \sum_{j=0}^m a_j (\beta - \alpha)^{m-j} C_{m-j-1}[\psi],$$

donde

$$(31) \quad C_k[\psi] = D^k \psi(\beta) + (-1)^k D^k \psi(\alpha), \quad k \geq 0,$$

$$(32) \quad C_{-1}[\psi] = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(\tau) d\tau.$$

Además de los pares formados por las entropías del tipo $P_m \psi$ dadas en (30), dos pares e-f particulares tendrán importancia especial en el análisis que se hará del soporte de las medidas de Young. Son $G_0 = (\eta_0, q_0)$ y $G_1 = (\eta_1, q_1)$. La entropía η_0 es obtenida haciendo ϕ en (29) igual a la medida de Dirac concentrada en cero, vía un proceso usual de aproximación

$$(33) \quad \eta_0(\alpha, \beta) = (-\alpha\beta)^m \chi,$$

donde χ es la función característica del segundo cuadrante, $\alpha \leq 0 \leq \beta$.

Para hallar $q_0(\alpha, \beta)$ se necesita encontrar primero una expresión que relacione q con η , como

$$\frac{\partial q}{\partial \alpha} = \lambda_1 \frac{\partial \eta}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial q}{\partial \beta} = \lambda_2 \frac{\partial \eta}{\partial \beta},$$

ver [14], integrando

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial q}{\partial \alpha} &= \int_{\alpha}^{\beta} \lambda_1 \frac{\partial \eta}{\partial \alpha}, \\ q(\alpha, \beta) &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\left(\frac{\gamma+1}{4} \right) \alpha + \left(\frac{3-\gamma}{4} \right) \beta \right] \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + h(\beta), \end{aligned}$$

usando integración por partes

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{\gamma+1}{4} \right) \alpha + \left(\frac{3-\gamma}{4} \right) \beta \implies \frac{\partial u}{\partial \alpha} = \left(\frac{\gamma+1}{4} \right), \\ dv &= \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \implies v = \eta(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned} q(\alpha, \beta) &= \left[\left(\frac{\gamma+1}{4} \right) \alpha + \left(\frac{3-\gamma}{4} \right) \beta \right] \eta(\alpha, \beta) - \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\gamma+1}{4} \right) \eta(\alpha, \beta) + h(\beta) \\ &= \lambda_1 \eta - \left(\frac{\gamma+1}{4} \right) \int_{\alpha}^{\beta} \eta(\alpha, \beta) + h(\beta), \end{aligned}$$

como $0 = q(\alpha, \alpha) = \lambda_1 \eta(\alpha, \alpha) - \left(\frac{\gamma+1}{4}\right) \int_{\alpha}^{\alpha} \eta(\alpha, \beta) + h(\beta) \implies h(\beta) = 0$, se puede concluir que

$$(34) \quad q = \lambda_1 \eta - \left(\frac{\gamma+1}{4}\right) \int_{\alpha}^{\beta} \eta(x, \beta) dx,$$

$$(35) \quad q = \lambda_2 \eta - \left(\frac{\gamma+1}{4}\right) \int_{\alpha}^{\beta} \eta(\alpha, y) dy.$$

Se usa la expresión (35) para hallar q_0 , luego

$$q_0(\alpha, \beta) = \frac{N-1}{2N} \{(-\alpha)^m \beta^{m+1} + \beta^m \alpha (-\alpha)^m\} \chi.$$

De manera análoga, tomando una sucesión ϕ_n que aproxime a la derivada de la función δ en el origen se obtiene el par $G_1 = (\eta_1, q_1)$

$$\begin{aligned} \eta_0(\alpha, \beta) &= (-\alpha\beta)^m \chi, \\ \frac{\partial \eta_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \eta_0}{\partial \beta} &= \left[m(-\alpha\beta)^{m-1} (-\beta) + m(-\alpha\beta)^{m-1} (-\alpha) \right] \chi \\ &= -m \left[(-\alpha\beta)^{m-1} (\beta + \alpha) \right] \chi, \end{aligned}$$

de lo anterior se puede considerar que

$$\eta_1(\alpha, \beta) = (-\alpha\beta)^{m-1} (\beta + \alpha) \chi,$$

usando nuevamente (35) con λ_2 y con η_1 se halla q_1 , luego

$$q_1(\alpha, \beta) = \frac{N-1}{N} (-\alpha\beta)^{m-1} \left[\frac{\beta^2}{2} + \left\{ \frac{N^2 - 2N - 1}{(N-1)^2} \right\} \alpha\beta + \frac{\alpha^2}{2} \right] \chi.$$

La importancia de los pares G_0, G_1 se debe a la propiedad siguiente

$$(36) \quad \eta_0 q_1 - \eta_1 q_0 = (-\alpha\beta)^{2m} \left[\frac{2}{N(N-1)} \right] \chi \geq 0.$$

Esta sección se finaliza verificando la desigualdad (17) (que es equivalente a (14) y (13)) para las entropías débiles, definidas por (28).

Dado que $\alpha = u - \frac{e^\theta}{\theta}$, $\beta = u - \frac{e^\theta}{\theta}$, donde $\theta = \frac{\gamma-1}{2}$, se tiene $\gamma = 1 + \frac{2}{N}$ entonces $\frac{\gamma-1}{2} = \frac{1}{N}$, por lo tanto

$$\alpha = \frac{m}{\rho} - N\rho^{1/N}, \quad \beta = \frac{m}{\rho} + N\rho^{1/N}.$$

Se quiere encontrar expresiones en términos de α y β para los operadores

$$\frac{\partial}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial}{\partial m}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial m}, \quad \frac{\partial^2}{\partial m^2}.$$

Por cálculo directo se obtiene la siguiente expresion

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = - \left(\frac{\beta + \alpha}{2} \right) \left(\frac{\beta - \alpha}{2N} \right)^{-N} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \left(\frac{\beta - \alpha}{2N} \right)^{1-N} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \right),$$

y expresiones análogas para los demás operadores, [6].

Las fórmulas para los operadores diferenciales sirven para analizar el orden de las entropías débiles dadas por (28),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial \rho} &= \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \left[- \left(\frac{\beta + \alpha}{2} \right) \left(\frac{\beta - \alpha}{2N} \right)^{-N} + \left(\frac{\beta - \alpha}{2N} \right)^{1-N} \right] \\ &\quad + \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \left[- \left(\frac{\beta + \alpha}{2} \right) \left(\frac{\beta - \alpha}{2N} \right)^{-N} - \left(\frac{\beta - \alpha}{2N} \right)^{1-N} \right] \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \left[- \left(\frac{N-1}{2\rho} \right) (\rho^{1/N})^{-N} + (\rho^{1/N})^{1-N} \right] \\ &\quad + \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \left[- \left(\frac{N-1}{2\rho} \right) (\rho^{1/N})^{-N} - (\rho^{1/N})^{1-N} \right], \end{aligned}$$

para cada N , cuando $\rho \rightarrow \infty$. Como $\frac{\partial \eta}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \eta}{\partial \beta}$ son acotadas entonces

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\partial \eta}{\partial \rho} = c_1 \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[- \left(\frac{N-1}{2\rho^2} \right) + \frac{\rho^{1/N}}{\rho} \right] + c_2 \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[- \left(\frac{N-1}{2\rho^2} \right) - \frac{\rho^{1/N}}{\rho} \right] = 0.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial \eta}{\partial \rho} = O(1).$$

De la misma manera

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial m} &= \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \left(\frac{\beta - \alpha}{2N} \right)^{-N} + \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \left(\frac{\beta - \alpha}{2N} \right)^{-N} \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \left(\frac{1}{\rho} \right), \end{aligned}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\partial \eta}{\partial m} = c_1 \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\rho} \right] + c_2 \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\rho} \right] = 0.$$

Así

$$\frac{\partial \eta}{\partial m} = O(1).$$

Análogamente se tiene

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \rho^2} = O(\rho^{-1}), \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial \rho \partial m} = O(\rho^{-1}), \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial m^2} = O(\rho^{-1}).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \nabla^2 \eta(r_i, r_i) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \rho^2} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial \rho \partial m} \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial \rho \partial m} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial m^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial \rho^2} + 2\lambda_i \frac{\partial^2 \eta}{\partial \rho \partial m} + \lambda_i^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial m^2} = O(\rho^{-1}), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Por otro lado, usando la fórmula (11) para η_* se observa que

$$\frac{\partial^2 \eta_*}{\partial \rho^2} = O(\rho^{-1}), \quad \frac{\partial^2 \eta_*}{\partial \rho \partial m} = O(\rho^{-1}), \quad \frac{\partial^2 \eta_*}{\partial m^2} = O(\rho^{-1}),$$

en consecuencia

$$\nabla^2 \eta_*(r_i, r_i) = \frac{\partial^2 \eta_*}{\partial \rho^2} + 2\lambda_i \frac{\partial^2 \eta_*}{\partial \rho \partial m} + \lambda_i^2 \frac{\partial^2 \eta_*}{\partial m^2} = O(\rho^{-1}), \quad i = 1, 2.$$

Así, para toda entropía débil la desigualdad (17) se satisface para alguna constante $C > 0$, dependiendo de η , en regiones limitadas del semi-plano $\rho \geq 0$, por lo tanto, las entropías débiles, definidas por (28), son admisibles.

4. Soluciones Aproximadas

En esta sección se presenta el esquema de Lax-Friedrichs, que es una clase de esquema en diferencias finitas con el cual se demuestra la existencia de soluciones al problema perturbado (problema parabólico), estas soluciones $\{\rho^\epsilon, u^\epsilon\}$ son llamadas soluciones aproximadas, las cuales convergen débilmente a una solución del problema original. Cabe anotar que existen otros esquemas en diferencias finitas entre los cuales se encuentra el esquema de Godunov. Las características esenciales de cada esquema radican en la manera como se toma la malla y la definición de las funciones de recurrencia.

4.1. Problema de Riemann. El problema

$$(37) \quad \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u,$$

con datos iniciales de la forma

$$(38) \quad u(x, 0) = \begin{cases} u^-, & x < 0, \\ u^+, & x > 0, \end{cases}$$

donde u^- y u^+ son vectores constantes en \mathbb{R}^n , ($n = 2$ para nuestro caso), es llamado problema de Riemann o problema de valor inicial.

Se supone inicialmente que (37), (38) sea resuelto por una onda de choque, es decir que una solución $u(x, t)$ sea constante igual a u^- para $x < x(t)$, $t > 0$, y constante igual a u^+ para $x > x(t)$, $t > 0$, con $x(t)$ diferenciable.

Como $u(x, t)$ es solución débil del sistema, se ve fácilmente que $(x(t), t)$ es una recta partiendo del origen $(0, 0)$ cuya inclinación s satisface la relación de Rankine-Hugoniot

$$(39) \quad s[u] = [f(u)],$$

donde $[u] = u^- - u^+$, $[f(u)] = f(u^-) - f(u^+)$ y en general, el corchete denotará la diferencia entre los valores, a izquierda y a derecha de las líneas de choque, de la función que se encuentre dentro del corchete, siempre que el contexto permita esta interpretación.

Se supone que (37), (38) es resuelto por una función $u(x, t)$ tal que se tiene

$$(40) \quad u(x, t) = v\left(\frac{x}{t}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

con $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función diferenciable, es decir u en el dominio $t > 0$ es una función del cociente $\xi = \frac{x}{t}$, así

$$(41) \quad (\nabla f - \xi I) \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0,$$

de (41) se tiene que $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ debe ser un autovector de ∇f asociado al autovalor ξ , estas soluciones son llamadas ondas de rarefacción, [9], [11].

4.2. Método de Lax Friedrichs. Las soluciones aproximadas se denotan por (ρ^l, u^l) , son construidas por medio de mallas de longitud $l = \Delta x$, y $h = \Delta t$, sea

$$J_n = \{j : j \text{ enteros}, n + j = \text{par}\}.$$

Para $0 < t < h$, $(j-1)l < x < (j+1)l$, j impar, se define $(\rho^l(x, t), u^l(x, t))$ como la solución de (37), (38), con datos iniciales

$$(42) \quad \rho_0^l(x) = \begin{cases} \rho_0^l((j-1)l), & x < jl, \\ \rho_0^l((j+1)l), & x > jl, \end{cases} \quad u_0^l(x) = \begin{cases} u_0^l((j-1)l), & x < jl, \\ u_0^l((j+1)l), & x > jl, \end{cases}$$

donde $\rho_0^l(x) = \rho_0(x) X_l(x)$, $u_0^l(x) = u_0(x) X_l(x)$ y

$$(43) \quad X_l(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\frac{1}{l}, \frac{1}{l}], \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Suponga que (ρ^l, u^l) han sido definidas para $t < nh$, y se define $(\rho^l(x, t), u^l(x, t))$ como las soluciones de (37), (38) con dato inicial, para $t = nh$ por

$$\rho_0^l(x) = \begin{cases} \frac{1}{2l} \int_{(j-1)l}^{(j+1)l} \rho^l(x, nh-0) dx, & x < (j+1)l, \\ \frac{1}{2l} \int_{(j+1)l}^{(j+3)l} \rho^l(x, nh-0) dx, & x > (j+1)l, \end{cases}$$

$$u_0^l(x) = \begin{cases} \frac{\int_{(j-1)l}^{(j+1)l} \rho^l u^l(x, nh-0) dx}{\int_{(j-1)l}^{(j+1)l} \rho^l(x, nh-0) dx}, & x < (j+1)l, \\ \frac{\int_{(j+1)l}^{(j+3)l} \rho^l u^l(x, nh-0) dx}{\int_{(j+1)l}^{(j+3)l} \rho^l(x, nh-0) dx}, & x > (j+1)l, \end{cases}$$

para $nh \leq t < (n+1)h$, $jl < x < (j+2)l$, donde $j \in J_n$, [2], [8].

Ejemplo 4. Sean $l = \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{2}$ entonces

$$J_1 = \{j : j \text{ entero}, 1 + j = \text{par}\} = \{1, 3, \dots, 2k + 1, \dots\},$$

$$J_2 = \{j : j \text{ entero}, 2 + j = \text{par}\} = \{2, 4, \dots, 2k, \dots\},$$

$$J_1 = J_3 = \dots = J_{2k+1}, \quad J_2 = J_4 = \dots = J_{2k},$$

para $0 < t < h = \frac{1}{2}$, tomando J_1 y comenzando con $j = 1$, entonces $(j-1)l < x < (j+1)l \implies 0 < x < 1$. Se define $(\rho^{1/2}(x, t), u^{1/2}(x, t))$ como la solución de (37), (38) con datos iniciales discontinuos (problema de Riemann) de la forma

$$\rho_0^{1/2}(x) = \begin{cases} \rho_0^{1/2}(0), & x < 1/2, \\ \rho_0^{1/2}(1), & x > 1/2, \end{cases} \quad u_0^{1/2}(x) = \begin{cases} u_0^{1/2}(0), & x < 1/2, \\ u_0^{1/2}(1), & x > 1/2, \end{cases}$$

donde $\rho_0^{1/2}(x) = \rho_0(x) X_{1/2}(x)$, $u_0^{1/2}(x) = u_0(x) X_{1/2}(x)$ y

$$X_{1/2}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-2, 2], \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

luego

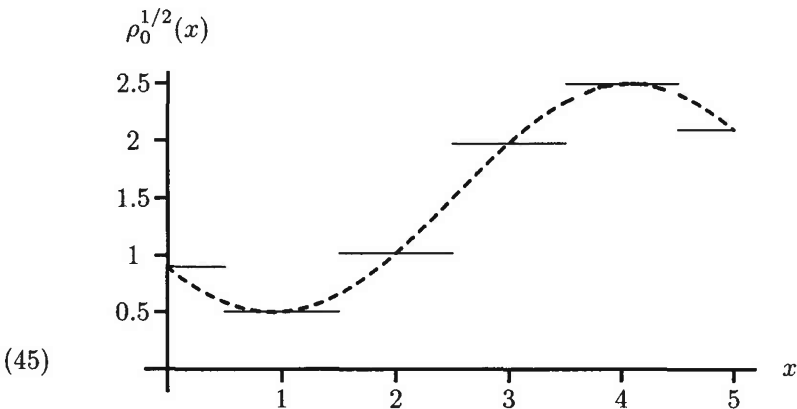
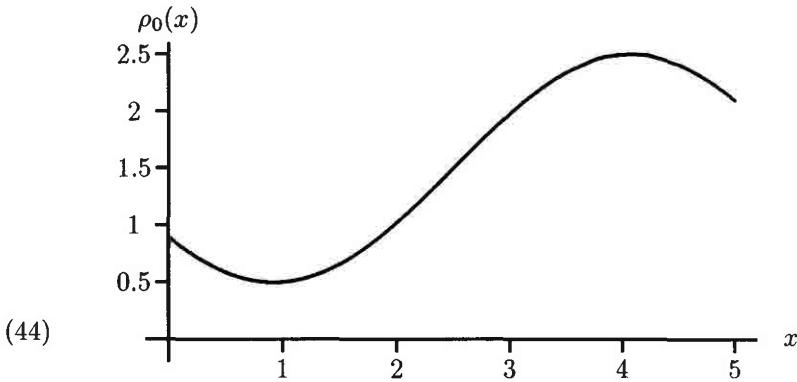
$$\rho_0^{1/2}(x) = \begin{cases} \rho_0(0), & x < 1/2, \\ \rho_0(1), & x > 1/2, \end{cases} \quad u_0^{1/2}(x) = \begin{cases} u_0(0), & x < 1/2, \\ u_0(1), & x > 1/2, \end{cases}$$

continuando en J_1 y tomando $j = 3$ (impar), con un proceso idéntico al anterior se tiene

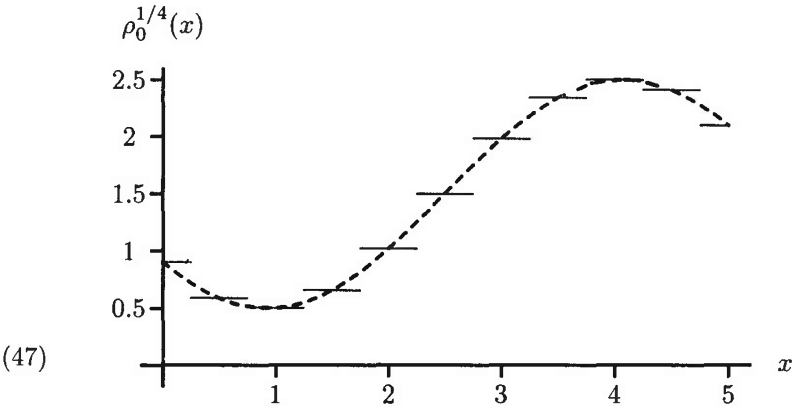
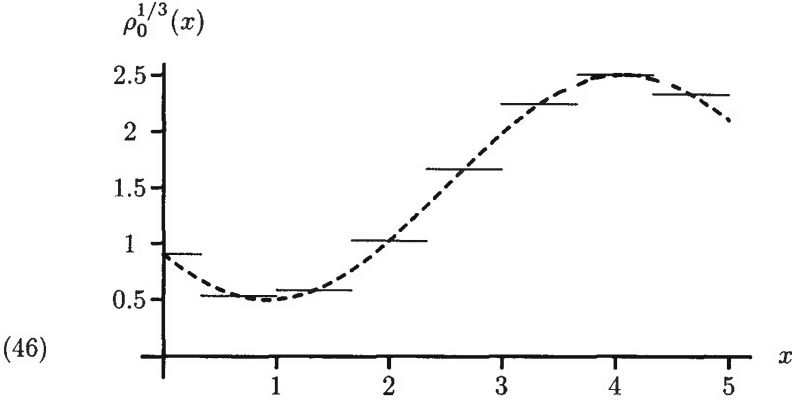
$$\rho_0^{1/2}(x) = \begin{cases} \rho_0(1), & x < 3/2, \\ \rho_0(2), & x > 3/2, \end{cases} \quad u_0^{1/2}(x) = \begin{cases} u_0(1), & x < 3/2, \\ u_0(2), & x > 3/2, \end{cases}$$

$$\rho_0^{1/2}(x) = \begin{cases} \rho_0(2), & x < 5/2, \\ \rho_0(3), & x > 5/2, \end{cases} \quad u_0^{1/2}(x) = \begin{cases} u_0(2), & x < 5/2, \\ u_0(3), & x > 5/2, \end{cases}$$

se observa que la condición inicial que se toma $(\rho_0^{1/2}(x), u_0^{1/2}(x))$ depende de los valores de la condición inicial $(\rho_0(x), u_0(x))$ del problema (1) y en este caso se hace una partición del dominio de las funciones $(\rho_0(x), u_0(x))$ de longitud $\frac{1}{2}$, y se construye una función escalón como se muestra en la gráfica (45) a partir de la condición inicial $\rho_0(x)$, gráfica (44) (lo mismo ocurre para la condición $u_0(x)$).



Tomando diferentes valores de l y h se pueden encontrar aproximaciones sucesivas de $(\rho_0(x), u_0(x))$ por medio de funciones del tipo $(\rho_0^l(x), u_0^l(x))$, como se muestra en (46), y (47)



Se resuelve el problema de Riemann con estas condiciones iniciales y las soluciones son llamadas $(\rho^l(x, t), u^l(x, t))$, formando así una sucesión de soluciones $\{(\rho^l(x, t), u^l(x, t))\}$, luego a medida que l es más pequeña se tiene que

$$(\rho_0^l(x, t), u_0^l(x, t)) \rightarrow (\rho_0(x, t), u_0(x, t)),$$

por lo tanto $(\rho^l(x, t), u^l(x, t)) \rightarrow (\rho(x, t), u(x, t))$ donde esta última es una solución débil del problema (1), (2).

5. Reducción del Soporte de ν

Con la ayuda de las medidas ν_x , que en esta sección se denotarán simplemente por ν , el problema de saber si $F(U^\varepsilon) \rightarrow F(U)$, una vez teniendo que $U^\varepsilon \rightarrow U$, para una F particular, se resuelve al obtener información sobre el soporte de las medidas ν .

Si el soporte de las medidas ν se reduce a un punto entonces $\langle \nu, F(\lambda) \rangle = F(U)$ y gracias al teorema de Tartar como $F(U^\varepsilon) \rightarrow \bar{F} = \langle \nu, F(\lambda) \rangle$ por lo tanto $F(U^\varepsilon) \rightarrow F(U)$.

Por lo que se vio en las secciones anteriores, dados dos pares e-f $(\eta, q), (\bar{\eta}, \bar{q})$, es válida la relación

$$(48) \quad \langle \nu, \eta\bar{q} - \bar{\eta}q \rangle = \langle \nu, \eta \rangle \langle \nu, \bar{q} \rangle - \langle \nu, \bar{\eta} \rangle \langle \nu, q \rangle.$$

Se denota con V la recta $\{\rho = 0\}$. La estrategia aquí será probar que $Spt \nu$ está contenido en un conjunto de la forma $V \cup P$, donde P es un punto arbitrario en $\rho > 0$. Se puede suponer sin pérdida de generalidad, que P no está sobre uno de los ejes $\alpha = 0$ ó $\beta = 0$. Si ν admite la descomposición

$$\nu = \nu|V + a\delta_P,$$

entonces tomando los pares $G_0 = (\eta_0, q_0)$, $G_1 = (\eta_1, q_1)$ y aplicando a estos pares la relación de conmutatividad, se obtiene

$$a[\eta_0q_1 - \eta_1q_0](P) = a^2[\eta_0q_1 - \eta_1q_0](P),$$

como $\eta_0q_1 - \eta_1q_0 \geq 0$ entonces $a = 1$, o, $a = 0$. Si $a = 1$ como ν es de probabilidad $\nu(P) = 1$, luego $Spt \nu \cap V = \emptyset$, por lo tanto $Spt \nu = P$, es decir $\nu|V = 0$, y $\nu|a\delta_P = 1$, lo cual implica que ν es una medida de Dirac. Si $a = 0$ entonces $\nu|V, \nu$ está concentrada en V .

Sea Δ el menor triángulo

$$\{(\alpha, \beta); \beta \leq \beta_0, \alpha \geq \alpha_0, \beta \geq \alpha\},$$

que contiene la parte del soporte de ν que no está en V .

Se considera la medida $\tilde{\nu} = (\beta - \alpha)^{2m} \nu$, se quiere mostrar que las proyecciones $\pi_1\tilde{\nu}, \pi_2\tilde{\nu}$ de la medida $\tilde{\nu}$ sobre los ejes coordenados α, β satisfacen respectivamente

$$D\pi_1\tilde{\nu}(t) = 0, \quad D\pi_2\tilde{\nu}(t) = 0, \quad \alpha_0 < t < \beta_0,$$

asi

$$Spt \nu \subset \{P\} \cup V.$$

Para analizar proyecciones y derivada de una medida ver [5].

Es posible cambiar los invariantes α, β por $\alpha + c_0, \beta + c_0$ para cualquier constante c_0 (lo que es equivalente a substituir la velocidad u por $u + c_0$), sin alterar en nada el problema, ya que no se alteran las ecuaciones de las entropías. Esta propiedad es conocida como invarianza Galileana del sistema (1). Por ésto se puede suponer que el triángulo minimal Δ está concentrado en el origen, ésto es $\alpha_0 + \beta_0 = 0$.

Se comenzará la reducción del soporte de ν con el siguiente resultado.

Lema 5. Si ν no está concentrada en V entonces el vértice P del triángulo minimal Δ está en el soporte de ν .

Demostración. Supongamos que ν no está concentrada en V y que P no está en el soporte de ν . Sean $\phi^\epsilon, \bar{\phi}^\epsilon$ funciones de clase C^2 no negativas, con

$$Spt \phi^\epsilon \subset [\alpha_0 - \epsilon, \alpha_0 + \epsilon], \quad Spt \bar{\phi}^\epsilon \subset [\beta_0 - \epsilon, \beta_0 + \epsilon],$$

$\phi^\epsilon > 0$ en $(\alpha_0 - \epsilon, \alpha_0 + \epsilon)$, $\bar{\phi}^\epsilon > 0$ en $(\beta_0 - \epsilon, \beta_0 + \epsilon)$, con $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, tal que

$$Spt \nu \cap [\alpha_0, \alpha_0 + \epsilon] \times [\beta_0 - \epsilon, \beta_0] = \emptyset,$$

sean $\eta^\epsilon, \bar{\eta}^\epsilon$ obtenidas al substituir ϕ por $\phi^\epsilon, \bar{\phi}^\epsilon$ en

$$\eta(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha)^{2m+1} \int_0^1 [\theta(1 - \theta)]^m \phi(\alpha + (\beta - \alpha)\theta) d\theta,$$

y sean $q^\epsilon, \bar{q}^\epsilon$ los flujos de entropía asociados, como $Spt \phi^\epsilon \subset [\alpha_0 - \epsilon, \alpha_0 + \epsilon]$ entonces $Spt \eta^\epsilon \subset (-\infty, \alpha_0 + \epsilon]$, de igual forma $Spt \bar{\eta}^\epsilon \subset [\beta_0 - \epsilon, +\infty)$, luego $Spt(\eta^\epsilon, q^\epsilon) \subset (-\infty, \alpha_0 + \epsilon] \times \mathbb{R}$, y, $Spt(\bar{\eta}^\epsilon, \bar{q}^\epsilon) \subset \mathbb{R} \times [\beta_0 - \epsilon, +\infty)$ por lo tanto

$$Spt \nu \cap Spt(\eta^\epsilon \bar{q}^\epsilon - \bar{\eta}^\epsilon q^\epsilon) = \emptyset,$$

de donde se concluye que

$$\langle \nu, \eta^\epsilon \bar{q}^\epsilon - \bar{\eta}^\epsilon q^\epsilon \rangle = 0,$$

como el triángulo Δ es minimal entonces $\langle \nu, \eta^\epsilon \rangle > 0$ y $\langle \nu, \bar{\eta}^\epsilon \rangle > 0$, además

$$0 = \langle \nu, \eta^\epsilon \bar{q}^\epsilon - \bar{\eta}^\epsilon q^\epsilon \rangle = \langle \nu, q^\epsilon \rangle \langle \nu, \bar{\eta}^\epsilon \rangle - \langle \nu, \bar{q}^\epsilon \rangle \langle \nu, \eta^\epsilon \rangle,$$

entonces

$$\langle \nu, q^\epsilon \rangle \langle \nu, \bar{\eta}^\epsilon \rangle = \langle \nu, \bar{q}^\epsilon \rangle \langle \nu, \eta^\epsilon \rangle,$$

asi que

$$\frac{\langle \nu, q^\varepsilon \rangle}{\langle \nu, \eta^\varepsilon \rangle} = \frac{\langle \nu, \bar{q}^\varepsilon \rangle}{\langle \nu, \bar{\eta}^\varepsilon \rangle}.$$

Ahora, en $\{(\alpha, \beta) \in \Delta, \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_0 + \varepsilon\}$ se tiene que

$$q^\varepsilon = (\lambda_1 + O(\varepsilon)) \eta^\varepsilon,$$

y en $\{(\alpha, \beta) \in \Delta, \beta_0 - \varepsilon \leq \beta \leq \beta_0\}$

$$\bar{q}^\varepsilon = (\lambda_1 + O(\varepsilon)) \bar{\eta}^\varepsilon,$$

por lo tanto, para las medidas de probabilidad $\mu^\varepsilon, \bar{\mu}^\varepsilon$ definidas por

$$\langle \mu^\varepsilon, h \rangle = \frac{\langle \nu, h\eta^\varepsilon \rangle}{\langle \nu, \eta^\varepsilon \rangle}, \quad \langle \bar{\mu}^\varepsilon, h \rangle = \frac{\langle \nu, h\bar{\eta}^\varepsilon \rangle}{\langle \nu, \bar{\eta}^\varepsilon \rangle},$$

para toda función continua h ,

$$\langle \mu^\varepsilon, \lambda_1 \rangle = \langle \bar{\mu}^\varepsilon, \lambda_2 \rangle + O(\varepsilon),$$

luego $\langle \mu^\varepsilon, \lambda_1 \rangle = \langle \bar{\mu}^\varepsilon, \lambda_2 \rangle + O(\varepsilon)$, haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$, pasando a una subsucesión si es necesario, se tiene que $\mu^\varepsilon \rightarrow \mu$, $\bar{\mu}^\varepsilon \rightarrow \bar{\mu}$, donde μ y $\bar{\mu}$ son medidas de probabilidad. Como $q^\varepsilon = (\lambda_1 + O(\varepsilon)) \eta^\varepsilon$ en $\{(\alpha, \beta) \in \Delta, \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_0 + \varepsilon\}$ si $\varepsilon \rightarrow 0$ entonces

$$Spt q^\varepsilon = Spt \eta^\varepsilon \subset \{(\alpha, \beta) \in \Delta, \alpha = \alpha_0\},$$

pero $Spt \mu^\varepsilon = Spt \eta^\varepsilon$ luego

$$Spt \mu = \{(\alpha, \beta) \in \Delta, \alpha = \alpha_0\},$$

de la misma manera

$$Spt \bar{\mu} = \{(\alpha, \beta) \in \Delta, \beta = \beta_0\}.$$

Asi

$$(49) \quad \langle \mu, \lambda_1 \rangle = \langle \bar{\mu}, \lambda_2 \rangle,$$

como $\frac{\partial}{\partial \beta} \lambda_1 = \frac{\partial}{\partial \alpha} \lambda_2 = \frac{1}{4}(3 - \gamma) > 0$ entonces las funciones λ_1, λ_2 son crecientes y por lo tanto

$$\langle \mu, \lambda_1 \rangle \leq \lambda_1(P) < \lambda_2(P) \leq \langle \bar{\mu}, \lambda_2 \rangle,$$

esta última cadena de desigualdades contradice (49), de donde se sigue que $P \in Spt \nu$. \square

Ahora se demostrará que

$$D\pi_1 \tilde{\nu}(0) = 0 = D\pi_2 \tilde{\nu}(0),$$

procedimientos completamente análogos llevan a la demostración de que

$$D\pi_1 \tilde{\nu}(t) = 0 = D\pi_2 \tilde{\nu}(t),$$

para $\alpha_0 < t < \beta_0$.

Sea $\psi(t)$ una función C_0^∞ , con $Spt \psi \subset (-1, 1)$. Haciendo

$$\psi_n(t) = n\psi(nt),$$

y denotando $\eta_n = P_m(\psi_n)$ por (30), y q_n el flujo de entropía asociado a η_n (se suponen los flujos de entropía siempre normalizados por $q(\alpha_0, \alpha_0) = 0$). El paso decisivo del presente análisis es el siguiente resultado.

Lema 6. *Para cada $\psi \in C_0^\infty(-1, 1)$ tenemos que $\langle \nu, \eta_n \rangle, \langle \nu, q_n \rangle$ son acotadas uniformemente para todo n .*

La prueba del Lema 6 será hecha con la ayuda de la siguiente proposición.

Proposición 7. *Sea (η, q) una pareja e-f que satisface*

$$|\eta| + |q| \leq \text{const.} |\alpha\beta|^{m-1},$$

entonces, para toda $\psi \in C_0^\infty(-1, 1)$ la forma

$$B_n = \eta q_n - \eta_n q,$$

está uniformemente acotada para n .

Demostración. Ya que $Spt \psi \subset (-1, 1)$, como $-1 < nt < 1$ entonces $-\frac{1}{n} < t < \frac{1}{n}$. Además $\eta_n = P_m(\psi_n)$ y q_n depende de η_n , por las ecuaciones (34), (35) entonces los pares (η_n, q_n) se anulan en

$$F = \left\{ (\alpha, \beta) : \beta < -\frac{1}{n} \right\}.$$

Sean

$$S_\alpha = \left\{ (\alpha, \beta) : |\alpha| < \frac{1}{n} \right\}, \quad S_\beta = \left\{ (\alpha, \beta) : |\alpha| < \frac{1}{n} \right\},$$

se tiene la condición siempre válida $\beta \geq \alpha$. Se divide F^c en cinco regiones, de la siguiente manera

$$F^c = \tilde{S}_\alpha \cup \tilde{S}_\beta \cup Q \cup U \cup I,$$

donde

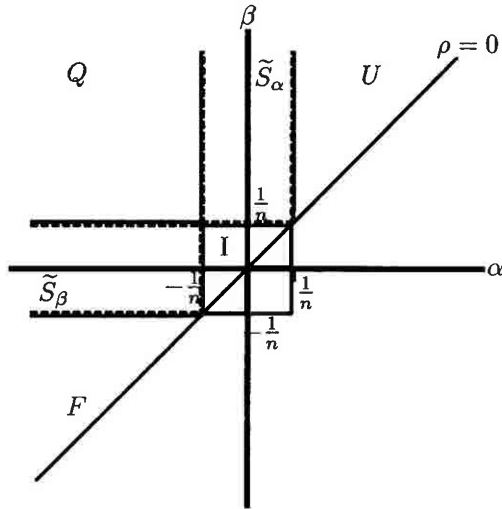
$$Q = \left\{ (\alpha, \beta) : \alpha \leq -\frac{1}{n}, \quad \beta \geq \frac{1}{n} \right\},$$

$$U = \left\{ (\alpha, \beta) : \alpha \geq \frac{1}{n} \right\},$$

$$I = \left\{ (\alpha, \beta) : |\alpha| \leq \frac{1}{n}, \quad |\beta| \leq \frac{1}{n} \right\},$$

$$\tilde{S}_\alpha = S_\alpha \cap I^c,$$

$$\tilde{S}_\beta = S_\beta \cap I^c.$$



En la zona de intersección I se tiene

$$|\eta| + |q| \leq \text{const.} |\alpha\beta|^{m-1},$$

como $|\alpha| \leq \frac{1}{n}$, $|\beta| \leq \frac{1}{n}$ entonces $|\alpha\beta| \leq \frac{1}{n^2}$, luego

$$|\alpha\beta|^{m-1} \leq \frac{1}{n^{2(m-1)}} = n^{2-2m},$$

asi $|\eta| + |q| \leq \text{const.} n^{2-2m}$ $|\eta_n| + |q_n| \leq \text{const.}$, por lo tanto

$$|B_n| = |\eta q_n - \eta_n q| \leq |\eta| |q_n| + |\eta_n| |q| \leq \text{const.}$$

En la región U se tiene $\alpha \geq \frac{1}{n}$,

$$\eta_n(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha)^{2m+1} \int_0^1 [\theta(1 - \theta)]^m \psi_n(\alpha + (\beta - \alpha)\theta) d\theta,$$

$\alpha \leq \alpha + (\beta - \alpha)\theta \leq \beta$ ya que $0 \leq \theta \leq 1$, como $\frac{1}{n} \leq \alpha \leq \alpha + (\beta - \alpha)\theta$ entonces $\psi_n(\alpha + (\beta - \alpha)\theta) = 0$ ya que $Spt \psi_n \subset (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ luego $\eta_n = 0$, además

$$q_n = q_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) + \int_{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})}^{(\alpha, \frac{1}{n})} \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \eta_n d\alpha + \int_{(\alpha, \frac{1}{n})}^{(\alpha, \beta)} \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \beta} \eta_n d\beta,$$

luego $q_n = q_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ esto implica $|\eta_n| + |q_n| \leq const.$ y así B_n está acotada en la región U .

En la región Q se tiene que $\alpha \leq -\frac{1}{n}$, $\beta \geq \frac{1}{n}$, además

$$\eta(\alpha, \beta) \equiv P_m \psi(\alpha, \beta) = \sum_{j=0}^m a_j (\beta - \alpha)^{m-j} C_{m-j-1}[\psi],$$

como $Spt \psi_n \subset (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ entonces η_n es constante

$$\eta_n = \int \psi_n(t) dt = \int \psi(t) dt,$$

por lo tanto para q_n se tiene

$$(50) \quad q_n(\alpha, \beta) = q_n\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) + \int_{(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})}^{(\alpha, \frac{1}{n})} \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \eta_n d\alpha + \int_{(\alpha, \frac{1}{n})}^{(\alpha, \beta)} \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \beta} \eta_n d\beta,$$

como η_n es constante entonces $\frac{\partial}{\partial \alpha} \eta_n = 0 = \frac{\partial}{\partial \beta} \eta_n$, luego $q_n = q_n\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, esto implica $|\eta_n| + |q_n| \leq const.$ y por lo tanto B_n está acotada en la región Q .

En las franjas truncadas \tilde{S}_α y \tilde{S}_β en las cuales se tiene

$$(51) \quad \eta_n(\alpha, \beta) = \sum_{j=0}^m a_j (\beta - \alpha)^{m-j} D^{m-j-1} \psi_n(\beta), \text{ en } \tilde{S}_\beta$$

$$(52) \quad \eta_n(\alpha, \beta) = \sum_{j=0}^m a_j (\beta - \alpha)^{m-j} (-1)^{m-j-1} D^{m-j-1} \psi_n(\alpha), \text{ en } \tilde{S}_\alpha$$

estas ecuaciones resultan ya que

$$\eta(\alpha, \beta) \equiv P_m \psi(\alpha, \beta) = \sum_{j=0}^m a_j (\beta - \alpha)^{m-j} C_{m-j-1}[\psi],$$

con

$$C_{m-j-1}[\psi] = D^{m-j-1}\psi(\beta) + (-1)^{m-j-1} D^{m-j-1}\psi(\alpha),$$

como en \tilde{S}_β se tiene $\alpha < \frac{1}{n}$ entonces $\psi(\alpha) = 0$, por lo tanto

$$C_{m-j-1}[\psi] = D^{m-j-1}\psi(\beta),$$

de la misma forma en \tilde{S}_α se tiene $\beta > \frac{1}{n}$ entonces $\psi(\beta) = 0$, luego

$$C_{m-j-1}[\psi] = (-1)^{m-j-1} D^{m-j-1}\psi(\alpha).$$

Substituyendo (51) en (35) se llega a

$$q_n = \lambda_2 \eta_n - \left(\frac{\gamma + 1}{4} \right) \int_\alpha^\beta \sum_{j=0}^m a_j (y - \alpha)^{m-j} D^{m-j-1} \psi_n(y) dy.$$

Como $\psi_n(y) = n\psi(ny)$ entonces

$$D' \psi_n(y) = n^2 \psi'(ny),$$

$$D'' \psi_n(y) = n^3 \psi''(ny).$$

Por lo tanto

$$D^{m-1} \psi_n(y) = n^m \psi^{m-1}(ny) = O(n^m).$$

Además como $Spt \psi_n \subset (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ entonces la parte de la integral que no es cero se tiene cuando $-\frac{1}{n} \leq y \leq \frac{1}{n}$, la longitud del intervalo es $\frac{2}{n}$, así el orden de la integral es $O(n^m \cdot \frac{2}{n}) = O(n^{m-1})$.

Luego

$$q_n = \lambda_2 \eta_n + O(n^{m-1}),$$

$$B_n = \eta q_n - \eta_n q,$$

$$B_n = \eta [\lambda_2 \eta_n + O(n^{m-1})] - \eta_n [\lambda_2 \eta_n + O(n^{-m})].$$

También se debe analizar el orden de η en la región \tilde{S}_β , como

$$\eta(\alpha, \beta) = \sum_{j=0}^m a_j (\beta - \alpha)^{m-j} D^{m-j-1} \psi(\beta) \text{ en } \tilde{S}_\beta,$$

dado que $\psi \in C_0^\infty(-1, 1)$ sus derivadas están acotadas, entonces el orden de η depende del término $(\beta - \alpha)^{m-j}$ que tiene mayor exponente cuando $j = 0$, en

la región \tilde{S}_β se tiene $|\beta| < \frac{1}{n}$ y $\alpha < -\frac{1}{n}$ entonces $\beta - \alpha < \frac{1}{n} - \alpha = \frac{2}{n} + (-\frac{1}{n} - \alpha)$ de donde

$$\begin{aligned}
 (\beta - \alpha)^m &< \left[\frac{2}{n} + \left(-\frac{1}{n} - \alpha \right) \right]^m \\
 &= \left(\frac{2}{n} \right)^m + m \left(\frac{2}{n} \right)^{m-1} \left(-\frac{1}{n} - \alpha \right) + \dots + \left(-\frac{1}{n} - \alpha \right)^m .
 \end{aligned}$$

Luego

$$(\beta - \alpha)^m \leq n \left(\frac{2}{n} \right)^m = \frac{2^m}{n^{m-1}} = O(n^{1-m}) .$$

Por lo tanto

$$B_n = O(n^{1-m}n^{m-1} + n^m n^{-m}) = O(1) ,$$

en el conjunto \tilde{S}_β .

Análogamente, se encuentra que $B_n = O(1)$ en \tilde{S}_α . \square

La demostración de la anterior proposición tiene como consecuencia particular el siguiente resultado. La prueba se puede ver en [14].

Corolario 8. Sean $G_0 = (\eta_0, q_0)$ dado por

$$\begin{aligned}
 \eta_0(\alpha, \beta) &= (-\alpha\beta)^m \chi \\
 q_0(\alpha, \beta) &= \frac{N-1}{2N} \{ (-\alpha)^m \beta^{m+1} + \beta^m \alpha (-\alpha)^m \} \chi
 \end{aligned}$$

y $\psi \in C_0^\infty(-1, 1)$ tales que

$$(53) \quad \int_{-1}^1 \psi(t) dt = 0 .$$

Entonces $B_n^0 = \eta_0 q_n - \eta_n q_0 = O(n^{-1})$.

Demostración (DEL LEMA 6). Sea (η, q) una pareja e-f que satisfaga

$$|\eta| + |q| \leq \text{const.} (\alpha\beta)^{m-1} ,$$

(se quiere mostrar que $\langle \nu, \eta_n \rangle$ y $\langle \nu, q_n \rangle$ son uniformemente acotadas), sea la relación de conmutatividad

$$(54) \quad \langle \nu, \eta q_n - \eta_n q \rangle = \langle \nu, \eta \rangle \langle \nu, q_n \rangle - \langle \nu, \eta_n \rangle \langle \nu, q \rangle ,$$

se supone por el absurdo que

$$\overline{\lim} |\langle \nu, \eta_n \rangle| = +\infty \quad \text{o} \quad \overline{\lim} |\langle \nu, q_n \rangle| = +\infty ,$$

como $B_n = \eta q_n - \eta_n q$ es uniformemente acotada entonces

$$\left| \frac{\langle \nu, \eta_n \rangle}{\langle \nu, q_n \rangle} \right| \quad \text{o} \quad \left| \frac{\langle \nu, q_n \rangle}{\langle \nu, \eta_n \rangle} \right| \text{ esta acotada,}$$

para fijar ideas se supone que

$$\overline{\lim} |\langle \nu, \eta_n \rangle| = +\infty \quad \text{y} \quad \left| \frac{\langle \nu, q_n \rangle}{\langle \nu, \eta_n \rangle} \right| = a,$$

pasando a una subsucesión si es necesario, dividiendo (54) por $\langle \nu, \eta_n \rangle$ y haciendo $n \rightarrow +\infty$ se tiene

$$\frac{\langle \nu, \eta q_n - \eta_n q \rangle}{\langle \nu, \eta_n \rangle} = \frac{\langle \nu, \eta \rangle \langle \nu, q_n \rangle}{\langle \nu, \eta_n \rangle} - \frac{\langle \nu, \eta_n \rangle \langle \nu, q \rangle}{\langle \nu, \eta_n \rangle},$$

$$0 = \langle \nu, \eta \rangle a - \langle \nu, q \rangle,$$

ya que $B_n = \eta q_n - \eta_n q$ es uniformemente acotada. Luego

$$\langle \nu, q \rangle = a \langle \nu, \eta \rangle,$$

para todo par e-f que satisfaga $|\eta| + |q| \leq \text{const.} (\alpha\beta)^{m-1}$. Como (η, q) , $(\bar{\eta}, \bar{q})$ son de orden $(\alpha\beta)^{m-1}$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \nu, \eta \bar{q} - \bar{\eta} q \rangle &= \langle \nu, \eta \rangle \langle \nu, \bar{q} \rangle - \langle \nu, \bar{\eta} \rangle \langle \nu, q \rangle \\ &= \langle \nu, \eta \rangle a \langle \nu, \bar{\eta} \rangle - \langle \nu, \bar{\eta} \rangle a \langle \nu, \eta \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aplicando a G_0 y G_1 se llega a

$$\langle \nu, \eta_0 q_1 - \eta_1 q_0 \rangle = 0,$$

lo que da una contradicción ya que $P \in \text{Spt } \nu$, es decir que

$$[\eta_0 q_1 - \eta_1 q_0](P) > 0,$$

y

$$\eta_0 q_1 - \eta_1 q_0 \geq 0,$$

en toda parte. \square

Así dados $\psi, \hat{\psi} \in C_0^\infty(-1, 1)$ con $\eta_n = P_m(\psi_n)$, $\hat{\eta}_n = P_m(\hat{\psi}_n)$, entonces, por el Lema 6 y la relación de conmutatividad, se tiene que $\langle \nu, \eta_n \hat{q}_n - \hat{\eta}_n q_n \rangle$ está uniformemente acotada.

El próximo resultado muestra que si ψ y $\hat{\psi}$ satisfacen

$$(55) \quad \int_{-1}^1 \psi(t) dt = \int_{-1}^1 \hat{\psi}(t) dt = 0,$$

esta acotación puede ser mejorada.

Lema 9. Sean $\psi, \hat{\psi} \in C_0^\infty(-1, 1)$, se supone además que satisfacen (55). Sea $B_n = \eta_n \hat{q}_n - \hat{\eta}_n q_n$, entonces $B_n|_{Q \cup U} = 0$ y

$$(56) \quad \langle \nu, B_n \rangle \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

Demostración. El hecho de que $B_n|_{Q \cup U} = 0$ sale directo de (55), ya que en este caso $\eta_n|_{Q \cup U} = \hat{\eta}_n|_{Q \cup U} = 0$. Ahora para probar (56) se procede de la siguiente manera, pasando a una subsucesión si es necesario, se puede suponer que $\langle \nu, \eta_n \rangle$, $\langle \nu, q_n \rangle$, $\langle \nu, \hat{\eta}_n \rangle$, $\langle \nu, \hat{q}_n \rangle$ convergen cuando $n \rightarrow \infty$, ya que son acotadas por el Lema 7.

Por el Corolario 8, $B_n^0 = \eta_0 q_n - \eta_n q_0 = O(n^{-1})$ y la relación de conmutatividad se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \nu, \eta_n \rangle \langle \nu, q_0 \rangle - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \nu, q_n \rangle \langle \nu, \eta_0 \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \nu, \eta_n q_0 - q_n \eta_0 \rangle = 0,$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \nu, \hat{\eta}_n \rangle \langle \nu, q_0 \rangle - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \nu, \hat{q}_n \rangle \langle \nu, \eta_0 \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \nu, \eta_n q_0 - q_n \eta_0 \rangle = 0,$$

así el sistema lineal homogéneo de 2×2

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \nu, \eta_n \rangle X + \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \nu, q_n \rangle Y &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \nu, \hat{\eta}_n \rangle X + \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \nu, \hat{q}_n \rangle Y &= 0, \end{aligned}$$

posee soluciones no triviales si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\langle \nu, \eta_n \rangle \langle \nu, \hat{q}_n \rangle - \langle \nu, \hat{\eta}_n \rangle \langle \nu, q_n \rangle] \neq 0,$$

ésto es lo mismo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \nu, \eta_n \hat{q}_n - \hat{\eta}_n q_n \rangle \neq 0,$$

es decir si ν no está concentrada en V , el sistema anterior tiene una solución no trivial dada por $(\langle \nu, q_0 \rangle, -\langle \nu, \eta_0 \rangle)$, por lo tanto el sistema tiene infinitas soluciones, luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \nu, \eta_n \hat{q}_n - \hat{\eta}_n q_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} [\langle \nu, \eta_n \rangle \langle \nu, \hat{q}_n \rangle - \langle \nu, \hat{\eta}_n \rangle \langle \nu, q_n \rangle] = 0,$$

por consiguiente se tiene el resultado requerido. \square

Así, la forma B_n sólo no es nula en las franjas S_α, S_β , siendo además $O(1)$ en la región de intersección $I = S_\alpha \cap S_\beta$.

Se quiere demostrar ahora que $D\pi_1 \tilde{\nu}(0) = D\pi_2 \tilde{\nu}(0) = 0$ usando el carácter coersivo de las formas B_n . Para este fin, se mostrará que para una escogencia

adecuada de $\psi, \hat{\psi}$, el coeficiente del término dominante, es decir, el más alto grado de n en B_n es no negativo y estrictamente mayor que una constante positiva C_δ , en las franjas

$$\begin{aligned}\tilde{S}_\alpha^\delta &= \left\{ (\alpha, \beta) : |\alpha| \leq \frac{\delta}{n} \right\} \cap \tilde{S}_\alpha, \\ \tilde{S}_\beta^\delta &= \left\{ (\alpha, \beta) : |\beta| \leq \frac{\delta}{n} \right\} \cap \tilde{S}_\beta,\end{aligned}$$

para un cierto δ con $0 < \delta < 1$. Así, usando el hecho de que $\langle \nu, B_n \rangle \rightarrow 0$ se obtiene una desigualdad que involucra $D\pi_1\tilde{\nu}(0)$ y $D\pi_2\tilde{\nu}(0)$ que sólo puede ser válida si estas se anulan.

Se fija ahora, $\psi \in C_0^\infty(-1, 1)$ que satisfaga

$$(57) \quad \int_{-1}^1 \psi(t) dt = 0, \quad \int_{-1}^1 t\psi(t) dt = 0.$$

Se supone además que ψ satisface

$$(58) \quad [D^{m-2}\psi(t)]^2 \geq C_\delta \chi_{[-\delta, \delta]}(t),$$

para algún $\delta > 0$, y algún $C_\delta > 0$.

Se define

$$(59) \quad \hat{\psi}(t) = t\psi(t) - (m-2) \int_{-1}^t \psi(s) ds,$$

se observa que $\hat{\psi} \in C_0^\infty(-1, 1)$ y

$$(60) \quad \int_{-1}^1 \hat{\psi}(t) dt = 0.$$

La importancia de un tal par $(\psi, \hat{\psi})$ está en el hecho de que

$$D^{m-2}\hat{\psi} = tD^{m-2}\psi.$$

Además se tiene la relación

$$\begin{aligned}D^{m-2}\psi D^{m-2}\hat{\psi} - D^{m-2}\hat{\psi} D^{m-1}\psi &= (D^{m-2}\psi)^2 D \left(\frac{D^{m-2}\hat{\psi}}{D^{m-2}\psi} \right) \\ &= (D^{m-2}\psi)^2.\end{aligned}$$

Estos hechos dirán que el coeficiente del término dominante de B_n , para un tal par $(\psi, \hat{\psi})$ es no negativo, y por (58), será mayor o igual que una constante veces la función característica en las franjas \tilde{S}_α^δ y \tilde{S}_β^δ , lo cual quedará claro con el resultado siguiente.

Lema 10. La forma $B_n = B_n(\psi, \hat{\psi})$ admite la descomposición en potencias

$$B_n = \sum_{i=0}^{2m} n^{2m-j-1} (\beta - \alpha)^{2m-j} A_{m-j}(n\beta), \quad \text{sobre } \tilde{S}_\beta,$$

$$B_n = \sum_{i=0}^{2m} n^{2m-j-1} (\beta - \alpha)^{2m-j} A_{m-j}(n\alpha), \quad \text{sobre } \tilde{S}_\alpha,$$

2017-2018
 10/11/2018

donde las formas de los coeficientes A_k representan aplicaciones bilineales enviando un par de funciones $(\psi, \hat{\psi})$ a una función $A_k(x) = A_k(\psi, \hat{\psi})(x)$, determinada por derivadas de ψ y $\hat{\psi}$ cuya suma de órdenes es $m + k - 2$. El coeficiente dominante esta dado por

$$A_n = \text{const.} \left(D^{m-2}\psi D^{m-1}\hat{\psi} - D^{m-2}\hat{\psi} D^{m-1}\psi \right).$$

Demostración. Se define el operador

$$\tau(\eta) = \left(\frac{\gamma + 1}{4} \right) \int_\alpha^\beta \eta(\alpha, y) dy,$$

para concretar se considera la franja \tilde{S}_β . Haciendo $\hat{\tau} = \tau(\hat{\eta})$ y $\tau_n = \tau(\eta_n)$, se puede expresar la forma B_n en términos del operador integral τ como sigue

$$\begin{aligned} B_n &= \hat{q}_n \eta_n - q_n \hat{\eta}_n \\ &= \left[\lambda_2 \hat{\eta}_n - \left(\frac{\gamma + 1}{4} \right) \int_\alpha^\beta \hat{\eta}_n(\alpha, y) dy \right] \eta_n \\ &\quad - \left[\lambda_2 \eta_n - \left(\frac{\gamma + 1}{4} \right) \int_\alpha^\beta \eta_n(\alpha, y) dy \right] \hat{\eta}_n \\ &= \hat{\eta}_n \left(\frac{\gamma + 1}{4} \right) \int_\alpha^\beta \eta_n(\alpha, y) dy - \eta_n \left(\frac{\gamma + 1}{4} \right) \int_\alpha^\beta \hat{\eta}_n(\alpha, y) dy \\ &= \tau_n \hat{\eta}_n - \hat{\tau}_n \eta_n. \end{aligned}$$

Sobre \tilde{S}_β las entropías η_n y $\hat{\eta}_n$ pueden ser descritas de la forma

$$(61) \quad \eta_n(\alpha, \beta) = \sum_{j=0}^m a_j (\beta - \alpha)^{m-j} D^{m-j-1} \psi_n(\beta),$$

una integración explícita muestra que la función τ_n

$$\tau_n = \tau(\eta_n) = \left(\frac{\gamma + 1}{4} \right) \int_{-\frac{1}{n}}^\beta \eta_n(\alpha, y) dy,$$

$$\begin{aligned}
\tau(\eta_n) &= \left(\frac{\gamma+1}{4}\right) \int_{-\frac{1}{n}}^{\beta} \sum_{j=0}^m a_j (y-\alpha)^{m-j} D^{m-j-1} \psi_n(y) dy \\
&= \left(\frac{\gamma+1}{4}\right) \int_{-\frac{1}{n}}^{\beta} a_0 (y-\alpha)^m D^{m-1} \psi_n(y) dy \\
&\quad + \left(\frac{\gamma+1}{4}\right) \int_{-\frac{1}{n}}^{\beta} \sum_{j=1}^m a_j (y-\alpha)^{m-j} D^{m-j-1} \psi_n(y) dy,
\end{aligned}$$

satisface

$$(62) \quad \tau_n = \left(\frac{\gamma+1}{4}\right) a_0 (\beta-\alpha)^m D^{m-2} \psi_n(\beta) + \sum_{j=1}^m O\left((\beta-\alpha)^{m-j}\right) n^{m-j-1},$$

aquí los términos con derivadas de orden menor son estimados por la fórmula

$$(63) \quad D^k \psi_n = n^{k+1} D^k \psi(n\beta) = O(n^{k+1}),$$

substituyendo (61) y (62) en B_n junto con las expresiones correspondientes para $\hat{\eta}_n = P_m(\hat{\psi})$ y $\hat{\tau}_n = \tau(\hat{\eta}_n)$ se tiene

$$B_n = \sum_{i=0}^{2m} n^{2m-i-1} (\beta-\alpha)^{2m-i} A_{m-i}(n\beta),$$

donde $A_k(x) = A_k(\psi, \hat{\psi})(x)$ con

$$A_n = \text{const.} \left(D^{m-2} \psi D^{m-1} \hat{\psi} - D^{m-2} \hat{\psi} D^{m-1} \psi \right). \quad \square$$

Finalmente se presenta el resultado concluyente del análisis de las medidas de Young.

Teorema 11. Sea $\tilde{\nu} = (\beta-\alpha)^{2m} \nu$ y $\pi_1 \tilde{\nu}, \pi_2 \tilde{\nu}$ las proyecciones de $\tilde{\nu}$ sobre los ejes coordenados α y β , respectivamente. Entonces,

$$(64) \quad D\pi_1 \tilde{\nu}(t) = D\pi_2 \tilde{\nu}(t) = 0, \quad \alpha_0 < t < \beta_0.$$

Demostración. Como ya se ha mencionado basta probar (64) para $t = 0$. Con lo que fué visto antes y las hipótesis (57) - (60) sobre $(\psi, \hat{\psi})$ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\langle \nu, B_n \rangle &= \langle \nu | \tilde{S}_\alpha, B_n \rangle + \langle \nu | \tilde{S}_\beta, B_n \rangle + \langle \nu | I, B_n \rangle \\
&\geq C \left\{ \langle \nu | \tilde{S}_\alpha^\delta, n^{2m-1} (\beta-\alpha)^{2m} \rangle + \langle \nu | \tilde{S}_\beta^\delta, n^{2m-1} (\beta-\alpha)^{2m} \rangle \right\} \\
&\quad + \langle \nu | \tilde{S}_\alpha, O(n^{2m-1}) \rangle + \langle \nu | \tilde{S}_\beta, O(n^{2m-1}) B_n \rangle + \langle \nu | I, B_n \rangle.
\end{aligned}$$

Dividiendo por n^{2m-2}

$$\begin{aligned} \frac{\langle \nu, B_n \rangle}{n^{2m-2}} \geq C \left\{ \frac{\langle \nu | \tilde{S}_\alpha^\delta, n^{2m-1} (\beta - \alpha)^{2m} \rangle}{n^{2m-2}} + \frac{\langle \nu | \tilde{S}_\beta^\delta, n^{2m-1} (\beta - \alpha)^{2m} \rangle}{n^{2m-2}} \right\} \\ + \frac{\langle \nu | \tilde{S}_\alpha, O(n^{2m-1}) \rangle}{n^{2m-2}} + \frac{\langle \nu | \tilde{S}_\beta, O(n^{2m-1}) B_n \rangle}{n^{2m-2}} + \frac{\langle \nu | I, B_n \rangle}{n^{2m-2}}, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{\langle \nu, B_n \rangle}{n^{2m-2}} \geq C \left\{ \langle \nu | \tilde{S}_\alpha^\delta, n (\beta - \alpha)^{2m} \rangle + \langle \nu | \tilde{S}_\beta^\delta, n (\beta - \alpha)^{2m} \rangle \right\} \\ + O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{\langle \nu | I, B_n \rangle}{n^{2m-2}}. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$(\beta - \alpha) = O\left(\frac{1}{n}\right) \implies n(\beta - \alpha)^{2m} = O\left(\frac{1}{n}\right)^{2m-1} = (\beta - \alpha)^{2m-1},$$

además

$$\begin{aligned} 0 \leq \left\langle \nu, \frac{(\beta - \alpha)^{2m}}{\left(\frac{2\delta}{n}\right)} \chi_{\left[-\frac{\delta}{n}, \frac{\delta}{n}\right] \times \mathbb{R}} \right\rangle + \left\langle \nu, \frac{(\beta - \alpha)^{2m}}{\left(\frac{2\delta}{n}\right)} \chi_{\mathbb{R} \times \left[-\frac{\delta}{n}, \frac{\delta}{n}\right]} \right\rangle \\ = \left\langle \nu, \frac{n}{2\delta} (\beta - \alpha)^{2m} \chi_{\left[-\frac{\delta}{n}, \frac{\delta}{n}\right] \times \mathbb{R}} \right\rangle + \left\langle \nu, \frac{n}{2\delta} (\beta - \alpha)^{2m} \chi_{\mathbb{R} \times \left[-\frac{\delta}{n}, \frac{\delta}{n}\right]} \right\rangle \\ = \left\langle \nu, \frac{1}{2\delta} (\beta - \alpha)^{2m-1} \chi_{\left[-\frac{\delta}{n}, \frac{\delta}{n}\right] \times \mathbb{R}} \right\rangle + \left\langle \nu, \frac{1}{2\delta} (\beta - \alpha)^{2m-1} \chi_{\mathbb{R} \times \left[-\frac{\delta}{n}, \frac{\delta}{n}\right]} \right\rangle \\ \leq C \left\{ \left\langle \nu, (\beta - \alpha)^{2m-1} \chi_{\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \times \mathbb{R}} \right\rangle + \left\langle \nu, (\beta - \alpha)^{2m-1} \chi_{\mathbb{R} \times \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]} \right\rangle \right\} \\ + \frac{1}{n^{2m-2}} |\langle \nu, B_n \rangle| \left\} + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Haciendo $\nu^* = (\beta - \alpha)^{2m-1} \nu$ en la última desigualdad, tomando el \limsup cuando $n \rightarrow \infty$, se obtiene

$$(65) \quad 0 \leq \bar{D}\pi_1 \tilde{v}(0) + \bar{D}\pi_2 \tilde{v}(0) \leq C \{ \pi_1 v^*(0) + \pi_2 v^*(0) \}.$$

Note que cuando $m = 1$, el hecho de que $\langle \nu, B_n \rangle \rightarrow 0$ es relevante. El lado derecho de la desigualdad (65) es finito. Ahora, si $\bar{D}\pi_1 \tilde{v}(0) > 0$, o, $\bar{D}\pi_2 \tilde{v}(0) > 0$, entonces $\pi_1 v^*(0) > 0$, o, $\pi_2 v^*(0) > 0$ pero se tendría que $\bar{D}\pi_1 \tilde{v}(0) = +\infty$, o, $\bar{D}\pi_2 \tilde{v}(0) = +\infty$, lo que daría una contradicción. Luego se debe tener que

$$\bar{D}\pi_1 \tilde{v}(0) = \bar{D}\pi_2 \tilde{v}(0) = 0,$$

esto es exactamente lo que se quería demostrar. \square

Es importante mencionar que el análisis de Diperna presentado aquí, fue extendido a todo γ , con $1 < \gamma \leq \frac{5}{3}$, por Diang Xiayi, Luo Peizhu y Gui-Qiang Chen en [2], donde está demostrada la convergencia de los esquemas de Godunov y Lax-Friedrichs para el problema de Cauchy para el sistema (1), construyendo así una solución débil para el mismo.

Referencias

- [1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press Inc. (1975).
- [2] G. Q. Chen, L. Peozhu & D. Xiayi, *Convergence of the Lax-Friedrichs Scheme for Isentropic Gas Dynamics, (I), (II)*, Acta Mathematica Scientia **5** (1985).
- [3] R. J. Diperna, *Convergence of Approximate Solutions of Conservation Laws* **82** (1983), Arch. Rat. Mech. Anal., 27–70.
- [4] R. J. Diperna, *Convergence of the Viscosity Method for Isentropic Gas Dynamics*, Comm. Math. Phys. **91** (1983), 1–30.
- [5] L. C. Evans & R. F. Gariepy, *Lectures Notes on Measure Theory and Fine Properties of Functions*, University of Kentucky, Department of Mathematics, Kentucky EPSCoR Preprint Series (1990).
- [6] N. Hermano Frid, *Compacidade Compensada Aplicada às Leis de Conservação*, 19º Colóquio Brasileiro de Matemática (1993).
- [7] S. Kesavan, *Functional Analysis and Applications*, Ed. John Wiley & Sons (1989).
- [8] P. Lax, *Hyperbolic Systems of Conservation Law (II)*, Comm. Pure Appl. Math. **10** (1957).
- [9] L. Rendón, *Un Problema de Riemann para un P-Sistema con Flujo no Lipschitziano*, Lecturas Matemáticas **19** (1998), no. 1.
- [10] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill (1991).
- [11] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Ed. Springer-Verlag (1983).
- [12] L. Tartar, *Compensated Compactness and Applications to Partial Differential Equations*, Research Notes in Mathematics, Nonlinear Analysis and Mechanics, Heriot-Watt Symposium Vol 4 ed. R.J.Knops New York Pitman Press (1979).
- [13] I. N. Vekua, *New Methods for Solving Elliptic Equations*, North-Holland Publishing Company-Amsterdan (1968).
- [14] A. L. Vivas, *Estudio de la Dinámica de los Gases Isentrópicos*, Tesis de Maestría en Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia (1999).
- [15] G. N. Watson & E. T. Whittaker, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press (1935).