Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen V (1998), pp.53–79

EL LEGADO HISTÓRICO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS. CONSIDERACIONES (AUTO)CRÍTICAS

JUAN E. NÁPOLES VALDÉS(*)

Resumen. En el trabajo mostramos la trascendencia histórica de las contribuciones en el campo de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y su significado, no sólo para las propias Matemáticas, sino para otras ciencias afines (como la Mecánica), en las que se ha ido desarrollando el aparato conceptual y metodológico actual a raíz del desarrollo de las investigaciones en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Abstract. In this paper we present the historical influence of advances in Ordinary Differential Equations on the development of Mathematics and Mechanics.

Keywords. Differential equations, history, methods and concepts.

1. Introducción

"Lo contrario de una verdad no es el error, sino una verdad contraria"
Pascal

Como se ha repetido tantas veces, el libro de la Naturaleza -según Galileo- está escrito en lenguaje matemático y para explicar un fenómeno es necesario saber leer sus caracteres: puntos, líneas, ... Esto significa que, más que atribuir el movimiento de los objetos "graves" -los que se dirigen al centro de la Tierra- a una *causa*, lo que se debe hacer es descubrir la *regla* que lo regula. Por ello, Galileo, al enunciar su solución al problema de la caída libre, lo hace con una aceleración constante.

(*)Texto recibido 19/2/99, revisado 28/6/99. Juan E. Nápoles Valdés, Universidad de la Cuenca del Plata, Plácido Martínez 964, Argentina. E-mail: cplata@compunort.com.ar

Con Newton, el problema se resuelve suponiendo la existencia de una relación lineal entre la aceleración en cada punto de la trayectoria y la fuerza que en cada punto actúa sobre el cuerpo. Una vez conocidas la expresión de la fuerza actuante y las condiciones iniciales, la trayectoria se puede calcular y, para sistemas que tengan sentido físico, esto significa que, dado un estado del sistema, los estados futuros quedan unívocamente determinados: éste es el sentido del determinismo que Laplace creyó que la Mecánica de su tiempo había puesto al descubierto. La ciencia, se decía, mostraba que el mundo funcionaba como un mecanismo de relojería.

Y, sin embargo, en la práctica había ciertos problemas que rehusaban someterse a este esquema, ya sea porque la ecuación diferencial no tenía solución en cuadraturas y había que conformarse con soluciones aproximadas, o porque la gran cantidad de ecuaciones involucradas hacía imposible el conocimiento de la solución del sistema. Esto apuntaba a que posiblemente nuestro conocimiento y predicción de los fenómenos podían estar vedados en ciertas situaciones que no pudieran corresponder a simplificaciones de la realidad, lo cual es el caso con la mayoría de los modelos estudiados.

Sucedió así con la Astronomía y con su intento de predecir con toda exactitud eclipses y movimientos de planetas (sirva como un buen ejemplo, el Problema de los N cuerpos). Afortunadamente, Poincaré apuntó a la dirección en que muchos de estos problemas debían ser tratados: la Teoría Cualitativa, o más general, el estudio de los Sistemas Dinámicos, como se le ha venido a llamar en las últimas décadas. Puntualizaremos que la historia toma, en ocasiones, el camino opuesto al indicado. Tal es el caso de la ecuación del péndulo libre, en la cual el estudio cuantitativo precedió al cualitativo.

En los últimos 50 años, hemos presenciado un notable desarrollo de un campo de la Física–Matemática, designado con el nombre de *Mecánica No Lineal*. Este término, probablemente, no es del todo correcto; los cambios no han ocurrido en la propia Mecánica sino, en su mayoría, en las técnicas de resolución de sus problemas, sobre todo las que requieren ecuaciones diferenciales, que ahora utilizan ecuaciones diferenciales no lineales.

Esta no es una idea nueva en la Mecánica. En efecto, estos problemas no lineales son conocidos desde los estudios de Euler, Lagrange y otros geómetras, suficientes para ilustrar la antigüedad de las temáticas no-lineales. La principal dificultad de estos estudios, hoy clásicos, radica en la ausencia de un método general para tratar estos problemas, los cuales eran tratados, sobre todo, con artificios especiales para obtener su solución.

En lo que sigue, exhibiremos la trascendencia histórica de las contribuciones en el campo de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO por comodidad) y su significación no sólo para las propias Matemáticas, sino para otras ciencias afines como la Mecánica. Mostraremos cómo se ha ido desarrollando el aparato conceptual y metodológico de la matemática actual, a raíz del desarrollo de las investigaciones propias de las EDO, y cómo en éstas convergen ahora científicos de disciplinas, algunas no tan afines, que se han compenetrado perfectamente con las propias EDO[(1)]. Con esto destacamos, de paso, un rasgo prominente de la matemática actual: el desarrollo de sus métodos a partir de investigaciones específicas diversas, rasgo que empieza a ser evidente a mediados del siglo pasado y que en estos momentos (dado el nivel de integración de las diferentes disciplinas matemáticas) no puede ser obviado.

2. Génesis

"Hay una asombrosa imaginación, incluso en la ciencia de las matemáticas... Repetimos, hay mucha más imaginación en la cabeza de Arquímedes que en la de Homero"

Voltaire

El *Calculus* apareció impreso, por primera vez, en una memoria de seis páginas de Leibniz, en el *Acta Eruditorium* de 1684, que contenía una definición de la diferencial y donde dio reglas sencillas para su cálculo en sumas, productos, cocientes, potencias y raíces[(2)]. Leibniz incluyó también pequeñas aplicaciones a problemas de tangentes y puntos críticos.

Desafortunadamente, este corto informe contuvo algunos errores, lo que contribuyó a que resultara enigmático a los matemáticos de la época. La base del método de fluxiones de Newton fue publicada primero, más bien impropiamente, como lemas en su *Principia* de 1687. Aquí encontramos algunas propiedades de límites y direcciones para encontrar "momentos" infinitesimales pequeños de productos, potencias y raíces[(3)].

Se dice que cuando Huygens, sobre 1690, deseó enseñar el nuevo método, no pudo encontrar un hombre calificado para exponerlo. Newton entre 1669 y 1676 compuso varios tratados sobre los elementos de las fluxiones, pero no aparecieron impresos hasta 1704. John Craig, en 1685 y 1693, publicó dos trabajos, basados en parte sobre el método de Leibniz, pero éstos no fueron entendidos como introducciones y presentaban, además, dificultades con la lectura, debidas a la foma geométrica en la cual fueron presentados.

En el continente, los hermanos Bernoulli fueron pioneros en el nuevo cálculo; precisamente Jean fue quien instruyó a L'Hôpital, quien a su vez, preparó a Huygens. Esta fue la atmósfera de entusiasmo que rodeó al nuevo cálculo al cerrar el siglo XVII. El mismo Jean, sobre 1691–1692, preparó dos pequeños libros de textos, pero su publicación fue aplazada, y el que trataba sobre el cálculo integral apareció, finalmente, en 1742, y el cálculo diferencial, casi doscientos años después(4). Es por tanto comprensible la atención que se le dirigió al libro de texto de L'Hôpital *Analyse des infiniment petits*, como introducción a un mundo nuevo en las matemáticas.

Ante los creadores del *Calculus*, el problema de la integración de las ecuaciones diferenciales, en su inicio, se presentaba como parte de un problema más general: el problema inverso del análisis infinitesimal. Naturalmente, la atención, al inicio, se concentraba en las diferentes ecuaciones de primer orden. Su solución se buscaba en forma de funciones algebraicas o trascendentes elementales, con ayuda de métodos más o menos exitosamente elegidos. Para reducir este problema a la operación de búsqueda de funciones primitivas, los creadores del análisis y sus discípulos tendían en cada ecuación diferencial a separar las variables. Este método, con el que actualmente comienzan los textos sistemáticos de la teoría de ecuaciones diferenciales, resultó, al parecer, históricamente el primero.

En primer lugar, señalaremos que el término *aequatio differentialis* fue primero usado por Leibniz (en un sentido bastante restringido) en 1676 para denotar una relación entre las diferenciales dx y dy y dos variables x e y(5), concepción que se conserva hasta los tiempos de Euler (en los años 1768–1770). Así mismo, es importante destacar que las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) surgen prácticamente con la aparición del *Calculus*. En la célebre polémica Newton-Leibniz se tiene un gran hito cuando Newton comunica (por medio de Oldenburg) a Leibniz el siguiente anagrama:

$$6a\ cc\ d\ ae\ 13e\ ff\ 7i\ el\ 9n\ 4o\ 4q\ rr\ 4s\ 9t\ 12\ v\ x$$

el cual en latín quiere decir "*Data aequetione quotcunque fluentes quantitaes involvente fluxiones invenire et veceversa*", o bien: "Dada una ecuación con cantidades fluentes, determinar las fluxiones y viceversa". Este fue, como señala Arnold, el descubrimiento fundamental de Newton, que consideró necesario mantener en secreto, y el cual en lenguaje matemático contemporáneo significa: "Es útil resolver ecuaciones diferenciales". Curiosamente, Ince afirma que la fecha de aparición de éstas es el 11 de Noviembre de 1675, cuando Leibniz escribió la ecuación $\int y dy = y^2/2$ (continúa Ince)... Por lo tanto, no habría resuelto una ecuación diferencial, la cual por sí misma es un asunto trivial, sino que habría fraguado una herramienta poderosa, el signo de integral.

La primera clasificación de las EDO de primer orden (en lenguaje de la época ecuaciones fluxiales) fue propuesta por Newton. El primer tipo estaba compuesto de aquellas ecuaciones en las cuales dos fluxiones x', y' y un fluente x o y están relacionados, como por ejemplo $x'/y' = f(x)$ o $x'/y' = f(y)$, o bien como escribiríamos en la actualidad $dy/dx = f(x)$, $dy/dx = f(y)$; el segundo tipo abarcaba aquellas ecuaciones que involucran dos fluxiones y dos fluentes $x'/y' = f(x,y)$ $(dy/dx = f(x,y))$. Y, finalmente, el tercer tipo abarcaba a ecuaciones que involucran más de dos fluxiones, las cuales en la actualidad conducen a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. En la Teoría de Fluxiones, Newton resuelve dos problemas principales, formulados tanto en términos mecánicos como en términos matemáticos:

1. Determinación de la velocidad del movimiento en un momento de tiempo dado. De otro modo: determinación de la relación entre las fluxiones dada la relación entre los fluentes.
2. Dada la velocidad del movimiento, determinación del espacio recorrido en un tiempo dado. En términos matemáticos: determinación de la relación entre los fluentes dada la relación entre fluxiones.

El primer problema, llamado *problema directo*, representa el problema de la diferenciación implícita de funciones, en el caso general, y obtención de la ecuación diferencial que expresa las leyes del fenómeno. El segundo, el *problema inverso*, es el problema de la integración de las ecuaciones diferenciales presentadas en su forma más general. En particular, en este problema se trata de la búsqueda de las funciones primitivas. Los enfoques de Newton para la solución de un problema tan general y los procedimiento de su resolución se construyeron paulatinamente.

Ante todo, la simple inversión de los resultados de la búsqueda de fluxiones le proporcionó una enorme cantidad de cuadraturas. Con el tiempo, advirtió la necesidad de agregar, en esta inversión, una constante aditiva. Después resultó que la operación de inversión, incluso de ecuaciones comparativamente sencillas como $Mx' + Ny' = 0$, obtenidas en el cálculo de las fluxiones, no siempre era posible y no se obtenía la función original. Newton advirtió esto, en el caso en que $M = M(x, y)$ y $N = N(x, y)$ fueran funciones racionales enteras.

Cuando la inversión inmediata del método directo no conducía al éxito, Newton acudió al desarrollo de funciones en series de potencias como medio universal de la teoría de las fluxiones. Resolvió ecuaciones dadas, por ejemplo, respecto a y'/x' o (poniendo $x = 1$) respecto a y, y desarrolló la función del miembro derecho en series de potencias, integrando a continuación la serie término a término. Este método lo comunicó mediante otro anagrama, el cual dice lo siguiente: "El primer método consiste en la extracción de una cantidad fluente de la ecuación que contiene su fluxión; el segundo en cambio consiste en la mera sustitución de una serie en lugar de una cantidad incógnita cualquiera, de la cual pueden deducirse fácilmente las otras, y en comparación de los términos homólogos de la ecuación resultante para obtener los términos de la serie supuesta"(6).

En la última década del siglo XVII los hermanos Bernoulli (James y Johann) introdujeron términos como el de "integrar" una ecuación diferencial, así como el proceso de "separación de variables" (*separatio indeterminatarum*) de una ecuación diferencial.

Alrededor de 1692, Johann Bernoulli I (1667–1748) encontró otro método, utilizado en una serie de problemas: la "multiplicación por un factor integrante" (sobre todo, para resolver ecuaciones en las cuales el método anterior no se podía aplicar, digamos la ecuación $\alpha x dy - y dx = 0$, ya que aunque era posible separar las variables no se podía integrar, pues en la época no se había introducido el logaritmo $\int dx/x = lnx$), método también usado por su sobrino Daniel (1700–1782), a partir de 1720.

Este método puede ser considerado como general para ecuaciones de la forma:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Es difícil realizarlo, no obstante, debido a la elección del factor de integración. La costumbre de buscar factores de integración como método inicial para encontrar la solución de una ecuación diferencial fue mantenida hasta los tiempos de Cauchy (1821). Leibniz (1693), y después Johann Bernoulli I, con ayuda de la sustitución $y = xt$, resolvieron las ecuaciones homogéneas de primer orden. La ecuación de Bernoulli (Johann I):

$$ady = yp(x)dx + by^n q(x)dx,$$

(a, b constantes) fue transformada mediante la sustitución $y^{1-n} = v$ (primero por Leibniz en 1693 y luego por Johann I en 1697) en una ecuación diferencial lineal de primer orden; aquí Johann anticipó el método de variación de las constantes introducido en 1775 por Lagrange. Finalmente, hacia el año 1700, Johann logró resolver la ecuación diferencial lineal de orden n:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} + y = 0,$$

introduciendo un factor integrante de la forma xP y disminuyendo, sucesivamente, el orden de la ecuación.

Sin embargo, los métodos eran incompletos y la teoría general de las ecuaciones diferenciales, a comienzos del siglo XVIII, no podía ser propuesta.

Hacia finales del siglo XVII y principios del siglo XVIII, la concepción que se tenía del Universo cambia, debido en gran medida, a los aportes tanto matemáticos como metodológicos de ese genio singular que fue Isaac Newton (1642–1727). Se ve que la Naturaleza tiene una serie de regularidades que se pueden analizar y predecir; de hecho, la ciencia en el siglo XVIII estableció tantas leyes que gobiernan fenómenos naturales, que muchos pensaron que era poco lo que quedaba por descubrir. La tarea de los científicos era dilucidar las repercusiones de estas leyes en el ámbito de los fenómenos particulares.

Uno de los principales logros de este siglo, fue establecer ecuaciones para modelar fenómenos físicos, aún cuando se tuvieran grandes éxitos al tratar de resolverlas. Basta, como ejemplo, citar a Euler (1707–1783): "Si no nos está permitido alcanzar el entendimiento completo del movimiento de un fluido o de la mecánica o los principios conocidos del movimiento, no es a ellos a los que debemos echarles la culpa. Es el análisis el que nos muestra su debilidad en este respecto". Por otra parte, los notables avances en la solución de las ecuaciones diferenciales (en los cuales tuvo Euler notable incidencia, como ya veremos) hacían pensar que los problemas no resueltos, tales como el movimiento de los tres cuerpos bajo la influencia de la gravedad, eran excepciones.

Resultados de carácter general comienzan a advertirse a mediados de los años 20 del siglo XVIII. En 1724, el matemático italiano J. F. Riccati (1676–1754) estudió la ecuación:

$$dy/dx + ay^2 = bx^\alpha,$$

(α, a, b constantes), determinando la integrabilidad en funciones elementales de ésta. De aquí que (y a propuesta de D'Alembert en 1769) la ecuación lleve su nombre, denominación extendida a todas las ecuaciones del tipo:

$$dy/dx = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x),$$

(P, Q y R funciones continuas). La investigación de esta ecuación fue ocupación de muchos matemáticos: Leibniz, Goldbach (1690-1764), Johann I, Nicolas I (1687-1759) y Daniel Bernoulli, entre otros. Daniel estableció que ésta se integra mediante funciones elementales si $\alpha = -2$ ó $\alpha = 4k/(2k-1)$ k entero[(7)].

En el año 1738, Euler aplicó a la resolución de esta ecuación la teoría de series; más adelante descubrió que, cuando existen dos soluciones particulares, la integración de la ecuación se reduce a cuadraturas y que, si se conoce una solución particular v, entonces ella puede ser transformada en una ecuación lineal mediante la transformación $y = v + 1/z$.

Ya a finales de los años 30 del siglo XVIII, Euler elaboró un algoritmo de resolución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, basado en la reducción del orden de ciertas ecuaciones homogéneas con ayuda de la función exponencial. En el año 1743, en uno de sus trabajos, fue publicado el método de resolución de una ecuación lineal con ayuda de la sustitución $y = e^{kx}$ y, en el caso de raíces reales múltiples de la ecuación característica, con la ayuda de $y = u\ e^{kx}$.

En el caso de la existencia de un par de raíces complejas $\alpha \pm \beta_i$, utilizó la sustitución $y = u\ e^{\alpha x}$, sustituciones que reducen el problema a la ecuación:

$$d^2y/dx^2 + \beta^2 y = 0,$$

la forma trigonométrica de cuya solución era conocida por Euler desde el año 1740.

Es a Euler a quien le corresponde la primera sistematización de los trabajos anteriores en sus *Instituciones Calculi Integralis* (1768-1770), donde encontramos lo que se puede llamar la primera teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Esta obra contiene una buena parte (y mucho más) del material que encontraríamos en un libro de texto actual, como el estudio de las ecuaciones diferenciales de 1er orden (y su correspondiente clasificación en "separables", "homogéneas", "lineales", "exactas"), las de segundo orden (lineales, y las susceptibles de reducir el orden), y su generalización a las de orden superior. Así mismo, encontramos el método de series de potencias para resolver ecuaciones como $y'' + ax^n y = 0$. Desde nuestra perspectiva, lo que vale destacar de este trabajo es su forma de *conceptualizar* las EDO; la expresión dy/dx significa para Euler un cociente entre diferenciales y no nuestra derivada actual; en una ecuación de segundo orden aparecen los diferentes ddy, dx^2 en lugar de la segunda derivada y''.

La búsqueda de un factor de integración era utilizada por Euler, en forma frecuente (1753), para reducir el orden de una ecuación diferencial. Así, para resolver la ecuación de segundo orden lineal no homogénea procede reduciendo el orden en la siguiente forma. Sea la ecuación:

$$X = Ay + Bdy/dx + Cddy/dx^2;$$

Euler multiplica por el factor $e^{\alpha x}dx$ y obtiene:

$$e^{\alpha x}dx = (e^{\alpha x}Aydx + e^{\alpha x}Bdy + e^{\alpha x}Cddy/dx^2);$$

como se requiere que el factor $e^{\alpha x}dx$ reduzca el orden en uno, se supone la integral encontrada y se iguala con la ecuación diferencial lineal de primer orden $e^{\alpha x}(A'y + B'dy/dx)$, es decir, se establece la relación:

$$(e^{\alpha x}Aydx + e^{\alpha x}Bdy + e^{\alpha x}Cddy/dx^2) = e^{\alpha x}(A'y + B'dy/dx).$$

Para que esta igualdad se sostenga se requiere que la diferencial del lado derecho sea igual al integrando del primer miembro, donde A', B' y α son constantes a determinar en términos de A, B y C. Igualando tendremos:

$$A = A'\alpha,\ B = A' + B'\alpha,\ C = B'$$

de donde:

$$A' = A/\alpha,\ B' = C,\ B = A/\alpha + C\alpha.$$

Es decir, α queda determinada por la raíces de la ecuación cuadrática:

$$A - B\alpha + C\alpha^2 = 0.$$

De esta forma la ecuación diferencial de segundo orden se reduce a la ecuación diferencial de primer orden:

$$B'dy/dx + A'y = e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X dx.$$

D'Alembert (en 1766) encontró que la solución general de una ecuación lineal no homogénea es igual a la suma de una cierta solución particular y la solución general de la correspondiente ecuación homogénea.

Muchos matemáticos (en particular Clairaut y Euler) siguieron elaborando el método del factor integrante. Así, en los años 1768-1769, Euler investigó la clase de ecuaciones diferenciales que tienen factor integrante de un tipo dado, e intentó extender estas investigaciones a ecuaciones de orden superior. Finalmente, cerraremos esta etapa mencionando las contribuciones de Lagrange, las cuales, al igual que Euler, se situaron hacia el último cuarto del siglo XVIII. Lagrange demostró que las solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n, con coeficientes constantes, es de la forma $y = c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$ donde $y_1, \ldots, y_n$ son un conjunto de soluciones linealmente independientes y c_1, $c_2, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias; así mismo, también descubrió en su forma general el "método de variación de parámetros (o constantes)", hacia 1774.

De esta manera, en el siglo XVIII, el trabajo consistía en la solución de ecuaciones particulares específicas. Así mismo, fueron elaboradas las premisas para la creación de las bases para la teoría general, con una serie de conceptos fundamentales, sobre los que hablaremos en el siguiente epígrafe.

Simultáneamente con estos trabajos, se produjeron diversos desarrollos en la Mecánica. En 1750, Lagrange tomó las ideas dinámicas de Euler y produjo una reformulación de la Dinámica. Dos ideas importantes se desprenden de su trabajo: la primera, fue *el principio de conservación de la energía* y la segunda, el introducir *coordenadas generalizadas* en el formalismo de la Mecánica, formalismo que permitió interpretar la Mecánica desde diversos puntos de vista de la Matemática. Más tarde, William R. Hamilton reformuló la Dinámica de un sistema, logrando una mayor generalidad.

Hacemos mención aquí de una rama particular de la Física: la Mecánica Analítica, fundada por Euler, D' Alembert (1717-1783) y algunos otros científicos, y genialmente originada por Lagrange (1736-1813) en su obra maestra *La Mecanique Analytique*, que proyectó en Turín cuando tenía 19 años, aunque fue publicada en París en 1788 ya cuando contaba con 52 años de edad. En esta obra, Lagrange hace notar que la ciencia de la Mecánica puede ser considerada como una geometría de cuatro dimensiones: propone una nueva forma de considerar la Mecánica que se hizo popular desde 1915, cuando Einstein la utilizó en su Teoría Especial, de principios de siglo.

El estudio analítico de la Mecánica rompe con la tradición griega pues, a diferencia de Newton, que consideraba útiles las figuras en sus estudios de los problemas mecánicos, Lagrange mostró que se alcanzaban mejores resultados si desde el principio se empleaban métodos analíticos generales.

Precisamente, ésta es una característica que queremos destacar de la Mecánica Analítica: su carácter bifronte. Por un lado, es teoría de los sistemas mecánicos, el conjunto de esquemas estructurales de la mecánica clásica y, por el otro, *ciencia puramente matemática* (C. Lanczos), composición de métodos y estructuras matemáticas interrelacionadas, que pueden estudiarse independientemente del contenido físico.

Desde este punto de vista, la mecánica analítica puede considerarse parte de la matemática moderna. Esto fue comprendido genialmente por Lagrange desde el siglo XVIII.

3. Fundamentos generales

"La suerte está echada, he escrito mi libro, lo leerán en la época presente o en la posteridad, no importa cuándo; bien puede esperar un siglo un lector, puesto que Dios ha esperado seis mil años un intérprete de sus palabras"

Kepler

En el año 1743 surgieron los conceptos de integral particular y general, encontradas por Euler ya en 1739. Ellos fueron publicados en la memoria donde se estudia un único algoritmo de resolución de ecuaciones lineales de orden n con coeficientes constantes. En sus trabajos de estos años, Euler consideró también las soluciones singulares de una serie de ecuaciones, las cuales ya eran conocidas del *Methodus incrementorum...* (1715) de Brook Taylor (1685-1731).

Taylor advirtió una solución singular, considerando la ecuación:

$$4x^3 - 4x^2 = (1 + z^2)^2 (dx/dz)^2. \tag{1}$$

Mediante la sustitución $x = v/y^2$, $v = 1 + z$, transformó (1) en la ecuación:

$$y^2 - 2zyy' + vy'^2 = 1. \tag{2}$$

Diferenciando ésta, tenemos:

$$2y''(vy' - zy) = 0,$$

y a continuación, igualando a cero la expresión entre paréntesis y sustituyendo en la ecuación (2), $y' = zy/v$, Taylor obtuvo la expresión $y^2 = v$, $x = 1$, la cual denominó "cierta solución singular del problema". La poca claridad de este tipo de solución, y su denominación de singular, se conservó en las obras de Clairaut, el cual consideró (en 1736) la solución singular de la ecuación:

$$y = (x + 1)dy/dx - (dy/dx)^2.$$

Euler, no obstante, ya en el año 1736, advirtió que, si se encuentra un factor integrante $\mu(x, y)$ de la ecuación diferencial, entonces $1/\mu = 0$ puede dar lugar a una solución singular. Por ejemplo:

$$xdx + ydy = (x^2 + y^2 - r^2)^{1/2}dy,$$

tiene como factor integrante $\mu = (x^2 + y^2 - r^2)^{-1/2}$ y la solución singular será $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

La claridad en este concepto fue obtenida por Lagrange sólo en los años 1774-1776, dando una interpretación geométrica de las mismas como envolvente de las curvas integrales. Una exposición sistemática y unificada la dio el propio Lagrange en 1801-1806 en sus *Lecciones sobre el cálculo de funciones.*

La teoría general, de la que tanto se había hablado, aparece expuesta por vez primera, como ya dijimos, en el famoso *Instutiones...* de Euler, obra que consta de tres tomos que vieron la luz sucesivamente en los 1768, 1769 y 1770, con un suplemento en 1794, culminando la serie de libros de Euler dedicados a la exposición sistemática del análisis contemporáneo.

Existe una etapa intermedia entre esa época y los trabajos de Poincaré y Liapunov, caracterizada fundamentalmente, por un lado, por los métodos en series para la búsqueda de soluciones, los cuales produjeron las llamadas funciones especiales y, por otro, por la investigación sobre los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones de una ecuación diferencial, los cuales sirvieron, como afirma Ince, "para determinar, en forma rigurosa, la pregunta de la existencia de soluciones de aquellas ecuaciones que no fueron integrables por métodos elementales"[(8)].

Por otra parte, el doble carácter de la Mecánica Analítica la convierte en medio natural donde resulta posible el proceso de conversión de "lo mecánico" en "lo matemático".

De esta manera, los estímulos "externos" del desarrollo de la matemática, provenientes de la Mecánica, se convierten en factores "internos" de este desarrollo. Se pensó, entonces, que era posible describir la Naturaleza con un conjunto pequeño de leyes. Estas leyes, como regla general, eran establecidas en términos de ecuaciones diferenciales. Dado un estado natural del sistema en un tiempo determinado y las leyes que lo describen, se consideraba que, en principio, se podía determinar, con toda precisión, todo estado futuro.

Por desgracia, estas consideraciones de carácter general pronto mostraron su debilidad al intentar reducir las divergencias entre la teoría y la práctica. El uso de la teoría newtoniana para calcular las órbitas planetarias requirió mucho trabajo y esfuerzo, por parte de los más grandes científicos de los siglos XVIII y XIX, desde Euler a Lagrange, pasando por Laplace y Hamilton, y culminando con Poincaré. Todos estos aportes vinieron a conformar lo que se conoció con el nombre de Mecánica Celeste y que fue anticipada por Copérnico[(9)]. Esta disciplina tendría como objetivo estudiar uno de los problemas más difíciles de la física y las matemáticas, el llamado problema de los N cuerpos (en nuestro caso el Sol y los planetas) que interactúan gravitacionalmente.

Para fines del siglo XIX, se había alcanzado un grado tal de precisión, que el descubrimiento de una discrepancia de ocho segundos a lo largo del siglo, en el movimiento aparente de Mercurio, provocó una crisis de enorme magnitud, que desembocó, a los pocos años, en la Teoría Especial de la Relatividad[(10)].

Como hemos señalado, la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias comenzó a desarrollarse en el siglo XVII, simultáneamente con el surgimiento del cálculo diferencial e integral. Se puede decir que la necesidad de resolver las ecuaciones diferenciales para las exigencias de la Mecánica (es decir, para encontrar las trayectorias de los movimientos) fue, a su vez, el estímulo para la creación del nuevo método de cálculo por Newton y Leibniz. Las leyes de Newton constituyen un modelo matemático simple del movimiento mecánico.

A través de las ecuaciones diferenciales ordinarias, o de la aplicación del nuevo cálculo a los problemas de la Geometría y la Mecánica, se lograron resolver problemas que durante mucho tiempo no admitían solución. En la Mecánica Celeste, resultó posible, no sólo obtener y explicar hechos ya conocidos, sino también hacer nuevos descubrimientos (por ejemplo, el descubrimiento del planeta Neptuno por Leverrier en 1846, sobre la base del análisis de las ecuaciones diferenciales). De esta manera, el primer rasgo de las ecuaciones diferenciales es su estrecha vinculación con las aplicaciones; en otras palabras, la teoría de las ecuaciones diferenciales "nació" de las aplicaciones. Exactamente, en la teoría de las ecuaciones diferenciales, la matemática actúa como parte integrante de las ciencias naturales, sobre la cual se fundamenta la deducción y compresión de la regularidades cualitativas y cuantitativas que componen el contenido de las ciencias de la Naturaleza. Más aún, las ciencias naturales son, para la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, una fuente maravillosa de nuevos problemas; ellas determinan en medida considerable la dirección de sus investigaciones y le otorgan una orientación correcta. Es más, las ecuaciones diferenciales no pueden desarrollarse sin el contacto con los problemas físicos. Esto no es sólo porque la Naturaleza es más rica que la fantasía humana, sino porque las aplicaciones actúan, en muchos casos, como un "examen" que toda teoría debe superar.

La teoría sobre la no resolubilidad de ciertas clases de ecuaciones diferenciales, desarrollada en años recientes, muestra que incluso ecuaciones lineales "muy simples" pueden no tener solución, no sólo en el sentido corriente, sino en las clases de funciones generalizadas y las clases de hiperfunciones y, por consiguiente, para estas ecuaciones no puede ser construida ninguna teoría "sustanciosa". En el plano histórico, la teoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, pasó a ser la primer forma matemática de la Mecánica clásica. Se reveló la estructura variacional de la mecánica y desde el punto de vista matemático se hizo posible considerar la Mecánica como Cálculo de Variaciones. El desarrollo del formalismo lagrangiano llevó a la geometrización de la Mecánica que, hacia finales del siglo XIX, adquirió la forma de geometría multidimensional de Riemann. A la vez, la geometrización del formalismo hamiltoniano originó la geometría del espacio de fases y, en realidad, reveló otra cara de la Mecánica: la Geometría Simpléctica.

Algunas de las mencionadas ramas de la Matemática -el cálculo de variaciones y la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden- se modelaba (como ya dijimos), en paralelo, con la elaboración de los formalismos de la Mecánica Analítica. En otros casos, se identificaban los formalismos de la mecánica con teorías matemáticas ya formadas y se daban impulsos adicionales para el desarrollo de esas teorías.

La equivalencia de algunos formalismos de la Mecánica Analítica contribuyó a que se comprendieran las profundas relaciones entre ramas de las Matemáticas que antes parecían tan diferentes. Las tareas de la Mecánica Analítica en el marco de uno u otro formalismo llevaban, con frecuencia, a elaborar partes absolutamente nuevas de la Matemática, como la teoría de grupos y de las Algebras de Lie y la Topología (por ejemplo, en relación con la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias).

Cuando se comprendía la identidad de la estructura matemática de la Mecánica con una u otra teoría matemática, ello era siempre positivo para la Mecánica, ante la cual se abrían nuevas posibilidades para resolver un círculo cada vez más amplio de problemas y aplicar estos métodos en la física y la astronomía.

4. El problema de la existencia y unicidad

"Cualquiera que sobresale del nivel medio ha recibido dos educaciones - la primera de sus maestros; la segunda, más impersonal e importante, de sí mismo"

Gibbons

Como destacara Arnold[(11)] (n.1937), la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias "permite estudiar los más diversos procesos de evolución que pueden determinarse, tener dimensión finita y ser diferenciables". Estas tres propiedades forman la base de la mecánica de los sistema discretos. Un proceso se llama determinado si su estado pasado y futuro puede obtenerse a partir de un estado presente. El conjunto de todos los estados del proceso se llama Espacio de Fases. El proceso se denomina de dimensión finita si su espacio de fases lo es, i.e., si el número de parámetros necesarios para descubrir completamente su estado es finito. El proceso se llama diferenciable si su espacio de fases tiene estructura de variedad diferencial.

A propósito de lo anterior, la expresión exacta de la idea de la determinación es proporcionada por los teoremas de existencia y unicidad. Para una ecuación escalar de primer orden ($y' = f(x, y)$), esta preocupación comienza con Euler -en su *Institutiones...*- con su método de las quebradas, el cual se usa en la actualidad como un método numérico. Cauchy continúa con el método, demostrando semejante teorema por primera vez en sus conferencias (1789-1857), dictadas en 1820-1830 bajo el título *Exposition d'une Méthode à l'aide de laquelle on peut intéger par approximation un grand nombre d'Equations différentielles au premier ordre* y lo presentamos a continuación, por su indudable valor histórico y metodológico.

Teorema de Cauchy. *Si el segundo miembro de la ecuación diferencial*

$$y' = f(x, y), \tag{3}$$

es analítico en ambas variables, x e y, en una vecindad del punto (x_0, y_0), entonces la ecuación (3) posee una única solución $y(x)$ que satisface la condición inicial

$$y(x_0) = y_0 \tag{4}$$

y esta solución es analítica en una vecindad de x_0.

Es fácil entender que el requerimiento de que f sea analítica es artificial; por otra parte, esta restricción falla en muchos problemas de aplicaciones. Así, como teoría general, es demasiado exigente. El resultado clásico conocido hoy es el producto de diversos refinamientos:

Teorema de Existencia y Unicidad. *Si una función f es definida y continua en una cierta región abierta y conexa D del plano y satisface en ella una condición de Lipschitz respecto a y entonces, por cada punto interior de D, pasa una y sólo una curva integral de la ecuación diferencial (3).*

Una característica importante en el trabajo de Cauchy es el cambio que se da en la forma de conceptualizar una ecuación diferencial ordinaria. En efecto, en Cauchy no sólo encontramos nuestra definición de una ecuación diferencial ordinaria(12), sino que además su discurso es muy parecido al de cualquier texto actual. Por cierto, durante esta misma época, en el libro de Lacroix, *Traité*

Elémentaire de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral, 1837, encontramos un punto de vista análogo.

El método de demostración, basado en la consideración de las quebradas de Euler, dado por Cauchy en sus lecciones de la Ecole Polytechnique (considerando la continuidad de $f(x,y)$), está resumido en una memoria litografiada en Praga en 1835 y publicada en forma más completa por su discípulo F. N. Moigno (*Leçons de Calcul*, 2, 1844, p. 385, 513), pero la esencia del método se remonta a Euler en su *Institutiones Calculi Integralis*; de ahí el nombre dado. La prueba por Aproximaciones Sucesivas es debida a C. E. Picard (1856-1941) y E. L. Lindelöf (1870-1946). Este problema fue usado por J. Liouville (1809-1882) y Cauchy en diversos casos especiales. Sin embargo, el método de Cauchy-Lipschitz tiene, sobre el de Picard-Lindelöf, la ventaja de que permite construir la solución en todo intervalo finito donde ésta es continua.

La condición de Lipschitz es superflua para el teorema de existencia. Con la única hipótesis de la continuidad de f ha probado C. Arzelá (1847-1912) que (3) admite al menos una solución por (x_0, y_0). Una demostración de Montel (*Thése*, 1907), que utiliza las quebradas de Euler, puede verse en Valiron (*Cours d'analyse mathématique*).

Por otra parte, debe imponerse la condición de Lipschitz u otra similar para asegurar la unicidad. W. F. Osgood (Monatsh. Math. Phys., 9, 1898) ha colocado el problema sobre una base firme, probando que si f es continua en un entorno de (x_0, y_0), existe en general un haz de curvas integrales por dicho punto, comprendidad entre dos extremos $y = \Phi_1(x)$, $y = \Phi_2(x)$. La unicidad equivale a $\Phi_1(x) = \Phi_2(x)$, y para esto, una condición suficiente es:

$$|f(x,y) - f(x,z)| < w\left(|y-z|\right),$$

siendo $w(u)$ una función continua ≥ 0 para $u \geq 0$, nula sólo si $u = 0$ y tal que para $\epsilon > 0$ haga divergente la integral

$$\int_0^{\epsilon} \frac{du}{w(u)}.$$

Funciones con estas propiedades son Ku, Kuln(1/u) lnln(1/u), ... La primera es la condición de Lipschitz, las demás son condiciones más generales. Más recientes son los teoremas de unicidad de Nagumo (Japonese J. of Math., 3, 1926), Perron (Math. Annalen, 95, 1926; Math. Zeitschriff, 28, 1928), Müller (Math. Zeit 26 (1927) 619-645), Wallach (Amer. J. Math. 70 (1940) 345-350), Olech (Bull. Acad. Polon. Sci Cl. III 4 (1956), 555-561) y Wintner (Bull. Un. Mat. Ital. (3) 21 (1956) 496-498), extendidos y/o generalizados en trabajos sucesivos de Antonino, Arino, Bownds, Bushell, Checa, Cleave, Díaz, Everitt, Gautier, Lemmert, Metcalf, Penot, Race, Redheffery, Romaguera, Volkmann, Walter y otros que harían demasiado larga esta lista.

Precisamente de Müller es el siguiente ejemplo de aproximaciones sucesivas no convergentes. Sea:

$$u' = U(t,u), u(0) = 0, \tag{5}$$

donde $U(t,u)$ será definida para $t \geq 0$ y todo u. Consideremos las aproximaciones $u_o(t) \equiv 0$ y

$$u_{n+1} = \int_0^t U(s, u_n(s))ds \text{ si } n \geq 0.$$

Sea $U(t,0) = 2t$, por tanto $u_1(t) = t^2$; poniendo $U(t,t^2) = -2t$, se tiene $u_2(t) = t^2$. Finalmente, poniendo $U(t,-t^2) = 2t$, se tiene $u_3(t) = t^2$. Entonces $u_{2n}(t) = -t^2$ para $n > 0$ y $u_{2n+1} = t^2$ para $n \geq 0$. Podemos completar la definición de $U(t,u)$ como una función continua haciendo $U(t,u) = 2t$ si $u \leq 0$, $U(t,u) = -2t$ si $u \geq t$, y como una función lineal de u cuando $0 \leq u \leq t$, $t > 0$ fijo. De esta forma, obtenemos un ejemplo en el cual $U(t,u)$ es no creciente con respecto a u (para $t \geq 0$ fijo). En este caso la solución de (5) es única (Corolario 6.3 de P. Hartman- *Ordinary Differential Equations*, Wiley, 1964); sin embargo, ninguna subsucesión de las aproximaciones sucesivas converge a una solución.

En los últimos años, sucesivos resultados sobre la unicidad de las soluciones han sido obtenidos para cuando las condiciones de tipo Lipschitz no pueden ser aplicadas; son resultados que utilizan una descomposición de la función del segundo miembro o condiciones más débiles sobre ésta.

Sin embargo, hay un detalle sobre el que queremos volver y es el del "famoso" teorema de existencia de Peano.

A fines del siglo pasado, G. Peano (1858-1932) publica dos artículos, en los cuales formula dos teoremas de existencia diferentes, considerando que x y f pertenecen al d-espacio euclideano $\mathbb{R}^d$ y t es real. Sea K un número positivo, $J = [0,1]$, f continua en $J \times \mathbb{R}^d$ y $|f(t,x)| \leq K$ para $(t,x) \in J \times \mathbb{R}^d$.

Teorema 1(1886). *Sea $d = 1$. El problema inicial*

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \textit{para} \quad t \in J, \ x(0) = 0, \tag{6}$$

posee soluciones $x_{\min}$, $x_{\max}$ tales que, para toda solución, $x_{\min}(t) \leq x(t) \leq x_{\max}(t)$ para $t \in J$.

Teorema 2(1890). *Sea $d \geq 1$. El problema inicial* (6) *posee al menos una solución.*

Observemos que, en el caso $d = 1$, el Teorema 2 es una consecuencia trivial de Teorema 1. Esto significa que toda prueba del Teorema 1 es también una prueba del Teorema 2; por otra parte, las demostraciones del Teorema 2 son más simples que las del Teorema 1. De estas constataciones tenemos una importante conclusión:

TODO LOS AUTORES QUE MENCIONAN EL NOMBRE DE PEANO LLAMAN SIEMPRE AL TEOREMA 2 EL TEOREMA DE PEANO, CUANDO HEMOS VISTO QUE, EN REALIDAD, NO ES UN ÚNICO TEOREMA.

Una prueba elemental de Teorema de Peano es aquella en la cual se evita la equicontinuidad y en lugar del Lema de Arzelá-Ascoli, se utilizan propiedades especiales de $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{R}^d$), sin entrar a valorar la noción de constructividad enfatizada por numerosos autores. Muchas pruebas elementales del Teorema 1 existen; sin embargo las del Teorema 2 son escasas. Una demostración de este tipo es de interés didáctico al menos, puesto que el caso $d = 1$ del Teorema 2 es tratado separadamente en muchos textos. Por otra parte, la existencia de $x_{\min}$ ($x_{\max}$) puede justificarse como el ínfimo (supremo) del conjunto de todas las soluciones de (6) probando que éste no es vacío (exactamente el planteamiento del Teorema 2).

Extensiones del teorema de existencia a soluciones de tipo Carathéodory, utilizando el Análisis Recursivo, etc., son aún objeto de estudio.

Podemos resumir todo lo anterior en la *Figura 1* que muestra bien el estado de las investigaciones en este campo. Detengámonos, aunque sea brevemente, para explicar cada uno de esos términos. Del primero de ellos podemos decir que resume algunas de las investigaciones a las que ya hemos hecho referencia sobre la unicidad de las soluciones; el segundo tópico refleja las investigaciones sobre espacios de funciones acotadas, positivas, ...; el tercer tópico merece un tratamiento especial, ya que extiende las investigaciones en este campo para ecuaciones diferenciales definidas sobre espacios infinitodimensionales: uno de los primeros resultados en tal sentido es debido a F. R. Browder (en 1964), aunque W. J. Knight demostró que era incorrecto[(13)]. Quizás en este orden de cosas, el ejemplo típico es el debido a Dieudonné[(14)].

Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ y tomemos:

$$1_\infty := 1_\infty(\mathbb{N}) = \{x/x = (x_n)_{n\in N} \text{ sucesión acotada}\};$$

introduzcamos el subespacio acotado de 1_∞:

$$c_0 = \{x/x \in 1_\infty,\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}.$$

La función:

$$\varphi(\epsilon) = \begin{cases} 2, & \text{si } \epsilon \geq 4, \\ \sqrt{\epsilon}, & \text{si } 0 \leq \epsilon \leq 4,\ \epsilon \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{si } \epsilon \leq 0. \end{cases}$$

es acotada, creciente y uniformemente continua. Las fórmulas:

$$f_n(x) = 1/n + \varphi(x_n),\ n \in \mathbb{N},\ x \in 1_\infty,$$
$$f(x) = (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}},\ x \in 1_\infty,$$

definen una función $f : 1_\infty \to 1_\infty$ acotada, creciente y uniformemente continua. Vemos fácilmente que $f(c_0) \subseteq c_0$. Podríamos entonces creer que el Problema de Cauchy:

$$u(0) = 0,\ u' = f(u),$$

posee una solución única $u : [0, T] \to 1_\infty$. Sin embargo, Dieudonné mostró que $u(t) \notin c_0 (0 < t \leq T)$. Esto muestra, a las claras, que requerimientos de otro tipo eran necesarios para abordar el estudio de la Existencia y la Unicidad en espacios de infinitas dimensiones.

El último tópico es, quizás, el más reciente y se refiere al estudio de la Existencia y Unicidad en Inclusiones Diferenciales u otras ecuaciones diferenciales en las que intervienen diferentes nociones de derivadas.

5. Epílogo

"Por una muestra pequeña podemos juzgar la pieza entera"
Cervantes

A fines del siglo XIX, A. Cayley publicó varios artículos sobre el Método de Newton para encontrar los ceros de una función compleja. Cayley procuró dividir el plano complejo en regiones donde cualquier punto, tomado como aproximación inicial para el Método de Newton, convierta a la sucesión de puntos generada por el método en una sucesión convergente a un determinado cero de la función. Más precisamente, Cayley consiguió determinar tales regiones para la función $F(z) = z^2 - c$. Al intentar abordar otras funciones, digamos $F(z) = z^3 - 1$, se encontró con cálculos muy complejos y acabó interrumpiendo sus investigaciones.

En el inicio de este siglo, Gaston Julia y Pierre Fatou publicaron una serie de artículos sobre el estudio de propiedades iterativas, teniendo como uno de los objetivos el Método de Newton. Ellos probaron que la convergencia de este método puede no ser tan simple: aplicando el método a una función dada, es posible que haya sucesiones que converjan, que sean periódicas o que diverjan. Julia y Fatou observaron que las fronteras entre las regiones de convergencia eran curvas extremadamente complicadas.

En la década de los años 60, Benoit Mendelbrot comenzó a estudiar algunos conjuntos irregulares de naturaleza altamente interesante, tales como las galaxias y los copos de nieve. Mandelbrot consiguió percibir ciertos patrones en las irregularidades presentadas por esas formas y así definió la noción de *Conjunto Fractal*. Esencialmente, un conjunto fractal es un conjunto que posee propiedades de auto-similaridad, esto es, un número finito de traslaciones de cualquier subconjunto, no importa cuán pequeño, reproduce el conjunto completo[(15)]. Posteriormente, Mandelbrot retomó los trabajos de Fatou y Julia utilizando ordenadores para diseñar las regiones estudiadas por él, de manera que pudiera observarse el comportamiento caótico que produce la estructura fractal.

La representación gráfica del comportamiento caótico de los método iterativos para sistemas no lineales es una poderosa herramienta para demostrar y comprender el fenómeno matemático que aparece en esas aplicaciones[(16)].

Esta es un área totalmente nueva, y aún poco explorada, del Análisis Numérico, con muchos puntos de contacto con la Teoría de las EDO en general, y con la existencia y unicidad de las soluciones en particular. La utilización de la computación gráfica propicia la aparición de nuevas cuestiones sobre el análisis de la convergencia de algoritmos, induciéndonos a pensar más sobre el significado "real" de convergencia local o global.

Evidentemente, la integración de estos temas está lejos de ser aclarada en toda su magnitud; nuestro objetivo es que los investigadores encaren estas disciplinas con una perspectiva diferente de la usual. Por otra parte, en el creciente desenvolvimiento de la Física de sistemas no lineales, se torna cada vez más presente, entre los físicos, la utilización de funciones e integrales elípticas[(17)]. Sin embargo, no es mucho lo que se conoce sobre el surgimiento y desarrollo de este tema, a partir del surgimiento del *Calculus* y las EDO. Así, trataremos sólo algunos puntos, importantes a nuestro juicio, en esta relación.

Jacobi caracteriza el 23 de diciembre de 1751 como la fecha de nacimiento de las funciones elípticas. Fue ese el día en que Euler inició la revisión de la colección de trabajos presentada por el matemático autodidacta italiano Giulio Carlo, Conde Fagnano y Marquéz de Toshi (1682-1766), lo cual era un prerequisito para su entrada a la Academia de Berlín. Dentro de los numerosos artículos de Fagnano, el titulado *Método para Medir la Lemniscata*, publicado en 1718, y que toma como base los hallazgos de Jakob Bernoulli de 1694, despertó el entusiasmo de Euler. Euler vislumbró allí el nacimiento de la teoría de las funciones elípticas, que vendría, según él, a extender considerablemente los límites del *Calculus*.

De manera sucinta, sea $F(x,u)$ una función racional de u, x, siendo u^2 una función polinomial cúbica o cuártica de x sin factor repetido, o sea, $u^2 = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$. En este caso, $\int F(x,u)dx$ es denominada integral elíptica. Un ejemplo conocido de esta clase de integrales es dado por:

$$a \int_0^{\sigma} (1 - k^2x^2) \left[(1 - x^2)(1 - k^2x^2)\right]^{-1/2} dx,$$

la cual es igual a la longitud del arco de una elipse de excentricidad k y eje mayor $2a$. Desde un punto de vista histórico, todo parece indicar que ésta es la razón por la cual estas integrales reciben el nombre de elípticas[(18)]. Legendre, que por más de 40 años estudió estas integrales, introdujo las tres formas canónicas para las mismas. Dentro de estas tenemos:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x)^{1/2}}, \tag{7}$$

que surge en el estudio del péndulo simple, al expresar la relación entre el período T y la amplitud A mediante la serie[(19)]:

$$T = 2\pi\sqrt{(1/g)}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots 2k}\right)^2 \operatorname{sen}^{2k}(A/2)\right],$$

dada por Euler en 1736 en su *Mechanica*, aunque fue formulada por Legendre en 1825 (*Traité des fonctions elliptiques*) y por Jacobi en 1829 (*Fundamenta nova theoriae functionem ellipticarum*) para integrales elípticas, llamando $T = 4\sqrt{(1/g)}K(k)$, con $K(k)$ definida por (7), la integral elíptica completa de primera especie.

Estas funciones han resurgido con gran énfasis en innumerables problemas de electromagnetismo, partículas elementales, mecánica cuántica, relatividad general, mecánica estadística y otros, mostrando que su importancia trasciende, en mucho, lo aquí presentado. Baste citar algunos de los que han trabajado en esta línea: John Landen, Legendre, Gauss, Schumacher, Schering, ...

Otra vertiente de avances dió lugar a la Geometría de Superficies. Fue Euler (*Recherches sur la courbure des surfaces*, Memoires de l'Academie de Sciences de Berlín, 16, 1760) el primero en estudiar la curvatura y direcciones principales de las superficies, inaugurando así la utilización de los métodos del *Calculus* para el estudio de la geometría de superficies.

El trabajo de Euler muestra que las direcciones principales son, en general, determinadas por dos rectas mutuamente ortogonales. Se encuentra también contenida en este artículo la famosa (una de ellas) Fórmula de Euler, que expresa que la curvatura normal en una dirección cualquiera en términos de las curvaturas principales es el ángulo de la referida dirección con las principales. De hecho, en términos más modernos, esta fórmula equivale a la diagonalización de la Segunda Forma Fundamental.

En los puntos umbílicos las dos curvaturas principales son iguales y las direcciones principales definen, fuera de estos puntos, dos campos de distribuciones de líneas tangentes a la superficie, llamados *campos de líneas principales*, uno de ellos correspondiente a la curvatura máxima y el otro a la mínima. Los puntos umbílicos son considerados como singularidades de estos campos de líneas. No existe registro bibliográfico de que Euler tuviese visualizada la partición de las superficies en puntos umbílicos y en red de curvas principales, que son formadas por las curvas integrales de los campos de direcciones principales. En las superficies de revolución, esta red es generada por los paralelos y los meridianos. Sería Monge (*Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoide*, Journal de l'Ecole Polytch., II cah., 1796) el primero en percibir la importancia de la estructura definida en una superficie por los puntos umbílicos y la red de curvas principales, llamada aquí de *configuración principal* de la superficie. Se debe a él, la integración global de las ecuaciones diferenciales que representan los campos de líneas principales en el caso del elipsoide de tres ejes diferentes que lleva su nombre(20).

Este resultado constituyó el primer ejemplo no trivial de configuración principal. Esto coloca a Monge como un indiscutible precursor de la Teoría Cualitativa de ED que, un siglo más tarde, fue fundada y sistematizada por Poincaré y Liapunov, y continuada por Andronov, Pontriaguin, Peixoto, ...(21)

Monge también vislumbró aplicaciones de las líneas de curvatura en Arquitectura. Es muy interesante la argumentación que, con bases estéticas y prácticas, presenta una propuesta para la contrucción de la bóveda elipsoidal para el edificio de la Asamblea Legislativa. Esta propuesta utilizaba las líneas de curvatura como guía para la colocación de piedras y los umbílicos como puntos de soporte de las luminarias.

En estos momentos, estos estudios han desembocado en la conocida Teoría de Singularidades, conectada con el Caos, los Fractales y la Teoría de las Catástrofes(22).

Existen, por supuesto, muchas direcciones diferentes a las aquí apuntadas. Hemos presentado aquellas que pudieran parecer poco vinculadas a la Teoría de las EDO. Representamos esquemáticamente las direcciones aquí señaladas en las *Figuras 2, 3 y 4*.

Esperamos haber mostrado así que la Teoría de las EDO es, en estos momentos, una de las líneas principales de desarrollo de la Matemática, imbricada profundamente con múltiples corrientes y con una base paradigmática nada despreciable: las aplicaciones, fuente inagotable de problemas y, por ende, de desarrollo(23).

Notas

(1)En un marco general sobre las perspectivas actuales en Filosofía e Historia de las Matemáticas sobre el conocimiento matemático, se deben destacar los ensayos [10] y [7] así como los trabajos [32] por su agudeza crítica; [34] presenta una visión próxima (aunque un tanto superficial) a un sentir hoy común sobre los aspectos culturales, sociales e históricos del desarrollo de las Matemáticas; [9] sirve de perspectiva general del campo temático con singular atención a algunos puntos (e.g. la discusión del presunto estatuto *a priori* del conocimiento matemático, el cambio histórico en Matemáticas, la rigorización) y [33] otorga una síntesis histórica-filosófica apropiada. No debe descartarse un libro como [14].

Un trabajo que no debe pasarse por alto es "Pedagogía e historia de las ciencias, ¿simbiosis innata?" de Alejandro Garciadiego D. en [36], donde se presenta, en lenguaje ameno, la historia de la matemática como problema: más allá de descripciones y enfoques genético-cronológicos, la historia debe tratar de resolver los cómo y los porqué y destaca, como una de las problemáticas de los historiadores de la ciencia, la atención que éstos deben prestar al *"desarrollo técnico del pensamiento científico, y [...] encontrar, entre otros, los conceptos claves que influenciaron el desarrollo de las ciencias".* En esta dirección se enmarca nuestro trabajo. No debe olvidarse en estas latitudes, la influencia de un filósofo como Albert Lautman (ver [35]) y las referencias citadas allí).

(2)Una excelente traducción del trabajo de Leibniz de 1684 aparece en [30]. Sobre la trascendencia y repercusiones del surgimiento del Calculus en la Matemática y la Física, principalmente, tratan [19] y [4].

(3)Ver [26]. Consultar [25].

(4)Ver [2].

(5)Ver [8]; no obstante, existen historiadores que afirman la imposibilidad de ser precisos, por ejemplo [11], llegando incluso a contraponerse ambos en sus afirmaciones, pues mientras Ince afirma que fue Leibniz quien primero habló explícitamente de ecuaciones diferenciales, Kline por el contrario dice que fue Huygens en el *Acta Eruditorium* de 1693, e incluso con una fecha distinta a la dada por Kline.

(6)Ver [15].

(7)Ver [17].

(8)Ver [8, p.93].

(9)Sir Arthur Eddington observaba que uno de los grandes misterios del Universo consiste en que todo rota. En la época del astrónomo polaco, la astronomía geocéntrica llevaba reinando más de mil años, aunque prelados instruidos advertían que la Semana Santa llegaba demasiado pronto en el calendario anual y unos pocos astrólogos sabían que la posición de los planetas divergía a veces, en varios grados, de lo que se podía prever con las tablas de Ptolomeo. El sistema heliocéntrico (que se remonta a Aristarco de Samos, en el siglo III a.n.e.) resolvió éstas y otras dificultades y la publicación de la obra de Copérnico *De revolutionibus orbium coelestium* (1543) abrió el camino de la verdad celeste por la que transitarían, más adelante, Kepler, Galileo, Newton, Poincaré, Liapunov y muchos más.

(10)A pesar de que hay historiadores que piensan que la anomalía del perihelio de Mercurio sólo alcanzó a tener cierta significación crucial a la luz de la Teoría de la Relatividad, i.e., como confirmación predictiva empírica de esta teoría frente a la mecánica celeste clásica, debemos tener en cuenta que éste fue uno de los tantos hechos acumulados que reflejaban el "indeterminismo" de la mecánica determinística en boga.

(11)Ver [1].

(12)La definición inicial de Cauchy es la siguiente: "On nomme équations différentielles, celles qui établissent des relations entre une variable indépendante x, des fonctions $y, z \dots$ de cette variable, et les différentielles de ces fonctions ou leurs dérivées des divers orders. L'ordre de la plus haute dérivée qui se trouve comprise dans une équation différentielle, sert à fixer ce qu'on appelle l'ordre de cette meme équation. Cela posé, une équation différentielle du premier ordre entre la variable x et les fonctions $y, z \dots$ renfermera seulement avec $x, y, z \dots$ les dérivées du premier ordre $y', z', \dots$ Si les fonctions $y, z, \dots$ se réduisent a une seule y, l'equation différentielle du premier ordre ne contiendra plus que les trois quantités x, y et $y' = dy/dx$."

(13)Ver [12] y [13].

(14)Ver [5]. Una versión de éste es el Problema 5, p.290 de su *Foundations of Modern Analysis*, New York: Academic Press, 1969.

(15)Consulte por ejemplo [3], [6], [16] y [29].

(16)Consultar el trabajo del autor [23].

(17)Sobre el surgimiento y primeras aplicaciones de éstas, puede consultar [24], [27] y [28].

(18)Ver [18].

(19)Ver [24].

(20)Consultar, por ejemplo, [31].

(21)Ver [20].

(22)Ver [22].

(23)Otras direcciones de desarrollo son presentadas en [21].

Referencias

1. V. I. Arnold, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Moscú: Nauka, 1979 (en ruso).
2. Jean Bernoulli, *Die Differentialrechnung aus dem Jahre 1691/92*, Clásicos de Ostwald, Leipzig, 1924.
3. M. Bridger, "Looking at the Mandelbrot set", The College Math. J. **19** (1988), 353-363.
4. P. Dedron et J. Itard, *Mathématiques et Mathématiciens*, París: Magnarde, 1959.
5. J.Dieudonné, "Deux exemples singuliers d'équations differentielles", Acta Sci. Math. **12B** (1950), 38-403.
6. G. A. Edgar, *Measure, Topology and Fractal Geometry*, Berlin: Springer-Verlag, 1990.
7. R. Hersh, *Experiencia matemática*, Barcelona: Labor, 1988.
8. E. Ince, *Ordinary Differential Equations*, New York: Dover **1956** (1926).
9. P. Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, New York/Oxford: Oxford University Press, 1983.
10. M. Kline, *Matemática. La pérdida de la certidumbre*, Madrid: Siglo XXI, 1985.
11. M. Kline, *Mathematical Thought form Ancient to Modern Times*, 1972.
12. W. J. Knight, "Solutions of differential equations in Banach spaces", Duke Math. J. **41(2)** (1974).
13. W. J. Knight, "A counter example to a theorem on differential equations in Hilbert spaces", P.A.M.S. **51(2)** (1975), 378-380.
14. I. Lakatos, *Falsifications and methodology of scientific research programmes*, Cambridge, 1970.
15. Leibniz-Newton, *El Cálculo Infinitesimal origen-polémica*, Buenos Aires: Eudeba, 1977.
16. B. Mandelbrot, *The fractal Geometry of Nature*, San Francisco: Freeman, 1982.
17. N. M. Matveev, *Métodos de integración de las ecuaciones diferenciales ordinarias*, Escuela Superior, 1963 (en ruso).
18. G. Mittag-Leffler, "An Introduction to the theory of Elliptic Functions", Ann. of Math. **24** (1923), 271–351.
19. L. Motz and J. Hane W., *Conquering Mathematics; From Arithmetic to Calculus*, New York: Plenum, 1991.
20. J. E. Nápoles, *Cien Años de Teoría Cualitativa. Algunas observaciones*, dado a publicar.
21. J. E. Nápoles, *De Lagrange hasta Arnold. Apuntes metodológicos a una historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias*, I.S.P.H., Publicación Interna, 1996.
22. J. E. Nápoles, *Ecuaciones Diferenciales y Contemporaneidad*, dado a publicar.
23. J. E. Nápoles, "Una nota sobre el Teorema de Sarkovski", Revista Lecturas Matemáticas (UNC-SMC) **16** (1995), no. 2, 211–214.
24. J. E. Nápoles y C. Negrón, "De la Mecánica Analítica a las EDO. Algunos apuntes históricos", Revista LLULL **17** (1994), no. 32, 190–206.
25. Isaac Newton, *The mathematical papers of Isaac Newton*, New York: Cambridge University Press, 1967-1970.
26. Isaac Newton, *Opera quae exstant omnia*, Londres: Samuel Horsley, 1779-1785.
27. J. Rey Pastor y J. Babini, *Historia de la Matemática*, vol. 2, Barcelona: Gedisa, 1985.
28. A. Ribeiro y D. Soares, "Reminiscências e Cálculo de Algunas Funçes e Integrais Elípticas", Matemática Universitaria (1993), no. 15, 20–32.
29. G. Rubiano, "El conjunto de Mandelbrot", Bol. de Matemáticas, Nueva Serie **VIII** (1996), no. 1, 25–36.
30. D. E. Smith, *A Source Book in Mathematics*, New York, 1929, 619-626.
31. J. Sotomayor, "O Elipsóide de Monge", Matemática Universitaria (1993), no. 15, 33-47.
32. M. Steiner, *Mathematical Knowledge*, Ithaca: Cornell University Press, 1975.

33. M. Tiles, *Mathematics and the Image of Reason*, London/New York: Routledge, 1991.
34. R. L. Wilder, *Mathematics as a Cultural System*, New York/Oxford: Pergamon Press, 1981.
35. F. Zalamea, "La filosofía de Albert Lautman", Mathesis **10** (1994), 273-289.
36. F. Zalamea (ed.), *El velo y la trenza*, Bogotá: Editorial Universidad Nacional, 1997.