Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen VII No. 1 (2000), pp. 39–50

SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS EN ANÁLISIS NO ESTÁNDAR

CARLOS F. MORA E.(*)

Resúmen. Lo que se pretende en este artículo es dar los requisitos básicos del análisis no estándar para demostrar que existen soluciones fuertes a las ecuaciones diferenciales estocásticas.

1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales estocásticas que se estudiarán son de la forma

$$(*) \qquad x(w,t) = x_0(w) + \int_0^t f(s,x(w,s))\,ds + \int_0^t g(s,x(w,s))\,db(w,s)$$

donde f y g son funciones medibles,

$$f : [0,1] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ y } g : [0,1] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n,$$

$\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ es el espacio de las matrices $n \times n$ con coeficientes reales, b es un movimiento Browniano n-dimensional definido en $(\Omega \times [0,1], \mathfrak{A}, P)$ con valores en $\mathbb{R}^n$, en donde Ω es un conjunto hiperfinito y $x_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una variable aleatoria que es condición inicial de $(*)$.

Para dar soluciones fuertes a las ecuaciones diferenciales estocásticas por medio del análisis no-estándar es necesario entender un poco el mundo del análisis no-estándar. Para lograr esto, lo que se hará es obtener toda una matemática no-estándar de tal manera que todo concepto matemático real se reduzca al estudio de ciertos conjuntos y siguiendo una serie de pasos lograremos el objetivo deseado.

(*) Trabajo recibido 131/05/00, revisado 2/06/00. Carlos F. Mora E., Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia; e-mail: cmora@matematicas.unal.edu.co
Resumen de trabajo de grado (ver [8]), dirigido por Myriam Muñoz de Özak.

Como primer paso se dará la estructura de los reales no-estándar, en un segundo paso se hará una construcción de los reales no-estándar en forma análoga como se construyen los números reales a partir de las sucesiones de Cauchy de números racionales, en un tercer paso se dará una introducción a los espacios de probabilidad hiperfinita entre ellos el espacio de Loeb asumiendo algunos conocimientos mínimos de teoría de la medida, como por ejemplo el clásico Teorema de extensión de Caratheodory, en un cuarto paso se hará un estudio sobre procesos estocásticos con sus distintas propiedades, entre ellos el movimiento Browniano, en un quinto paso se darán nociones de integración estocástica finalizando con el estudio de soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas. Vale la pena aclarar que cada uno de estos pasos se darán haciendo uso del análisis no-estándar.

2. Estructura y construcción de los reales no-estándar

Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales, y sea $m : \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \{0, 1\}$ la función que a cada subconjunto A de $\mathbb{N}$ le asigna el número $m(A)$ con:

(i) $m(\mathbb{N}) = 1$, $m(A) = 0$ si A es finito.
(ii) $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ si $A \cap B = \emptyset$.

Definamos a $S := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ como el conjunto de todas las sucesiones de números reales, es decir, $S := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R}\}$ y definamos sobre S una relación de equivalencia así:

$$(a_n)_n \sim (b_n)_n \text{ si y sólo si } m\{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} = 1.$$

$\langle a_n \rangle$ será la clase de equivalencia de la sucesión $(a_n)_n$.

El conjunto de los números reales no estándar será el conjunto de todas las clases de equivalencia, $S/\!\sim$, se denotará por ${}^*\mathbb{R}$.

En forma natural se tiene que $\langle a_n \rangle + \langle b_n \rangle = \langle a_n + b_n \rangle$. $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot, <, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle)$ es un cuerpo ordenado no completo que extiende a $\mathbb{R}$.

Definición 2.1. Sea $x \in {}^*\mathbb{R}$.

(i) Se dice que x es finito si existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < r$.
(ii) Se dice que x es infinitesimal si para todo $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$, se tiene que $0 < |x| < r$.
(iii) Si $z \in {}^*\mathbb{R}$, decimos que x está infinitamente cerca a z si $|z - x|$ es infinitesimal positivo, se notará por $x \approx z$.

Supondremos que $\mathbb{R}$ y ${}^*\mathbb{R}$ satisfacen los dos axiomas siguientes:

Axioma 1. $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado y completo.

Axioma 2. $^*\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado que extiende a $\mathbb{R}$ que contiene números infinitos e infinitesimales.

Proposición 2.1. Si $x \in {}^*\mathbb{R}$ es finito, existe un único número real r tal que $r \approx x$ (r = st(x)). r se llama la parte estándar de x y x se puede escribir como $x = r + \epsilon$, $r \in \mathbb{R}$, $\epsilon \approx 0$.

Lo que se pretende es obtener la matemática de tal manera que todo concepto matemático real se reduzca al estudio de ciertos conjuntos y para esto se necesita introducir una superestructura sobre $\mathbb{R}$.

Definición 2.2. Para un conjunto $S \neq \emptyset$ se define la sucesión $\{V_n(S)\}$ así:

$$V_0(S) = S \quad , \qquad V_{n+1}(S) = V_n(S) \cup \mathfrak{P}(V_n(S)).$$

La superestructura sobre S es :

$$V(S) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n(S).$$

Obsérvese que cada concepto matemático real está localizado en alguno de los $V_n(\mathbb{R})$, por ejemplo:

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Una transformación lineal de V en W es una función $T : V \longrightarrow W$ tal que

$$T(\alpha v + \beta w) = \alpha T(v) + \beta T(w) \quad \forall v, w \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

A esta transformación lineal se le asocia una matriz de tamaño $m \times n$ así esta matriz está en $V_{mn}(\mathbb{R})$.

Definición 2.3. Se dice que $A \subsetneq {}^*\mathbb{R}$ es <u>interno</u> si existe una sucesión de conjuntos $(A_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ tal que $x := \langle x_n \rangle \in A$ si, y sólo si, $m\{n \in \mathbb{N} : x_n \in A_n\} = 1$. En caso contrario se dice que A es externo.

El universo del análisis no estándar se obtiene postulando una inyección $*$: $V(\mathbb{R}) \longrightarrow V({}^*\mathbb{R})$ que cumple:

(i) * es la identidad sobre $\mathbb{R}$.
(ii) Si $A \in {}^*V(\mathbb{R})$, A es interno si $A = {}^*B$ ó si $A \in {}^*B$ para algún $B \in V(\mathbb{R})$.
(iii) <u>Principio de Transferencia</u>:

$\Phi(A_1, ..., A_n)$ vale en $V(\mathbb{R})$ si y sólo si $\Phi({}^*A_1, ..., {}^*A_n)$ vale en $V({}^*\mathbb{R})$ en el lenguaje de la teoria de conjuntos con cuantificadores acotados, donde $^*A$ denota la versión no estándar de $A \subseteq \mathbb{R}$ y

$$^*A = \{\langle a_n \rangle : m\{n \in \mathbb{N} : a_n \in A\} = 1\}.$$

De acuerdo a este principio podemos trasladar todas las propiedadaes del análisis real al análisis no estándar, y diremos que si la propiedad A se cumple en análsis real, la propiedad A se cumple en forma interna en análisis no estándar.

(iv) Principio de la κ_1–Saturación :

Si $(A_n)_n \subseteq V(^*\mathbb{R})$ es un sucesión de conjuntos internos con $\bigcap_{n=1}^m A_n \neq \emptyset$, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

Las siguientes propiedades se derivan del Principio de Transferencia y de la Saturación:

Propiedad 1.

Para todo $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ se cumple que:

i) $^*(X \cup Y) = {}^*X \cup {}^*Y$.
ii) $^*(X \cap Y) = {}^*X \cap {}^*Y$.
iii) $^*(X - Y) = {}^*X - {}^*Y$.
iv) Si $X \subseteq Y$, entonces $^*X \subseteq {}^*Y$.
v) $^*X \cap \mathbb{R} = X$.

Demostración. Sólo se hará la demostración de i), las demás se dejan como ejercicio para el lector.

$X \cup Y = \{x \in \mathbb{R} : x \in X \vee y \in Y\}$, por el Prinicipio de Transferencia se tiene que

$$^*(X \cup Y) = \{x \in {}^*\mathbb{R} : x \in {}^*X \ \vee y \ \in {}^*Y\} = {}^*X \cup {}^*Y \ .$$

De esta manera transferimos la matemática real dentro de la matemática no estándar. □

Propiedad 2. El Principio de Definición Interna

Sea $\Phi(x, X_1, ..., X_n)$ una fórmula con cuantificadores acotados, si $A_1, ..., A_n$ son conjuntos internos, entonces el conjunto

$$\{x \in A_1 : \Phi(x, A_1, ..., A_n) \text{ vale en } {}^*\mathbb{R}\}$$

es interno.

Demostración. Como $A_1, ..., A_n$ son internos existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A_1, ..., A_n \in {}^*V_m(\mathbb{R})$. En $V(\mathbb{R})$ es cierto que $\forall X_1 \cdots \forall X_n \in V_m(\mathbb{R})$ existe $J \in V_{m+1}(\mathbb{R})$ tal que $J = \{x \in X_1 : \Phi(x, X_1, ..., X_n)\}$, por el Principio de Transferencia se tiene que $J' = \{x \in A_1 : \Phi(x, A_1, ..., A_n)\} \in {}^*V_{m+1}(\mathbb{R})$, de lo cual J' es interno. □

Propiedad 3:

Si A y B son internos entonces $A \cup B, A \cap B, A \times B$ y $A - B$ son internos.

Demostración. Si $A, B \in {}^*V_m(\mathbb{R})$ para algún m, entonces

$$A \cup B = \{x \in {}^*V_m(\mathbb{R}) : x \in A \ \vee \ x \in B\}$$

es interno por el Principio de Definición Interna.

En forma análoga se pueden demostrar las demás. □

Propiedad 4.

Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia creciente de conjuntos internos, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ no es interno.

Demostración. Sea $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, si este conjunto es interno, $B_n = A - A_n$ es interno, $B_n \supseteq B_{n+1}$ y tiene la propiedad de intersección finita, entonces por el Prinicipio de la Saturación $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \neq \emptyset$, pero por definición $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$, lo cual es una contradicción. □

Definición 2.4. Sea $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ interno, se dice que A es hiperfinito si existen $H \in {}^*\mathbb{N}$ y una biyección interna $F : A \longrightarrow \{0, 1, ..., H-1\}$. Denotamos la cardinalidad de A por $|A|$ y escribimos $|A| = H$.

3. Espacios de Probabibilidad Hiperfinita

Definición 3.1. Sea Ω un conjunto hiperfinito, sobre Ω definimos lo siguiente:

(a) $\mathfrak{A} = \{A \subseteq \Omega : A \text{ es interno }\}$.

(b) Si $A \in \mathfrak{A}$, $\quad \overline{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

$\mathfrak{A}$ es una ${}^*\sigma-$álgebra, es decir, para $\{A_n\}_{n\in{}^*\mathbb{N}}$, $\cup_{n\in{}^*\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$, es un álgebra en ${}^*\mathbb{R}$ pero no una $\sigma-$álgebra en ${}^*\mathbb{R}$ (véase la Propiedad 4. anterior).

$(\Omega, \mathfrak{A}, \overline{P})$ es un espacio de probabilidad interno. Sea $P : \mathfrak{A} \longrightarrow [0, 1]$ la función que a cada $A \in \mathfrak{A}$ le asigna el número $P(A) = st(\overline{P}(A))$. $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ consiste en un espacio de estados hiperfinitos, un álgebra $\mathfrak{A}$, y una funcin de conjunto montona y $\sigma-$ aditiva. Extendemos P a la $\sigma-$álgebra minimal que contiene a $\mathfrak{A}$, usando el Teorema de extensión de Carathéodory, esta extensión se denotará por $L(P)$, así obtenemos un espacio de probabilidad hiperfinito.

Si $A \subseteq \Omega$, se define la probabilidad interior de A por

$$P_{in}(A) = \sup\{P(B) : \text{B es interno y } \quad B \subseteq A\},$$

y la probabilidad exterior de A por

$$P_{ex}(A) = \inf\{P(B) : B \text{ es interno y } \quad B \supseteq A\}.$$

Decimos que A es Loeb medible si $P_{in}(A) = P_{ex}(A) = L(P)(A)$ y denotamos

$$L(\Omega) := \{A \subseteq \Omega : A \text{ es Loeb medible}\} .$$

Diremos que una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es Loeb medible si f es medible respecto de $L(\Omega)$.

Teorema 3.1 (Teorema de Loeb). *$(\Omega, L(\Omega), L(P))$ es un espacio de probabilidad completo que extiende a $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.*

Demostración. Ver [8] Teorema 2.6 □

El espacio $(\Omega, L(\Omega), L(P))$ se conoce como el espacio de probabilidad de Loeb, de esta forma el espacio de Loeb asociado a $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ será el espacio completo $(\Omega, L(\Omega), L(P))$.

Ejemplo 3.1. Si $m \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$, $\Delta t = \frac{1}{m!}$ es infinitesimal positivo, definimos

$$T := \{0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \ldots.., m\Delta t = 1\}.$$

A T se le llama <u>la linea de tiempo hiperfinito</u>.
T es hiperfinito, y sobre T definimos $st : T \longrightarrow [0,1]$ por $st(t) = {}^\circ t$ (la parte estándar de t), st es una función sobre, que satisface:

(i) Si $A \subseteq [0,1]$ entonces $A = st(st^{-1}(A))$.
(ii) Si $B \subseteq T$ entonces $B \subseteq st^{-1}(st(B))$.

La función st definida de esta forma establece una relación entre los espacios $(T, L(T), L(P))$ y $([0,1], \mathfrak{M}[0,1], \lambda)$ donde $\mathfrak{M}[0,1]$ es la σ−álgebra de Lebesgue sobre $[0,1]$ y λ es la medida de Lebesgue sobre $\mathfrak{M}[0,1]$, la relación es:
$A \subseteq [0,1]$ es Lebesgue medible si y sólo si $st^{-1}(A) \in L(T)$, y en este caso se tiene que $\lambda(A) = L(P)(st^{-1}(A))$.

4. Procesos Estocásticos

Definición 4.1. Dada $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria y $F : \Omega \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ una función interna, es decir, como conjunto en $V({}^*\mathbb{R})$, decimos que F es un levantamiento de f si ${}^\circ F(w) = f(w)$ casi siempre en $L(\Omega)$.

Teorema 4.1. *$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es Loeb medible si y sólo si f tiene un levantamiento.*

Demostración. Ver [1] pag. 69. □

Definición 4.2. Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, decimos que $F : T \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ es un levantamiento de f si ${}^\circ F(t) = f({}^\circ t)$ para casi todo $t \in T$.

Teorema 4.2. *$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es Lebesgue medible si y sólo si f tiene un levantamiento.*

Demostración. Ver [1] pag. 69. □

A continuación daremos algunas definiciones del análisis real para luego extenderlas al análisis no estándar.

Definición 4.3. Un proceso estocástico es una función $X : \Omega \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $I \subseteq \mathbb{R}$, y para cada $t \in I$, $X(w,t)$ es una variable aleatoria, por lo general se denota como $X(w,t) := X_t(w)$ y con esto se denota como una función f de variable aleatoria. Durante el trabajo se utilizaran las dos notaciones.

Ejemplo 4.1. El Movimiento Browniano

Es un proceso estocástico $\{W_t : t \geq 0\}$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ arbitrario que satisface:

(i) $P(W_0 = 0) = 1$.
(ii) Los incrementos son independientes.

(iii) Para $0 \leq s \leq t$, el incremento $W_t - W_s$ es normalmente distribuido con media 0 y varianza $t - s$.

Definición 4.4. Una <u>caminata aleatoria hiperfinita</u> es una función $B : \Omega \times T \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ definida sobre $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ por

$$B(w, \underline{t}) := \sum_{s=0}^{\underline{t}} w(s)\sqrt{\Delta t}, \quad w \in \Omega$$

en donde T es la línea de tiempo hiperfinito y $\Omega = \{-1, +1\}^T$.
A esta función se le acostumbra llamar la <u>caminata aleatoria de Anderson en ${}^*\mathbb{R}$</u>.

Teorema 4.3 (Teorema de Anderson). *$b_t := {}^\circ B_t$ es un movimiento Browniano sobre $(\Omega, L(\mathfrak{A}), L(P))$.*

Demostración. Ver [1] pag 79. $\square$

Definición 4.5. Se dice que $b(w, t)$ es un <u>movimiento Browniano simple</u> si existe una caminata aleatoria hiperfinita $B(w, \underline{t})$ tal que $b(w, t) = {}^\circ B(w, \underline{t})$.

Definición 4.6. Una <u>filtración</u> es una familia de sub-σ álgebras de una $\sigma-$álgebra $\mathfrak{F}$ que satisface:

(i) $\mathfrak{F}_0$ es completo.
(ii) Si $s < t$ entonces $\mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}_t$.
(iii) $\mathfrak{F}_t = \bigcap_{t<s} \mathfrak{F}_s$.

Definimos un espacio filtrado por $\underline{\Omega} := (\Omega, \mathfrak{F}, \{\mathfrak{F}_t\}_{t\in[0,1]}, \mu)$, donde $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ es un espacio de probabilidad arbitrario.

Definición 4.7. Un proceso estocástico $X : \underline{\Omega} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice <u>adaptado</u> a $\{\mathfrak{F}_t\}_{t\in[0,1]}$ si $X(\cdot, t)$ es $\mathfrak{F}_t$-medible para cada $t \in [0, 1]$.

En este momento queremos dar las normas no estándar que se relacionan con las estándar.

En $\Omega = \{-1, +1\}^T$ definimos la relación de equivalencia $\approx_{\underline{t}}$ para cada $\underline{t} \in T$ así:

Sean $w, w' \in \Omega$, para cada $\underline{t} \in T$

$$w \approx_{\underline{t}} w' \Leftrightarrow w(\underline{s}) = w'(\underline{s}) \quad \underline{s} < \underline{t}$$

y a partir de esta relación definimos una filtración interna adecuada $\{\mathfrak{A}_{\underline{t}} : \underline{t} \in T\}$ así:

Para cada $\underline{t} \in T$, $\mathfrak{A}_{\underline{t}}$ es el álgebra interna sobre Ω generada por las clases de equivalencia

$$[w]_{\underline{t}} = \{w' \in \Omega : w \approx_{\underline{t}} w'\}, \text{ es decir,}$$

si $A \in \mathfrak{A}_t$ entonces $w \in A$ y $w \approx_{\underline{t}} w'$, por lo tanto $w' \in A$. Así $\mathfrak{A}_t$ da lugar a una filtración estándar definida por

$$\mathfrak{F}_t = \sigma\left(\bigcup_{s \approx t} L(\mathfrak{A}_s) \vee \mathfrak{N}\right)$$

donde $\mathfrak{F} \vee \sigma$ denota la σ- álgebra más pequeña que contiene a $\mathfrak{F}$ y a σ, $\mathfrak{N}$ es la clase de conjuntos de medida cero respecto de $L(P)$.

Definición 4.8. Sea $x : \Omega \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ un proceso estocástico, decimos que $X : \Omega \times T \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ es un levantamiento de x si ${}^\circ X(w,t) = x(w, {}^\circ t)$ casi siempre en $L(\Omega \times T)$.

Definición 4.9. Si $h : \Omega \longrightarrow \Omega$ es una biyección interna tal que para todo $w \in \Omega$ y $\underline{t} \in T$ $h\left([w]_{\underline{t}}\right) = [hw]_{\underline{t}}$ decimos que h es una transformación interna de Ω.

Teorema 4.4. *Un proceso estocástico $b(w,t)$ es un movimiento Browniano si y sólo si existe un movimiento Browniano simple $a(w,t)$ sobre $\underline{\Omega}$ y una transformación interna $h : \Omega \longrightarrow \Omega$ tal que $b(w,\cdot) = a(hw,\cdot)$ casi siempre en Ω.*

Demostración. Ver [6]. □

5. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Las Ecuaciones Diferenciales estocásticas son ecuaciones de la forma:

$$((*)) \quad x_t = x(w,t) = x_0(w) + \int_0^t f(s, x(w,s))ds + \int_0^t g(s, x(w,s))db(w,s),$$

donde f y g son funciones medibles,

$$f : [0,1] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ y } g : [0,1] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n,$$

$\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ es el espacio de las matrices $n \times n$ con coeficientes reales, (b_t) es un movimiento Browniano n-dimensional definido en $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ con valores en $\mathbb{R}^n$ en donde Ω es un conjunto hiperfinito y x_0 es una variable aleatoria que es condición inicial de la ecuación dada.

Definición 5.1. Sea $(\Omega, \{\mathfrak{F}_t\}_{t\in[0,1]}, P)$ una filtración y (b_t) un movimiento Browniano adaptado a $\{\mathfrak{F}_t\}_{t\in[0,1]}$.
Un proceso x_t se dice solución de $(*)$ respecto de $\{\mathfrak{F}_t\}_{t\in[0,1]}$ si tiene la siguientes propiedades:

(i) $x_t : \Omega \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es adaptado.
(ii) $\int_0^t |f(s, x(w,s))|ds < \infty$ en $\Omega \times [0,1]$.
(iii) $\int_0^t |g(s, x(w,s))|^2 ds < \infty$ en $\Omega \times [0,1]$.
(iv) Para todo $t \in [0,1]$, $(*)$ se tiene con probabilidad 1.

Consideremos $F = \{f : (*) \text{ tiene solución}\}$ y $G = \{g : (*) \text{ tiene solución}\}$, hay dos tipos de soluciones:

(a) Soluciones débiles: Para cada $f \in F$ y $g \in G$ existe $(\Omega, \{\mathfrak{F}_t\}, P, b_t)$ tal que $(*)$ tiene una solución x_t respecto de $(\Omega, \{\mathfrak{F}_t\}, P, b_t)$.

(b) Soluciones fuertes: Existe $(\Omega, \{\mathfrak{F}_t\}, P, b_t)$ tal que para cada $f \in F$ y $g \in G$ $(*)$ tiene solución x_t respecto de $(\Omega, \{\mathfrak{F}_t\}, P, b_t)$.

De lo anterior se puede concluir que toda solución fuerte es solución débil.

Ejemplo 5.1. Ecuaciones de Ito con Coeficientes Continuos

Tenemos los siguientes resultados:

Teorema 5.1 (Teorema de Keisler). *Si $(*)$ tiene solución para un movimiento Browniano adaptado al espacio filtrado $(\Omega, \{\mathfrak{F}_t\}, L(P))$ entonces $(*)$ tiene solución para cada movimiento Browniano adaptado a $\{F_t\}$ y cualquier condición inicial x_0, es decir si $(*)$ tiene una solución débil entonces tiene una solución fuerte.*

Demostración. Ver [6]. □

La siguiente proposición nos dice que condiciones debe tener $(*)$ para que tenga solución:

Proposición 5.1. Si en la ecuación $(*)$ se tiene que b_t es adaptado a $\{F_t\}$, f y g son funciones medibles, acotadas y continuas en la segunda variable, entonces $(*)$ tiene solución para toda condición inicial x_0. (Esta es una solución fuerte).

Demostración. Ver [6]. □

Ecuaciones de Ito con Coeficientes Medibles

Tenemos los siguientes resultados:

Proposición 5.2. Si $(*)$ es tal que b es un movimiento Browniano adaptado a la filtración $(\Omega, \{\mathfrak{F}_t\}, P)$, f y g son procesos adaptados y acotados, para $d \in \mathbb{R}^+$ definimos

$$\tau_d(w) = \inf\{t \in [0,1] : |x(w,t)| \geq d\}.$$

Dado $K \in \mathbb{R}^+$ y $d \in \mathbb{R}^+$, existe $N = N(n,d,K)$ tal que para toda f adaptada y g acotada por K, y todas las funciones $h \in L^{n+1}([0,1] \times \mathbb{R}^n)$

$$E\left(\int_0^{\tau_d} (\det g(w,t))^{\frac{2}{n+1}} \, |h(t, x(w,t))| \, dt\right) \leq N ||h||_{n+1} \, .$$

Esta desigualdad se conoce con el nombre de Desigualdad de Krylov.

Definición 5.2. Si $J \in {}^*\mathbb{R}^+$, una función $h : {}^*([0,1] \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow {}^*\mathbb{R}^m$ se dice J-Lipschitz si:

(i) h es interna .

(ii) h es acotada por J.

(iii) $||h(t,x) - h(s,y)|| \leq J||(t,x) - (s,y)||$ para todo $(t,x), (s,y)$ que están en ${}^*([0,1] \times \mathbb{R}^n)$.

Lema 5.1. *Sea $h : {}^*\mathbb{R}^m \longrightarrow {}^*\mathbb{R}^k$ una función interna y S-acotada (S-acotada implica S-integrable). Si $x \in {}^*\mathbb{R}^m$ y $[x]^J$ es la caja centrada en x con lado de longitud $\frac{1}{\sqrt{J}}$ donde $J \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ entonces*

$$h^J(x) = \frac{1}{m([x]^J)} \int_{[x]^J} h(t)\, dm(t)$$

es J-Lipschitz (donde m es la medida de Lebesgue).

Definición 5.3. Un proceso estocástico hiperfinito $X : \Omega \times T \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ se dice que es no anticipante si $X(w, \underline{t}) = X(w', \underline{t})$ cuando $w \approx_{\underline{t}} w'$.

Proposición 5.3. Si χ es la caminata aleatoria de Anderson en ${}^*\mathbb{R}^n$, y $U : \Omega \times T \longrightarrow {}^*(\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n)$ es un proceso no-anticipante tal que $U(w,t)$ es una matriz unitaria para todo $(w,t) \in (\Omega \times T)$, entonces la parte estándar de

$$\chi' = \int_0^t U d\chi$$

es un movimiento Browniano. $\mathfrak{U}(\chi)$ denota la clase de tales χ'.

Demostración. Ver [8] pag 63. □

Proposición 5.4. Sea $\chi : \Omega \times T \longrightarrow {}^*\mathbb{R}^n$ la caminata aleatoria de Anderson. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $D,K \in \mathbb{R}^+$ existe $N = N(n, D, K) \in \mathbb{R}^+$ y $J \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ tal que si $X : \Omega \times T \longrightarrow {}^*\mathbb{R}^n$ es de la forma

$$X(w,t) = X_0(w) + \int_0^t F(s, X(w,s))ds + \int_0^t G(s, X(w,s))d\chi'(w,s)$$

donde $F : {}^*([0,1] \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow {}^*\mathbb{R}^n$, $G : {}^*([0,1] \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow {}^*(\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n)$ son J-Lipschitz y acotadas por K, $X_0 \in {}^*\mathbb{R}^n$ y $\chi' \in \mathfrak{U}(\chi)$, entonces

$${}^\circ E\left(\int_0^{\sigma_D} \left(\det G(s, X(w,s))\right)^{\frac{2}{n+1}} |H(s, X(w,s))|dt\right) \leq N^\circ ||H||_{n+1}$$

Para toda $H : {}^*([0,1] \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ J-Lipschitz, donde

$$\sigma_D(w) = \min\Big\{\inf\{t \in T : |X(w,t)| \geq D\}, 1\Big\}.$$

Demostración. Ver [8] pag 65. □

Lema 5.2. *Sea $a : [0,1] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ una función medible y acotada que toma valores en las matrices simétricas y no negativas, entonces*

(i) *a^J es un levantamiento J-Lipschitz de a que toma valores simétricos y no negativos.*
(ii) *Para cada $M \in \mathbb{R}^+$ existe $m \in \mathbb{R}^+$ tal que si* $\det {}^*a(s,y) \geq M$ *para todo $(s,y) \in [(t,x)]^J$ entonces* $\det a^J(t,x) \geq m$.

Ver [8] pgina 66.

Las siguientes proposiciones nos dicen que condiciones debe tener $(*)$ para que tenga solución:

Proposición 5.5. Si en la ecuación $(*)$ se tiene que f y g funciones medibles y acotadas, y $\det|g(t,y)| > \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$ y para todo $(t,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n$, entonces $(*)$ tiene solución para toda condición inicial x_0 $\mathfrak{F}_0$-medible y todo movimiento Browniano b_t adaptado a $(\Omega, \{F_t\}, L(P))$.

Demostración. Ver [8] pag 68. □

Proposición 5.6. Si en la ecuación $(*)$ se tiene que f y g funciones medibles y acotadas tales que $f|_N$ y $g|_N$ son continuas, en donde $N \subseteq [0,1] \times \mathbb{R}^n$ y

$$N = \{(t,x) : \exists (t_n, x_n) \to (t,x) \text{ tal que } \det g(t_n, x_n) \to 0 \text{ si } n \to \infty\},$$

y si f o g son discontinuas en un punto $(t,x) \in N$, entonces $\det g > 0$ sobre $V - N$ para alguna vecindad V de (t,x).
Entonces $(*)$ tiene solución para toda condición inicial x_0 $\mathfrak{F}_0$-medible y todo movimiento Browniano b adaptado a $(\Omega, \{F_t\}, L(P))$.

Demostración. Ver [8] pag 70. □

Agradecimientos

El autor agradece a la profesora Myriam Muñoz de Özak del Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá D.C., por sus observaciones y su ayuda en la preparación de este manuscrito.

Referencias

[1] Albeverio Sergio, *Non Standar Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics*, Academic Press. 1986.

[2] R.M Anderson, *A non-standar representation for Brownian motion and Ito integration*, Israel J. Math 25. 1979.

[3] Ludwing Arnold, *Stochastic Differential Equations*, John Wiley and Sons, New York. 1979.

[4] Billingsley, *Probability and Measure*, John Wiley & Sons, New York. 1979.

[5] Doob, *Stochastic Processes*, John Wiley & Sons, London. 1953

[6] H.J Keisler, *An Infinitesimal Approach to Stochastic Analysis*, Memoris A.M.S. 297. 1984.

[7] N.V. Krylov, *Controlled Diffusion Processes*, Springer-Verlag, New york and Berlin. 1980.

[8] Mora Carlos, *Solución de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas* en Análisis no Estándar Trabajo de Grado. II-1998.

[9] Ospina Dwigth, *Integral estocástica con Martingalas usando análisis no estándar*, Trabajo de Grado. I-1999.