Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen VII No. 1 (2000), pp. 5–17

LOS GRÁFICOS EXISTENCIALES DE PEIRCE EN LOS SISTEMAS ALFA ^{o} Y ALFA^{oo}

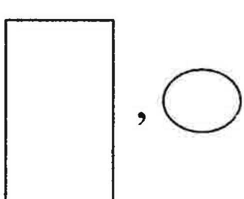
YURI ALEXANDER POVEDA QUIÑONES

ABSTRACT. Las reglas deductivas de eliminación y de inserción propuestas para los gráficos existenciales Alfa, de Peirce, son complejas para ser formalizadas en el Cálculo Proposicional Clásico. Las pruebas de validez de estas reglas en el Cálculo Proposicional Clásico requieren inducción pues dependen de la paridad de las cortaduras en cualquier fórmula.

Se presentarán dos nuevos sistemas deductivos Alfa^{o} y Alfa^{oo}, en los cuales: 1) ninguna regla deductiva se define en función de la paridad de las cortaduras. 2) Cada regla es una sub-regla de una de las reglas propuestas por Peirce para el sistema Alfa [3], 3) Los sistemas resultan equivalentes al Cálculo Proposicional Clásico, 4) Alfa^{o} sin el teorema de la deducción no resulta equivalente a Alfa^{oo}, 5) El sistema Alfa^{oo} no tiene entre sus reglas el teorema de la deducción, en su lugar se presenta un gráfico nuevo como único axioma, el cual resulta equivalente al teorema de la deducción.

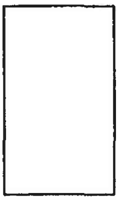
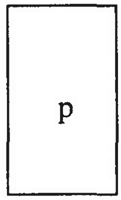
1. Sistema deductivo Alfa^{o}

Símbolos Primitivos.

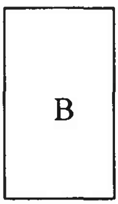

,p,q,r,.., Λ

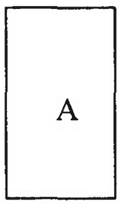
(*) Trabajo recibido 22/06/00, revisado 01/02/01. Universidad Tecnológica de Pereira. Departamento de Matemáticas. e-mail: yapoveda@utp.edu.co.

Gráficos Bien Hechos (gbh).

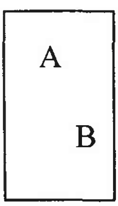
1)  es un gbh y 

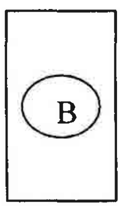
es un gbh

2) Si 

y 

son gbh, entonces



y 

son gbh, siempre y cuando el dibujo A no intersecte el dibujo B.

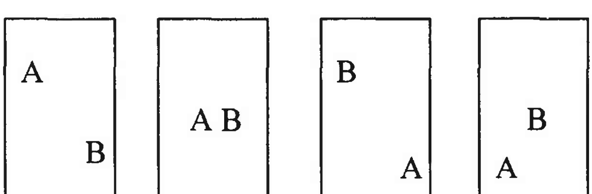
4) No son gbh aquellos construidos sin las reglas precedentes.

Nota

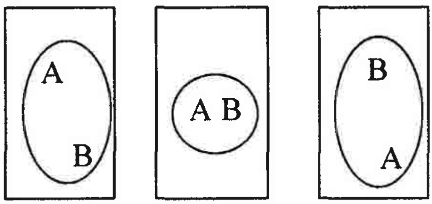
-Las letras mayúsculas pertenecen al metalenguaje y representan contenidos posibles dentro de la hoja de aserción

Isomorfismos entre gráficos.

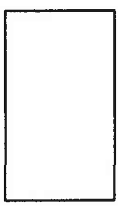
- Dos gráficos semejantes (la misma forma y diferente tamaño) son isomorfos.
- Si alguno de los siguientes gráficos es un gbh entonces los demás son gbh isomorfos a él.



- Si alguno de los siguientes gráficos es un gbh entonces los demás son gbh isomorfos a él.

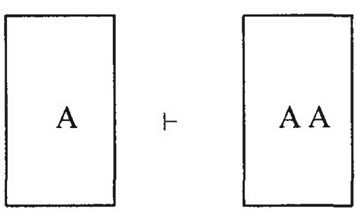


Axioma del sistema Alfa^o.

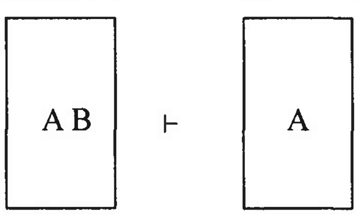


Reglas deductivas del sistema Alfa^o.

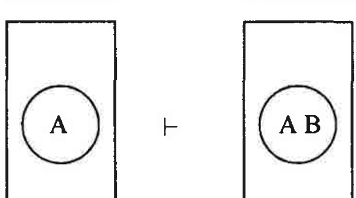
R1)

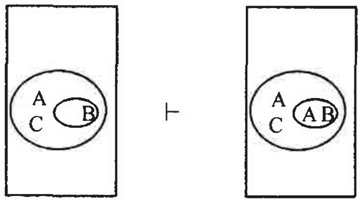


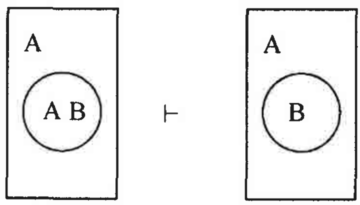
R2)

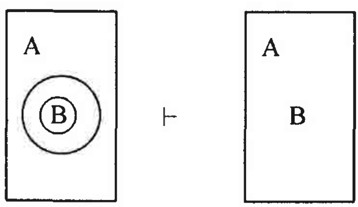


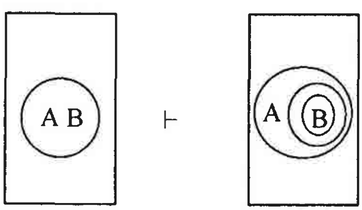
R3)

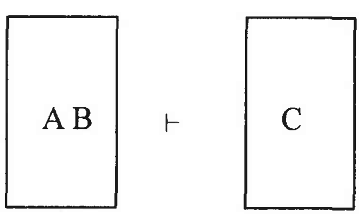


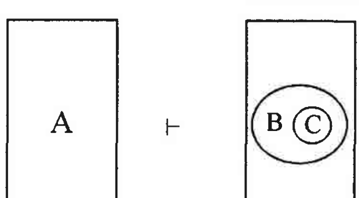
R4)


R5)


R6)


R7)


R8) Si


entonces


Notas

Las ocho reglas precedentes se dividen en dos tipos de reglas, de eliminación y de inserción; las reglas de inserción son: 1,3,4,7, las reglas de eliminación son: 2,5,6.

La regla 8 es una meta-regla que equivale al metateorema de la deducción y es dificil de catalogarla como una regla de inserción o de eliminación. La hipótesis corresponde a una eliminación mientras la conclución corresponde a una iserción.

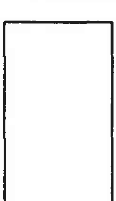
Estas reglas restringidas de las reglas propuestas por Peirce no son simétricas y sin embargo guardan relaciones precisas entre ellas. Por ejemplo puede considerarse que la regla 1 es la regla opuesta a la regla 2 aunque la regla 2 de eliminación es más general, la regla 4 es opuesta a la regla 5 y la regla 6 es opuesta a la 7.

Equivalencia entre Alfa^o y el Cálculo Proposicional Clásico.

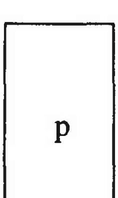
Proposición 1.1. El sistema Alfa^o es equivalente al cálculo proposicional clásico.

Prueba. La prueba se realizará en tres pasos: 1. Se establecerá una traducción entre los dos sistemas, 2. Se deducirán los axiomas de Rosser y el modus ponens del sistema Alfa^o, y 3. Se deducirán las reglas deductivas y al axioma de Alfa^o, a partir del cálculo proposicional clásico. □

1. Traducción Se define la traducción recursivamente sobre la complejidad de los gráficos.



$\xrightarrow{*}$ $\top$ (la verdad)



$\xrightarrow{*}$ p (Letra proposicional de CPC)

$$\boxed{A\,B} \xrightarrow{*} \left(\boxed{A}\right)^{*} \wedge \left(\boxed{B}\right)^{*}$$

$$\boxed{B} \xrightarrow{*} \neg\left(\boxed{B}\right)^{*}$$ (la negación de la traducción de B)

Afirmación La traducción de todo gráfico bien hecho es una fórmula bien formada. Esta afirmación se desprende de inmediato de la definición de la función de traducción usando inducción en la complejidad de las fórmulas.

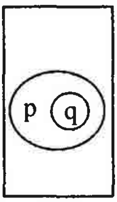
Afirmación La función de traducción no es sobreyectiva; sin embargo para toda α fbf del CPC, existe β fbf del CPC tal que α es equivalente a β y:

$$\left(\boxed{A}\right)^{*} = \beta$$

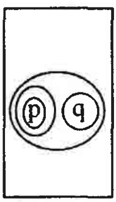
Prueba Basta escribrir α en términos de la conjunción y de la negación; lo cual es siempre posible pues este conjunto de conectivos es completo para el cálculo proposicional clásico (CPC) y toda fórmula en términos de estos conectivos posee un gráfico asociado.

Nota Como en el CPC, vale sustitución, basta trabajar en el segmento de fórmulas descritas con la conjunción y la negación; esta condición hace que la función $*$ sea biyectiva salvo gráficos equivalentes, si se restringe a este segmento y que por lo tanto se tenga traducción en los dos sentidos.

Nota Tanto [3] como [4], proponen una traducción directa para la implicación a saber:

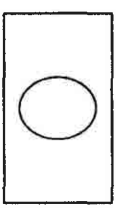
$\Bigg($  $\Bigg)^{*} = (p)^{*} \Rightarrow (q)^{*}$ Esta traducción hace que la relación $*$

no sea funcional. Por ejemplo el gráfico:



según la traducción directa de la implicación propuesta en [3] y [4] tiene dos traducciones posibles.

Afirmación De la traducción propuesta para Alfa^{o} se deduce que:

$\Bigg($  $\Bigg)^{*} = (p)^{*} \Rightarrow (q)^{*} = \perp$ (lo falso; la inconsistencia).

Axiomas del Cálculo Proposicional Clásico

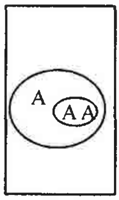
Se puede proponer cualquier axiomatización conocida, aquí se trabajará con la axiomatización de Rosser.

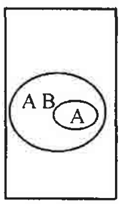
1) $\alpha \Rightarrow (\alpha \wedge \alpha)$
2) $(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \alpha$
3) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\urcorner(\beta \wedge \gamma) \Rightarrow \urcorner(\alpha \wedge \gamma))$
4) Modus Ponens.

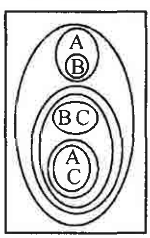
Se expresarán los axiomas en términos de la conjunción y la negación:

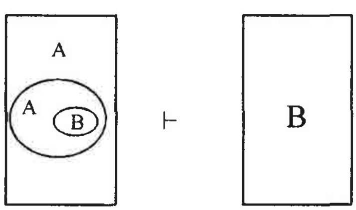
1) $\urcorner(\alpha \wedge \urcorner(p \wedge p))$
2) $\urcorner((\alpha \wedge \beta) \wedge \urcorner(\alpha))$
3) $\urcorner(\urcorner(\alpha \wedge \urcorner(\beta)) \wedge \urcorner(\urcorner(\urcorner(\beta \wedge \gamma) \wedge \urcorner(\urcorner(\alpha \wedge \gamma)))))$
4) $\alpha \wedge (\urcorner(\alpha \wedge \urcorner(\beta))) \ \vdash \beta$

Se escribirán las traducciones corresponedientes del CPC al sitema Alfa^{o}. La traducción está bien definida pues en el segmento de fórmulas descritas con la conjunción y la negación la traducción es biyectiva.

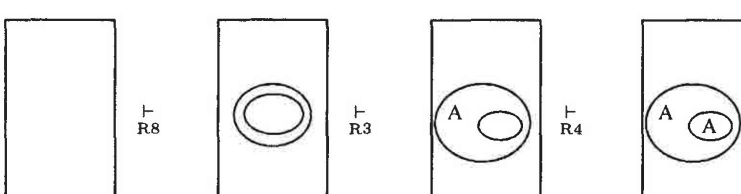
1) 

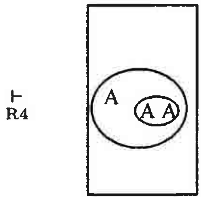
2) 

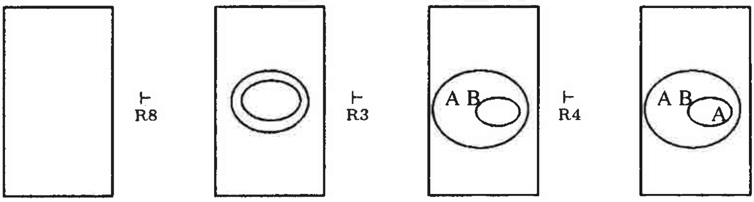
3) 

4) 

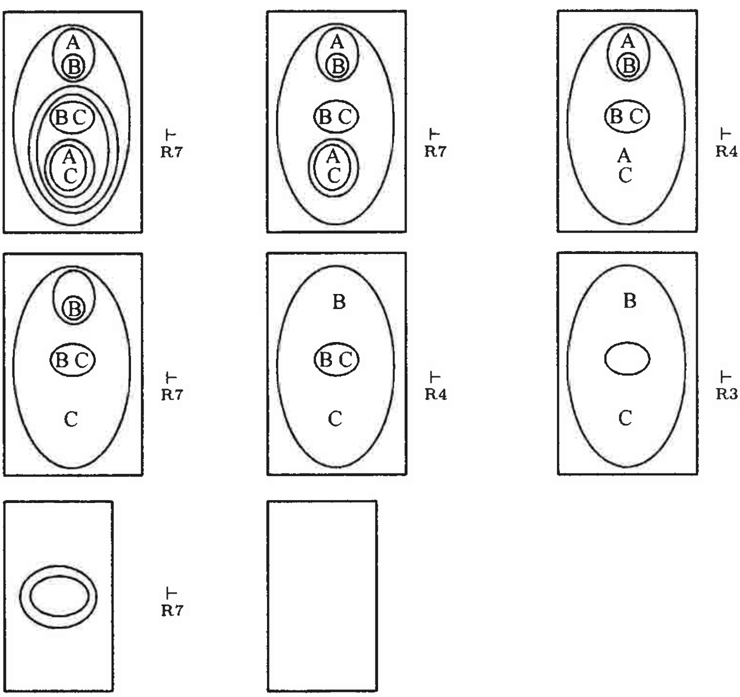
Se deducirán del único axioma de Alfa° los axiomas de Rosser y el modus ponens.

1) 

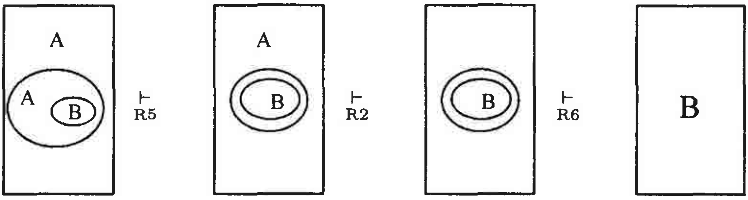


2) 

3) La deducción del tercer axioma de Roseer se presentará al **revés** por comodidad.



4) Modus ponens



Notas
En las dedcciones precedentes no se uso la regla uno, la demostración de los axiomas de Rosser solo necesito de las reglas de inserción, las reglas de eliminación solo se usaron para demostrar el modus ponens.

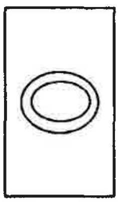
¿Cuál es el papel que desempeña el modus pones en el sistema de los gráficos existenciales? ¿Es necesario el modus ponens para deducir todos los teoremas del cálculo propocional en terminos de los gráficos existenciales de Peirce?

Equivalencia segunda parte
Se presentarán las traducciónes del axioma y las reglas deductivas del sistema Alfa^o en el lenguaje del CPC.

La traducción del axioma es la verdad, y por lo tanto es deducible en el CPC, debido a su completitud.
$(R1)^* = \alpha \vdash \alpha \wedge \alpha$
$(R2)^* = \alpha \wedge \beta \vdash \alpha$
$(R3)^* = \urcorner\alpha \vdash \urcorner(\alpha \wedge \beta)$
$(R4)^* = \urcorner((\alpha \wedge \gamma) \wedge \urcorner(\beta)) \vdash ((\alpha \wedge \gamma) \wedge \urcorner(\beta \wedge \alpha))$
$(R5)^* = \alpha \wedge \urcorner(\alpha \wedge \beta) \vdash \alpha \wedge \urcorner\beta$
$(R6)^* = \alpha \wedge \urcorner(\urcorner\beta) \vdash \alpha \wedge \beta$
$(R7)^* = \urcorner(\alpha \wedge \beta) \vdash \urcorner(\alpha \wedge \urcorner(\urcorner\beta))$
$(R8)^* = \alpha \wedge \beta \vdash \gamma$ entonces $\alpha \vdash \urcorner(\beta \wedge \urcorner(\gamma))$

Se debe observar que la traducción conserva la deducibilidad, lo que es deducible en Alfa^o es deducible en el CPC. Consecuentemente los sistemas son equivalentes.

Sistema Alfa^{oo}. Se obtiene quitando del sistema Alfa^{o}, el único axioma y la regla 8 y agregando el axioma:



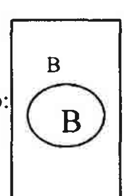
Para demostrar los axiomas de Rosser a partir del Sistema Alfa^{oo} basta quitar el primer paso en las demostraciones de esos mismos axiomas a partir del Sistema Alfa^{o}. De otra parte la traducción del axioma del Sistema Alfa^{oo} también es la verdad, pues los dos gráficos resultan equivalentes.

Proposición 1.2. El axioma de Alfa^{oo} es equivalente al metateorema de la deducción

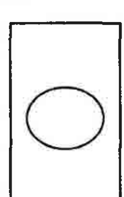
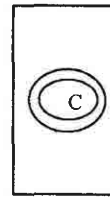
Prueba. El sistema Alfa^{o} no es independiente de la regla 8, es la única regla que permiten generar nuevas cortaduras dentro de la hoja de aserción a partir del axioma. El sistema Alfa^{o} es equivalente al sistema Alfa ^{oo} puesto que los dos sistemas son equivalentes al Cálculo Proposicional Clásico, el sistema Alfa^{oo} no tiene entre sus reglas el metateorema de la deducción y sin embargo sus reglas deductivas corresponden las primeras 7 reglas deductivas del sistema Alfa^{o} por lo cual resulta que el axioma de Alfa^{oo} es equivalente al teorema de la deducción. □

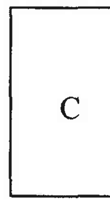
Consistencia del sistema Alfa^{o}

Es posible mostrar la consistencia del Sistema Alfa^{o} sin recurrir al CPC.

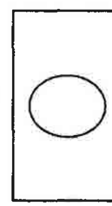
Observese primero que si el gráfico: 

es un teorema del sistema Alfa^{o},

entonces a partir de él se puede deducir  por la regla dos y a partir de este último gráfico usando la regla tres, se puede deducir 

y finalmente por la regla seis se podría deducir 

. Entonces el

Sistema Alfa^o es consistente si no puede deducir el gráfico 

Afirmación En el sistema Alfa^o no se puede deducir la falsedad

Proof. Prueba La única regla que produce nuevas cortaduras a partir del axioma, es la regla 8. Sin embargo la regla 8, solo produce un número par de cortaduras; por lo tanto es imposible que produsca la falsedad. □

Notas

1) Las reglas del Sistema Alfa^o no son simétricas unas con otras. Como el sistema plantedao en [4] es equivalente al Sistema Alfa^o; se deduce que la simetría se la dá el teorema de la deducción es decir la regla 8.

2) La forma como se demostró que a partir de una contradicción se puede demostrar culaquier cosa, pide como condición la regla tres. Si se quita la regla tres se pregunta si aún el sistema se trivializa a partir de una contradicción. Si el Sistema Alfa^o sin la regla tres, no se trivializa a partir de contradicciones, entonces se estaría frente a un sistema paraconsistente, con la ventaja de que tendría sus reglas naturales deductivas sin ayuda de la lógica consistente.

3) Debido a la independencia del teorema de la deducción en el Sistema Alfa^o, es posible emprender un trabajo de caracterización de lógicas intermedias que no posean el teorema de la deducción.

4) La no simetría de las reglas facilita el trabajo de axiomatización de la lógica intuicionista en el segmento de la lógica proposicional.

Referencias

[1] X. Caicedo, *Elementos de Lógica y Calculabilidad,* Bogotá: Una empresa docente, 1980.
[2] A. Tarski, *Introducction to Logic,* New York: Dover, 1995.
[3] P. Thibaud, *La lógica de Charles Sanders Peirce,* Madrid: Paraninfo, 1982.
[4] D. Robers, *The Existencial Graphs of Charles S. Peirce,* Illinois: Universidad de Illinois, 1963.
[5] F. Zalamea, *Lógica Topológica: una introduccion a los gráficos existenciales de Peirce,* Bogotá, XVI Coloquio Distrital de Matemáticas, 1997.