

## **Comparación de técnicas de imputación para tratar respuestas censuradas en un diseño de experimentos bivariado**

### **Comparison of imputation techniques to deal with censored responses in a bivariate experimental design**

Cecilia Abigail Zúñiga Maldonado<sup>1</sup>, Manuel Darío Hernández Ripalda<sup>2</sup> y José Alfredo Jiménez García<sup>3</sup>

**Palabras clave:** diseño de experimentos bivariado; datos censurados; método de imputación; configuración óptima de parámetros

**Keywords:** design of bivariate experiments; censored data; imputation method; optimal setting of parameters

Recepción: 07-12-2017 / Aceptación: 28-02-2018

#### **Resumen**

**Introducción:** El análisis de diseños de experimentos con respuestas bivariadas puede ser un reto para el investigador, más aún cuando algunos datos de las respuestas están censurados. Chowdhury y Aggarwala (2007) presentaron un conjunto de técnicas para imputar valores a los datos censurados; en este trabajo se comparan esas técnicas. Se utiliza un método propuesto por Chiao y Hamada (2001) para identificar la configuración óptima de parámetros. El caso con los datos que aquí se trata es el reportado por Harper, Kosbe y Peyton (1987) sobre el desequilibrio de un componente de cubierta de rueda de plástico.

**Método:** Los datos del experimento no se encuentran censurados originalmente, estos se analizan a fin de tener una base de comparación. Después se implementan criterios para censurar el 16 y 21 por ciento de las respuestas con lo que se generan dos nuevos conjuntos de datos, a estos se aplican las técnicas de imputación: 1) esperanza condicional después de hacer regresión con las respuestas, 2) estadísticas de orden y 3) observaciones simuladas. Para cada conjunto de datos generado se determina la configuración óptima de parámetros ( $X_{opt}$ ) y se calcula la suma de cuadrados del error (SCE).

**Resultados:** Con los datos censurados al 16%, las técnicas de imputación: esperanza condicional iniciando con  $Y_1$ , estadísticas de orden para  $Y_1$  y observaciones simuladas para  $Y_2$ , generan valores con los que se obtiene una  $X_{opt}$  que concuerda con los datos originales. Con los datos censurados al 21%, ninguna de las técnicas obtiene una  $X_{opt}$  que concuerda con los datos originales. La suma de cuadrados del error de la respuesta 1 ( $SCE_1$ ) de observaciones simuladas para  $Y_2$  es

<sup>1</sup>Estudiante de la maestría en Ingeniería Industrial, Tecnológico Nacional de México en Celaya, Celaya. E-mail: abigail.zuni@gmail.com

<sup>2, 3</sup>Profesor adscrito al departamento de Ingeniería Industrial, Tecnológico Nacional de México en Celaya, Celaya  
© Universidad De La Salle Bajío (México)

significativamente menor comparada con la de los otros métodos. La diferencia entre la  $SCE_2$  resultante en todas las técnicas no es considerable.

**Conclusión:** Después de comparar la  $X_{opt}$  y los SCE resultantes de los conjuntos de datos imputados con las técnicas mencionadas se puede decir que el método observaciones simuladas para  $Y_2$  funciona mejor para tratar las respuestas censuradas del diseño de experimentos bivariado que aquí se trabaja.

## Abstract

**Introduction:** The analysis of designs of experiments with bivariate answers can be a challenge for the researcher, especially when some data of the answers are censored. Chowdhury and Aggarwala (2007) presented a set of techniques to impute values to the censored data, in this work those techniques are compared. A method proposed by Chiao and Hamada (2001) is used to identify the optimal setting of parameters. The case with the data here is the one reported by Harper, Kosbe and Peyton (1987) about the imbalance of a plastic wheel cover component.

**Method:** The data of the experiment are not censored originally, these are analyzed in order to have a base of comparison. Criteria are then implemented to censor 16 and 21 percent of the responses, generating two new data sets, to which the imputation techniques are applied: 1) conditional expectation after regression of the responses, 2) order statistics and 3) simulated observations. For each generated data set, the optimal setting of parameters ( $X_{opt}$ ) is determined and the sum of squares of the error (SCE) is calculated.

**Results:** With the censored data at 16%, the imputation techniques: conditional expectation starting with  $Y_1$ , order statistics for  $Y_1$  and simulated observations for  $Y_2$ , generate values with which a  $X_{opt}$  is obtained that agrees with the original data. With the censored data at 21%, none of the techniques obtains a  $X_{opt}$  that matches the original data. The sum of squares of the error of the response 1 ( $SCE_1$ ) of simulated observations for  $Y_2$  is significantly smaller compared to that of the other methods. The difference between the  $SCE_2$  resulting in all the techniques is not considerable.

**Conclusion:** After comparing the  $X_{opt}$  and the SCE resulting from the data sets imputed with the mentioned techniques it can be said that the simulated observations method with  $Y_2$  works better to deal with censored responses of the bivariate experiment design that is being worked on here.

## **Introducción**

Puesto que los objetos de estudio en un experimento presentan múltiples características, es posible que en algunos diseños de experimentos se manifiesten variables de respuestas multivariadas. Tradicionalmente cada variable de respuesta en estos diseños se analizaba de manera separada, sin embargo, se ha comprobado que esta no es la mejor manera de análisis principalmente cuando existe una correlación entre las variables de respuesta (Chiao y Hamada, 2001).

El análisis del experimento se complica más cuando se presentan datos censurados en una o más variables de respuesta. Esto es posible que ocurra debido a limitaciones en la duración del experimento, limitaciones en los mecanismos de medición, acontecimientos que afecten la continuidad del experimento, entre otros.

Los métodos para tratar datos censurados suelen ser laboriosos y muchas veces los softwares para desarrollarlos presentan inconvenientes de accesibilidad; por esta razón se considera como una importante ventaja contar con R (2016) que es un software de acceso libre que contiene todas las funciones necesarias para desarrollar casi cualquier técnica de imputación.

En este trabajo se comparan las técnicas de imputación que Chowdhury y Aggarwala (2007) proponen; con el objetivo de identificar la más conveniente para tratar los datos censurados del experimento que aquí se trabaja.

El tema de los datos censurados en diseños de experimentos con respuestas multivariadas es interesante y con un amplio campo de aplicación, a pesar de ello el trabajo de Chowdhury y Aggarwala (2007) es de los pocos que lo abordan.

En su artículo Chowdhury y Aggarwala (2007) desarrollan y aplican los métodos propuestos en un ejemplo numérico, finalizan al obtener los valores de imputación, su conclusión declara que los valores de imputación son similares a los valores originales del experimento antes de ser censurado. No obstante, no mencionan aspectos importantes como: si la estimación de la configuración óptima de parámetros del conjunto de respuestas con valores imputados se diferencia del resultado del conjunto de respuestas originales (no censuradas), o cual de las técnicas imputa valores más parecidos a los originales.

En este trabajo para resolver las cuestiones anteriormente mencionadas se hace un análisis a cada conjunto de respuestas con valores imputados: 1) se desarrolla un método para identificar la configuración óptima de parámetros ( $X_{opt}$ ) y 2) se calcula la suma de cuadrados del error (SCE) de

cada uno con respecto a los datos originales. Los resultados de cada técnica se comparan entre sí para lograr el objetivo que aquí se plantea.

En la literatura se pueden encontrar algunos métodos para analizar respuestas multivariadas, por ejemplo la función de deseabilidad de Derringer y Suich (1980), pero aquí se implementa el método propuesto por Chiao y Hamada (2001) en el que, considerando los parámetros de una distribución normal bivariada, primero se modelan los parámetros de la distribución de respuesta bivariada en términos de los factores experimentales, luego se encuentra la configuración óptima de factores con los que se obtiene la más alta proporción de concordancia.

La proporción de concordancia (Wang y Lam, 1996), dada por la Ecuación 1, es la probabilidad de que  $Y_{1i}$  y  $Y_{2i}$  cumplan con las especificaciones correspondientes simultáneamente. Los límites en los que se desea que se encuentren  $Y_1$  y  $Y_2$ , denotados como  $(l_1, u_1)$  y  $(l_2, u_2)$  conforman la región de especificación  $S$  que se denota en la Ecuación 1. Esta ecuación se resuelve con la función “*sadmvn*” del paquete “*mnormt*” (Azzalini y Genz, 2016) disponible en R (R Core Team, 2016).

$$P(Y \in S), \text{ Ecuación 1.}$$

El experimento que aquí se trabaja es el reportado por Harper, Kosbe y Peyton (1987) donde el objetivo es encontrar la configuración óptima de parámetros de modelado por inyección para minimizar el desequilibrio de un componente de cubierta de rueda de plástico. Se consideran siete factores potencialmente importantes para el equilibrio del componente a dos niveles cada uno, que se denotan por -1, para nivel bajo y +1, para nivel alto. Las características de calidad correlacionadas que se miden del componente de la cubierta de la rueda son el peso total ( $Y_1$  en gramos) y el equilibrio ( $Y_2$  en pulgadas-onzas). La región de especificación de dos lados para  $Y_1$  y  $Y_2$  está definida por (710, 715) y (0.3, 0.4), respectivamente. El experimento se lleva a cabo mediante un diseño factorial fraccionado  $2^{7-4}$ , con cinco replicas. La matriz de diseño y las respuestas sin censura se muestran en la Tabla 1.

**Tabla 1.** Diseño experimental y respuestas bivariadas sin censura para el experimento de componente de cubierta de rueda (Chiao y Hamada, 2001).

RUN	F1	F2	F3	F4	F5	Replica		1		2		3		4		5	
						F6	F7	$Y_1$	$Y_2$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_1$	$Y_2$
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	711.9	0.59	713.4	0.59	712.3	0.47	712.4	0.71	711.9	0.63
2	-1	-1	-1	1	1	1	1	725	0.7	720.1	0.91	711.8	1.13	723.9	0.79	720.9	0.78
3	-1	1	1	-1	-1	1	1	711.6	0.56	711.7	0.44	711.3	0.46	712.1	0.53	711.7	0.46

4	-1	1	1	1	1	-1	-1	733.7	1.5	724.1	1.55	732	1.38	732.7	1.45	733.3	1.45
5	1	-1	1	-1	1	-1	1	725.4	1.25	721.6	1.36	722.6	1.51	723.1	1.22	721.1	1.25
6	1	-1	1	1	1	1	-1	728.7	1.17	721.1	0.97	722.9	0.98	723	0.97	719.7	0.73
7	1	1	-1	-1	1	1	-1	726.6	1.52	731.4	1.58	731.4	1.61	729.6	1.4	731.3	1.57
8	1	1	-1	1	-1	-1	1	714.3	0.57	714.4	0.51	713.6	0.44	716.3	0.44	714.6	0.56

Este es el mismo experimento que manejan Chowdhury y Aggarwala (2007) en su trabajo, ellos imponen las condiciones para las unidades de medida para el peso y el balance de la rueda de la siguiente manera: la báscula puede medir hasta un máximo de 730 g y el indicador de equilibrio de la rueda puede medir hasta un máximo de 1.5 pulgadas-onzas, lo que lleva a la censura de aproximadamente el 16% de las respuestas en el conjunto de datos, como se muestra en la Tabla 2. Además de comparar las técnicas de imputación con los valores de censura impuestos por Chowdhury y Aggarwala, en este trabajo, también se comparan las técnicas de imputación cuando los límites de censura son 729 y 1.44 para la capacidad de la báscula y el indicador de equilibrio de la rueda, respectivamente, y por tanto aproximadamente el 21% de las respuestas en el conjunto de datos están censuradas, como se muestra en la Tabla 3.

**Tabla 2.** Diseño experimental y respuestas bivariadas con censura al 16% para el experimento de componentes de cubierta de rueda.

RUN	Replica							1		2		3		4		5	
	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	711.9	0.59	713.4	0.59	712.3	0.47	712.4	0.71	711.9	0.63
2	-1	-1	-1	1	1	1	1	725	0.7	720.1	0.91	711.8	1.13	723.9	0.79	720.9	0.78
3	-1	1	1	-1	-1	1	1	711.6	0.56	711.7	0.44	711.3	0.46	712.1	0.53	711.7	0.46
4	-1	1	1	1	1	-1	-1	>730	1.5	724.1	>1.5	>730	1.38	>730	1.45	>730	1.45
5	1	-1	1	-1	1	-1	1	725.4	1.25	721.6	1.36	722.6	>1.5	723.1	1.22	721.1	1.25
6	1	-1	1	1	-1	1	-1	728.7	1.17	721.1	0.97	722.9	0.98	723	0.97	719.7	0.73
7	1	1	-1	-1	1	1	-1	726.6	>1.5	>730	>1.5	>730	>1.5	729.6	1.4	>730	>1.5
8	1	1	-1	1	-1	-1	1	714.3	0.57	714.4	0.51	713.6	0.44	716.3	0.44	714.6	0.56

**Tabla 3.** Diseño experimental y respuestas bivariadas con censura al 21% para el experimento de componentes de cubierta de rueda.

RUN	Replica							1		2		3		4		5	
	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	711.9	0.59	713.4	0.59	712.3	0.47	712.4	0.71	711.9	0.63
2	-1	-1	-1	1	1	1	1	725	0.7	720.1	0.91	711.8	1.13	723.9	0.79	720.9	0.78
3	-1	1	1	-1	-1	1	1	711.6	0.56	711.7	0.44	711.3	0.46	712.1	0.53	711.7	0.46
4	-1	1	1	1	1	-1	-1	>729	>1.44	724.1	>1.44	>729	1.38	>729	>1.44	>729	>1.44
5	1	-1	1	-1	1	-1	1	725.4	1.25	721.6	1.36	722.6	>1.44	723.1	1.22	721.1	1.25
6	1	-1	1	1	-1	1	-1	728.7	1.17	721.1	0.97	722.9	0.98	723	0.97	719.7	0.73
7	1	1	-1	-1	1	1	-1	726.6	>1.44	>729	>1.44	>729	>1.44	>729	1.4	>729	>1.44
8	1	1	-1	1	-1	-1	1	714.3	0.57	714.4	0.51	713.6	0.44	716.3	0.44	714.6	0.56

Chiao y Hamada (2001) aplicaron su método de análisis al mismo experimento que se utiliza en este trabajo, por tanto, se conoce la configuración óptima de parámetros de los datos sin censura. Las configuraciones óptimas de parámetros de los conjuntos de datos que se generan por los

métodos de imputación, de los datos censurados al 16% así como de los datos censurados al 21%, se determinan en este trabajo.

El principal objetivo aquí es identificar la técnica de imputación más conveniente para el experimento que aquí se trabaja en presencia de dos porcentajes de datos censurados, lo cual se hace a través de comparar la configuración óptima de parámetros ( $X_{opt}$ ) y la suma de cuadrados del error (SCE) de cada conjunto de respuestas obtenidas después de la imputación. Con la ventaja de contar con R (2016) que es un software de acceso libre en el que se puede desarrollar el trabajo de principio a fin.

### **Método**

En la Figura 1 se aprecia de manera esquemática y a grandes rasgos el método a seguir a partir del diseño de experimentos con datos bivariados, el cual se muestra en la Tabla 1. En la primera etapa del método se trabaja con datos sin censura, a los cuales se les aplica el método de análisis de Chiao y Hamada, que más adelante se describe, para obtener la configuración óptima de parámetros de los datos originales, representada como  $X_{opt}$ .

En la segunda etapa del método se trabaja con los datos censurados como se muestran en las Tablas 2 y 3. A partir de estas dos nuevas bases de datos se desarrollan las técnicas de imputación, de las cuales surgen nuevos conjuntos de datos entre los que solo se van modificando los valores de los datos que fueron censurados. Cada conjunto de datos nuevos se compara contra los datos originales para calcular la suma de cuadrados del error, y a cada conjunto se le aplica el método de análisis de Chiao y Hamada para obtener una  $X_{opt}$ .

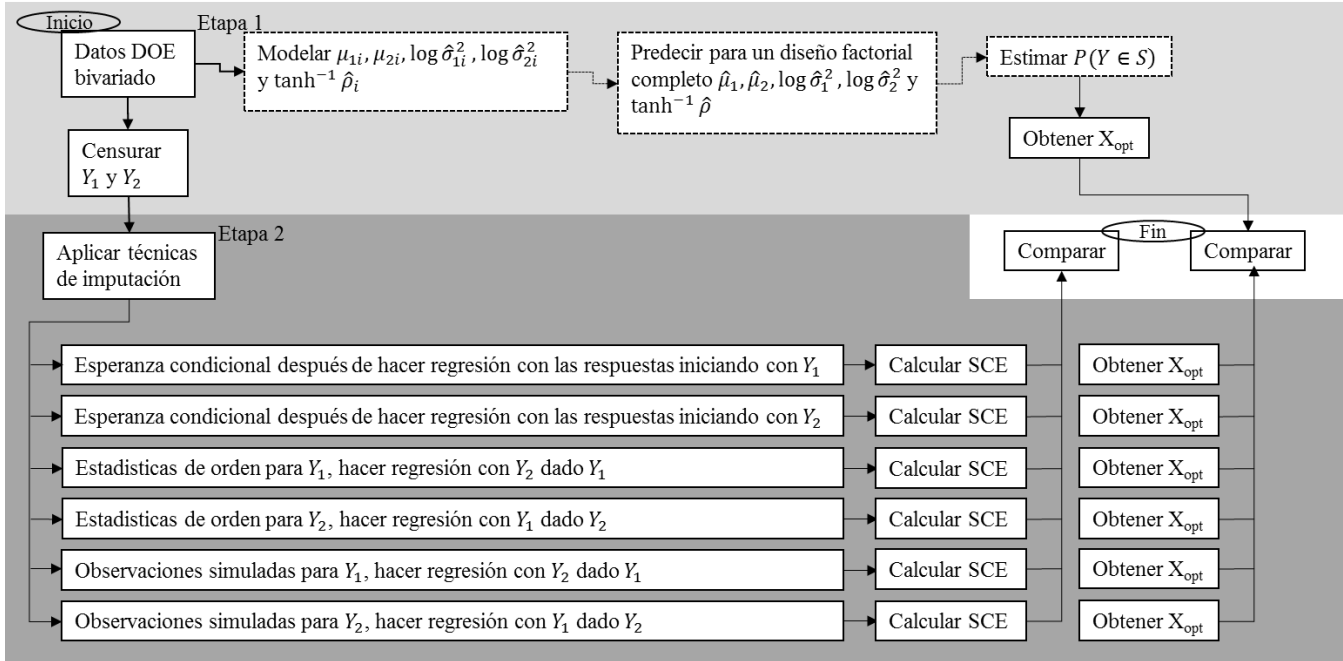


Figura 1. Método del trabajo. Fuente: Autor.

**Técnicas de imputación**

**Esperanza condicional después de hacer regresión con las respuestas**

1. Seleccionar una de las dos salidas del conjunto de respuestas bivariado del experimento. Aplicar únicamente a las observaciones no censuradas una estimación de mínimos cuadrados para el modelo de respuestas simple  $Y_j = \beta X + \varepsilon$ , para  $j=1$  o  $2$ .

Nota: para estimar modelos lineales, se utiliza la función “lm” (Chambers, 1992) disponible en R (R Core Team, 2016) como parte de las funciones básicas del software.

2. Para las respuestas censuradas estimar  $E(Y_{ji} | X_i) = \beta X$ , asumiendo que  $Y_{ji} \approx N(\beta X, \sigma^2)$ .
3. Puesto que el valor anterior no considera el valor límite de censura se usa la Ecuación 2 de esperanza condicional.

$$E(Y_{ji}^* > t_j) = \mu + \sigma \frac{f(u)}{1 - F(u)}, \text{ Ecuación 2.}$$

Dónde:  $Y_{ji}$  representa a la respuesta para la cual se está haciendo la estimación,  $Y_{ji}^*$  es el valor estimado inicial para la respuesta  $Y_{ji}$ ,  $t_j$  es el valor límite de censura,  $\mu$  es igual a  $E(Y_{ji} | X_i) = \beta X$ ,  $\sigma$  es la desviación estándar estimada del modelo en el paso 1, y  $u = (Y_{ji}^* - \mu) / \sigma$ .

4. Para imputar valores a los datos censurados de la otra respuesta se considera la distribución conjunta de las respuestas, haciendo la regresión con, por ejemplo, si se inició el proceso con  $Y_1, Y_2$  dado  $Y_1$  resultando el modelo  $Y_2 = \alpha + \beta Y_1$ . Después se utiliza la ecuación de esperanza condicional dada en el paso 3 ahora para estimar  $Y_{2i}$  dado que  $Y_{2i}^* > t_2$ .
5. Seguir el método de la manera opuesta, es decir, iniciando esta vez con la estimación de mínimos cuadrados para el modelo de respuestas simple de la otra respuesta, por ejemplo, si se inició el proceso con  $Y_1$  repetir ahora estimando primero  $Y_2 = \beta X + \varepsilon$ .

La Tabla 4 muestra el código en R para aplicar esta técnica de imputación.

**Tabla 4.** Código en R para la técnica: esperanza condicional después de hacer regresión con las respuestas iniciando con  $Y_1$ , aplicada en los datos censurados al 16%.

```
m1<- lm(C1~(F1+F2+F3+F4+F5+F6+F7)); B1<- coef(m1)
av1= anova(m1); dv1<- sqrt(av1[[3]][8])
BX1=B1[1]+B1[2]*F1+B1[3]*F2+B1[4]*F3+B1[5]*F4+B1[6]*F5+B1[7]*F6+B1[8]*F7
EY1=ifelse(Y1<730, Y1, BX1+(dv1*dnorm((730-BX1)/dv1)/(1- pnorm((730-BX1)/dv1))))
m2<- lm(C2~EY1); B2<- coef(m2)
av2= anova(m2); dv2<- sqrt(av2[[3]][2]); BX2<- B2[1]+B2[2]*EY1
EY2=ifelse(Y2<1.5, Y2, BX2+(dv2*dnorm((1.5-BX2)/dv2)/(1- pnorm((1.5-BX2)/dv2))))
```

### Estadísticas de orden

1. Seleccionar una de las dos salidas del conjunto de respuestas bivariado del experimento. Aplicar únicamente a las observaciones no censuradas una estimación de mínimos cuadrados para el modelo de respuestas simple  $Y_j = \beta X + \varepsilon$ .
2. En lugar de usar la media estimada ( $Y_{ji}^*$ ) como reemplazo de cada observación, se estiman los valores esperados de las estadísticas de orden con lo cual se obtienen diferentes valores para las respuestas  $Y_j$  usando la función de densidad de la distribución normal truncada. Entonces, para los  $n$  datos censurados en la fila  $i$ ésima (correspondiente a una corrida con  $n$  replicas), la estimación sería como la Ecuación 3.



$$E(Y_{i:m}) = \int_t^{\infty} \frac{n!}{(i-1)!(n-1)!} f(y)[F(y)]^{i-1}[1-F(y)]^{n-i} dy, \text{ Ecuación 3.}$$

Donde  $y = Y_{ji}^*$ ,  $F(y) = \int_t^{\infty} f(y)dy$  y  $t$  es el valor límite de censura. La distribución normal truncada se estima mediante el paquete “truncnorm” (Trautmann, Steuer, Mersmann, y Bornkamp, 2014) disponible en R (R Core Team, 2016).

3. Para imputar valores a los datos censurados de la otra respuesta se considera la distribución conjunta de las respuestas, tal como se explica en el paso 4 del método esperanza condicional después de hacer regresión con las respuestas.

A manera de ejemplo en la Tabla 5 se puede observar el código para desarrollar esta técnica en el lenguaje R para imputar los valores censurados en la corrida 7 de la respuesta  $Y_2$ .

**Tabla 5.** Código en R para: estadísticas de orden para la corrida 7 de la respuesta  $Y_2$ , aplicada en los datos censurados al 16%.

```
m2<- lm(Y2~(F1+F2+F3+F4+F5+F6+F7)); B2<- coef(m2)
av2= anova(m2); dv2<- sqrt(av2[[3]][8])
RUN7= ifelse (RUN==7, RUN, NA) # ¿Cuántos datos censurados hay en la corrida 7?
BX7= B2[1]+B2[2]*1+B2[3]*1+B2[4]*-1+B2[5]*-1+B2[6]*1+B2[7]*1+B2[8]*-1
mm=length(RUN7); Y7<- matrix(0.0, mm, 1)
for(i in 1:mm){ fac= factorial(mm)/(factorial(i-1)*factorial(mm-i))
ec7<- function(x) fac*(truncnorm::dtruncnorm(x,mean =
BX7,sd=dv2,a=1.5,b=Inf))* (truncnorm::ptruncnorm(x,mean = BX7,sd=dv2,a=1.5,b=Inf))^(i-1)*(1-
(truncnorm::ptruncnorm(x,mean = BX7,sd=dv2,a=1.5,b=Inf)))^(mm-i)*x
y7<- integrate(ec7,1.5,Inf); y7= y7$value; Y7[i]= y7}
```

### Observaciones simuladas

1. Sea que  $U = \frac{F(y) - F(t)}{1 - F(t)}$  es la función de distribución acumulada de una distribución normal truncada cuando  $y > t$ .  $U$  es una variable aleatoria uniforme  $(0,1)$ , se puede despejar  $F(y)$  como en la Ecuación 4. Por lo que, la variable aleatoria  $Y$  sería como se observa en la ecuación 5.

$$F(y) = U[1 - F(t)] + F(t) = k, \text{ Ecuación 4.}$$

$$Y = F^{-1}(k), \text{ Ecuación 5.}$$

2. Para imputar valores a los datos censurados de la otra respuesta se considera la distribución conjunta de las respuestas, tal como se explica en el paso 4 del método esperanza condicional después de hacer regresión con las respuestas.

Las ecuaciones 4 y 5 se desarrollan con el código presentado en la Tabla 6 para el software R, donde se utiliza la técnica de observaciones simuladas para imputar valores a los datos censurados al 16% de la respuesta  $Y_2$ .

**Tabla 6.** Código en R para la técnica: observaciones simuladas para  $Y_2$ , aplicada en los datos censurados al 16%.

```
m2<- lm(Y2~(F1+F2+F3+F4+F5+F6+F7)); B2<- coef(m2)
av2= anova(m2); dv2<- sqrt(av2[[3]][8])
BX2= B2[1]+B2[2]*F1+B2[3]*F2+B2[4]*F3+B2[5]*F4+B2[6]*F5+B2[7]*F6+B2[8]*F7
EY2=ifelse(Y2<1.5,Y2,BX2+(dv2*dnorm((1.5-BX2)/dv2)/(1-pnorm((1.5-BX2)/dv2)))
t2=1.5; l=5; ym2= ifelse(Y2<1.5,Y2,EY2); mi2<- matrix(0.0,1,1)
Ft2=function(t2){pnorm(t2, mean = ym2[ym2>t2], sd=dv2)}
if((max(ym2)>t2) && (length(ym2[ym2>t2])!=0)){
  for(s in 1:length(ym2[ym2>t2])){
    for(j in 1:l){
      U2=runif(1);          k2=Ft2(t2)[s]+(1-Ft2(t2)[s])*U2
      Ym2=qnorm(k2, mean = ym2[ym2>t2][s], sd=dv2);  mframe2= data.frame(Ym2);  vv22<- mframe2
      mi2[,j]<- t(vv22);          j=j+1
      meanY2= mean(mi22)
      if(ym2[ym2>t2][s]>t2){          ym2[ym2>t2][s]=meanY2
        DATA<- data.frame(RUN,REP,F1,F2,F3,F4,F5,F6,F7,Y1,Y2=ym2)      }      s=s+1    }}
```

### Análisis: configuración óptima de parámetros

Dado que se desea que  $Y_j$  se encuentre dentro de los límites de especificación y sea un diseño fraccionado de  $k$  factores con  $m$  número de corridas y  $n$  replicas:

1. Calcular  $\mu_{1i}$ ,  $\mu_{2i}$ ,  $\sigma_{1i}^2$ ,  $\sigma_{2i}^2$  y  $\rho_i$ , donde  $\mu_{ji}$  es la media de la respuesta  $j=1,2$  en la corrida  $i=1, 2, \dots, m$ ,  $\sigma_{ji}^2$  es la varianza y  $\rho_i$  el coeficiente de correlación.
2. Dado que las distribuciones de las varianzas y de los coeficientes de correlación implican cierta complejidad se transforman en  $\log \sigma_{1i}^2$ ,  $\log \sigma_{2i}^2$  y  $\tanh^{-1} \rho_i$ , así son aproximadamente normales y se continúa el proceso de una manera más simple.

En la Tabla 7 se presentan los valores de  $\mu_{1i}$ ,  $\mu_{2i}$ ,  $\log \sigma_{1i}^2$ ,  $\log \sigma_{2i}^2$  y  $\tanh^{-1} \rho_i$  correspondientes a las ocho corridas de los datos originales, y de los datos con valores imputados mediante las técnicas aquí mencionadas.

**Tabla 7a.** Valores  $\mu_{1i}$ ,  $\mu_{2i}$ ,  $\log \sigma_{1i}^2$ ,  $\log \sigma_{2i}^2$  y  $\tanh^{-1} \rho_i$  de los datos originales (sin censura).

Run	$\mu_{1i}$	$\mu_{2i}$	$\log \sigma_{1i}^2$	$\log \sigma_{2i}^2$	$\tanh^{-1} \rho_i$	Run	$\mu_{1i}$	$\mu_{2i}$	$\log \sigma_{1i}^2$	$\log \sigma_{2i}^2$	$\tanh^{-1} \rho_i$
1	712.38	0.60	-0.98	-4.89	-0.03	5	722.76	1.32	1.03	-4.24	-0.23
2	720.34	0.86	3.29	-3.57	-2.02	6	723.08	0.96	2.46	-3.71	1.49
3	711.68	0.49	-2.50	-5.91	0.37	7	730.06	1.54	1.47	-4.99	0.50
4	731.16	1.47	2.77	-5.51	-0.74	8	714.64	0.50	0.00	-5.54	-0.27

**Tabla 7b.** Valores  $\mu_{1i}$ ,  $\mu_{2i}$ ,  $\log \sigma_{1i}^2$ ,  $\log \sigma_{2i}^2$  y  $\tanh^{-1} \rho_i$  de los datos censurados al 16%.

	Esperanza condicional iniciando con $Y_1$					Esperanza condicional iniciando con $Y_2$					Estadísticas de orden para $Y_1$				
	$\mu_{1i}$	$\mu_{2i}$	$\log \sigma_{1i}^2$	$\log \sigma_{2i}^2$	$\tanh^{-1} \rho_i$	$\mu_{1i}$	$\mu_{2i}$	$\log \sigma_{1i}^2$	$\log \sigma_{2i}^2$	$\tanh^{-1} \rho_i$	$\mu_{1i}$	$\mu_{2i}$	$\log \sigma_{1i}^2$	$\log \sigma_{2i}^2$	$\tanh^{-1} \rho_i$
1	712.38	0.60	-0.98	-4.89	-0.03	712.38	0.60	-0.98	-4.89	-0.03	712.38	0.60	-0.98	-4.89	-0.03
2	720.34	0.86	3.29	-3.57	-2.02	720.34	0.86	3.29	-3.57	-2.02	720.34	0.86	3.29	-3.57	-2.02
3	711.68	0.49	-2.50	-5.91	0.37	711.68	0.49	-2.50	-5.91	0.37	711.68	0.49	-2.50	-5.91	0.37
4	729.56	1.47	2.27	-5.32	-1.06	730.30	1.47	2.49	-5.34	-1.02	730.30	1.47	2.49	-5.34	-1.02
5	722.76	1.33	1.03	-3.91	-0.20	722.76	1.33	1.03	-3.91	-0.20	722.76	1.32	1.03	-4.07	-0.21
6	723.08	0.96	2.46	-3.71	1.49	723.08	0.96	2.46	-3.71	1.49	723.08	0.96	2.46	-3.71	1.49
7	730.17	1.57	1.66	-4.63	0.36	730.51	1.52	1.79	-5.33	0.21	730.51	1.52	1.79	-5.33	0.21
8	714.64	0.50	0.00	-5.54	-0.27	714.64	0.50	0.00	-5.54	-0.27	714.64	0.50	0.00	-5.54	-0.27
	Estadísticas de orden para $Y_2$					Observaciones simuladas para $Y_1$					Observaciones simuladas para $Y_2$				
	$\mu_{1i}$	$\mu_{2i}$	$\log \sigma_{1i}^2$	$\log \sigma_{2i}^2$	$\tanh^{-1} \rho_i$	$\mu_{1i}$	$\mu_{2i}$	$\log \sigma_{1i}^2$	$\log \sigma_{2i}^2$	$\tanh^{-1} \rho_i$	$\mu_{1i}$	$\mu_{2i}$	$\log \sigma_{1i}^2$	$\log \sigma_{2i}^2$	$\tanh^{-1} \rho_i$
1	712.38	0.60	-0.98	-4.89	-0.03	712.38	0.60	-0.98	-4.89	-0.03	712.38	0.60	-0.98	-4.89	-0.03
2	720.34	0.86	3.29	-3.57	-2.02	720.34	0.86	3.29	-3.57	-2.02	720.34	0.86	3.29	-3.57	-2.02
3	711.68	0.49	-2.50	-5.91	0.37	711.68	0.49	-2.50	-5.91	0.37	711.68	0.49	-2.50	-5.91	0.37
4	730.31	1.47	2.49	-5.34	-1.02	730.82	1.47	2.66	-5.35	-1.14	730.30	1.47	2.49	-5.30	-1.05
5	722.76	1.32	1.03	-4.07	-0.21	722.76	1.33	1.03	-3.93	-0.20	722.76	1.32	1.03	-4.09	-0.21
6	723.08	0.96	2.46	-3.71	1.49	723.08	0.96	2.46	-3.71	1.49	723.08	0.96	2.46	-3.71	1.49
7	730.55	1.52	1.81	-5.11	0.53	730.99	1.58	2.16	-4.58	0.55	730.56	1.56	1.82	-4.86	0.18
8	714.64	0.50	0.00	-5.54	-0.27	714.64	0.50	0.00	-5.54	-0.27	714.64	0.50	0.00	-5.54	-0.27

**Tabla 7c.** Valores  $\mu_{1i}$ ,  $\mu_{2i}$ ,  $\log \sigma_{1i}^2$ ,  $\log \sigma_{2i}^2$  y  $\tanh^{-1} \rho_i$  de los datos censurados al 21%.

	Esperanza condicional iniciando con $Y_1$					Esperanza condicional iniciando con $Y_2$					Estadísticas de orden para $Y_1$				
	$\mu_{1i}$	$\mu_{2i}$	$\log \sigma_{1i}^2$	$\log \sigma_{2i}^2$	$\tanh^{-1} \rho_i$	$\mu_{1i}$	$\mu_{2i}$	$\log \sigma_{1i}^2$	$\log \sigma_{2i}^2$	$\tanh^{-1} \rho_i$	$\mu_{1i}$	$\mu_{2i}$	$\log \sigma_{1i}^2$	$\log \sigma_{2i}^2$	$\tanh^{-1} \rho_i$
1	712.38	0.60	-0.98	-4.89	-0.03	712.38	0.60	-0.98	-4.89	-0.03	712.38	0.60	-0.98	-4.89	-0.03
2	720.34	0.86	3.29	-3.57	-2.02	720.34	0.86	3.29	-3.57	-2.02	720.34	0.86	3.29	-3.57	-2.02
3	711.68	0.49	-2.50	-5.91	0.37	711.68	0.49	-2.50	-5.91	0.37	711.68	0.49	-2.50	-5.91	0.37
4	728.86	1.51	1.96	-5.12	-0.01	729.64	1.48	2.26	-5.70	-0.21	728.86	1.52	2.02	-5.09	0.10
5	722.76	1.32	1.03	-4.24	-0.23	722.76	1.31	1.03	-4.40	-0.24	722.76	1.32	1.03	-4.24	-0.23
6	723.08	0.96	2.46	-3.71	1.49	723.08	0.96	2.46	-3.71	1.49	723.08	0.96	2.46	-3.71	1.49
7	729.69	1.52	1.09	-5.30	-0.05	730.16	1.49	1.38	-5.94	-0.19	729.69	1.52	1.33	-5.27	-0.04
8	714.64	0.50	0.00	-5.54	-0.27	714.64	0.50	0.00	-5.54	-0.27	714.64	0.50	0.00	-5.54	-0.27
	Estadísticas de orden para $Y_2$					Observaciones simuladas para $Y_1$					Observaciones simuladas para $Y_2$				
	$\mu_{1i}$	$\mu_{2i}$	$\log \sigma_{1i}^2$	$\log \sigma_{2i}^2$	$\tanh^{-1} \rho_i$	$\mu_{1i}$	$\mu_{2i}$	$\log \sigma_{1i}^2$	$\log \sigma_{2i}^2$	$\tanh^{-1} \rho_i$	$\mu_{1i}$	$\mu_{2i}$	$\log \sigma_{1i}^2$	$\log \sigma_{2i}^2$	$\tanh^{-1} \rho_i$
1	712.38	0.60	-0.98	-4.89	-0.03	712.38	0.60	-0.98	-4.89	-0.03	712.38	0.60	-0.98	-4.89	-0.03
2	720.34	0.86	3.29	-3.57	-2.02	720.34	0.86	3.29	-3.57	-2.02	720.34	0.86	3.29	-3.57	-2.02
3	711.68	0.49	-2.50	-5.91	0.37	711.68	0.49	-2.50	-5.91	0.37	711.68	0.49	-2.50	-5.91	0.37
4	729.68	1.48	2.28	-5.29	0.04	730.21	1.53	2.51	-4.92	0.29	729.75	1.54	2.31	-4.62	-0.05
5	722.76	1.31	1.03	-4.40	-0.24	722.76	1.32	1.03	-4.25	-0.23	722.76	1.32	1.03	-4.06	-0.21
6	723.08	0.96	2.46	-3.71	1.49	723.08	0.96	2.46	-3.71	1.49	723.08	0.96	2.46	-3.71	1.49
7	730.21	1.49	1.41	-5.39	0.33	730.62	1.53	1.70	-5.24	-0.23	730.26	1.53	1.44	-4.93	0.25
8	714.64	0.50	0.00	-5.54	-0.27	714.64	0.50	0.00	-5.54	-0.27	714.64	0.50	0.00	-5.54	-0.27

3. Estimar los modelos de mínimos cuadrados para  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\log \hat{\sigma}_1^2$ ,  $\log \hat{\sigma}_2^2$  y  $\tanh^{-1} \hat{\rho}$ .
4. Obtener modelos que incluyan únicamente los factores significativos. Para identificar los factores significativos de los modelos para  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , utilizar el método de Lenth (Lenth, 1989). Para identificar los factores significativos de los modelos para  $\log \hat{\sigma}_1^2$ ,  $\log \hat{\sigma}_2^2$  y  $\tanh^{-1} \hat{\rho}$  utilizar la comparación de desviaciones estándar, como se describe a continuación:
  - a. La desviación estándar de la estimación de mínimos cuadrados de  $\log \hat{\sigma}_j^2$  es  $\sqrt{2/[m(n-1)]}$  (Bartlett y Kendall, 1946), la desviación estándar de la estimación de mínimos cuadrados de  $\tanh^{-1} \hat{\rho}$  es  $\sqrt{1/[m(n-3)]}$  (Chiao y Hamada, 2001).
  - b. Las estimaciones de mínimos cuadrados divididas por su desviación estándar se comparan con  $\pm 1.96$  para detectar con un 5% de confiabilidad la significancia de los factores.

En la Tabla 8 se presentan los coeficientes de los modelos de  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\log \hat{\sigma}_1^2$ ,  $\log \hat{\sigma}_2^2$  y  $\tanh^{-1} \hat{\rho}$  estimados para los datos sin censura y para los datos con valores imputados mediante las técnicas mencionadas. El guion se presenta cuando un factor no resulto significativo en un modelo.

5. Generar un diseño factorial completo de k factores con niveles -1 y +1.
6. Dada la matriz de diseño **X** del paso anterior y los modelos del paso 4, estimar para cada corrida del diseño completo  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\log \hat{\sigma}_1^2$ ,  $\log \hat{\sigma}_2^2$  y  $\tanh^{-1} \hat{\rho}$ .

**Tabla 8a.** Coeficientes modelos de mínimos cuadrados de los datos originales (sin censura).

	Modelo	Constante	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Datos originales	$\mu_1$	720.7625	1.8725	-	-	-	5.3175	-	-3.4075
	$\mu_2$	0.96725	0.11325	-	-	-	0.32825	-	-0.17375
	$\log \hat{\sigma}_1^2$	0.9437796	-	-0.5090537	-	1.1889672	1.1963742	-	-0.4873719
	$\log \hat{\sigma}_2^2$	-4.7967358	-	-0.6917739	-	-	-	-	-
	$\tanh^{-1} \hat{\rho}$	-0.1161957	0.4900678	-	-	-	-0.5054283	-	-

**Tabla 8b.** Coeficientes modelos de mínimos cuadrados de los datos censurados al 16%.

	Modelo	Constante	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Esperanza condicional iniciando con $Y_1$	$\hat{\mu}_1$	720.5770	2.086629	-	-	-	5.132058	-	-3.222058
	$\hat{\mu}_2$	0.9735662	0.1186236	-	-	-	0.3345662	-	-0.1774441
	$\log \hat{\sigma}_1^2$	0.8869766	-	-0.5658567	-	1.1109044	1.1395712	-	-

Comparación de técnicas de imputación para tratar respuestas censuradas en un diseño de experimentos bivariado

	$\log \hat{\sigma}_2^2$	-4.6884216	-	-0.6655388	-	-	-	-	-
	$\tanh^{-1} \rho$	-0.1739499	0.5168052	-	-	-	-0.5631825	-	-
Esperanza condicional iniciando con $Y_2$	$\hat{\mu}_1$	720.7121	2.036015	-	-	-	5.267163	-	-3.357163
	$\hat{\mu}_2$	0.966926	-	-	-	-	0.327926	-	-0.1720837
	$\log \hat{\sigma}_1^2$	0.9486468	-	-0.5041865	-	1.1131741	1.2012414	-	-0.4922392
	$\log \hat{\sigma}_2^2$	-4.7963272	-	-0.7347226	-	-	-	-	-
	$\tanh^{-1} \rho$	-0.1855312	0.4907614	-	-	-	-0.5747639	-	-
Estadísticas de orden para $Y_1$	$\hat{\mu}_1$	720.5770	2.086629	-	-	-	5.132058	-	-3.222058
	$\hat{\mu}_2$	0.9736294	0.1186793	-	-	-	0.3346294	-	-0.1774999
	$\log \hat{\sigma}_1^2$	0.9055796	-	-0.5472537	-	1.1019508	1.1581742	-	-
	$\log \hat{\sigma}_2^2$	-4.6863004	-	-0.6636334	-	-	-	-	-
	$\tanh^{-1} \rho$	-0.1706902	0.5170298	-	-	-	-0.5599228	-	-
Estadísticas de orden para $Y_2$	$\hat{\mu}_1$	720.71727	2.039003	-	-	-	5.272275	-	-3.362275
	$\hat{\mu}_2$	0.966926	-	-	-	-	0.327926	-	-0.1720837
	$\log \hat{\sigma}_1^2$	0.951815	-	-0.5010184	-	1.1106949	1.2044096	-	-0.4954073
	$\log \hat{\sigma}_2^2$	-4.7689585	-	-0.7073539	-	-	-	-	-
	$\tanh^{-1} \rho$	-0.1451466	0.5310012	-	-	-	-0.5343792	-	-
Observaciones simuladas para $Y_1$	$\hat{\mu}_1$	720.83629	2.031721	-	-	-	5.391299	-	-3.481299
	$\hat{\mu}_2$	0.9738693	0.1190596	-	-	-	0.3348693	-	-0.1778515
	$\log \hat{\sigma}_1^2$	1.016349	-	-	-	1.0885749	1.2689436	-	-0.5599413
	$\log \hat{\sigma}_2^2$	-4.6851432	-	-0.6591931	-	-	-	-	-
	$\tanh^{-1} \rho$	-0.1581637	0.5494483	-	-	-	-0.5473963	-	-
Observaciones simuladas para $Y_2$	$\hat{\mu}_1$	720.71747	2.043732	-	-	-	5.272474	-	-3.362474
	$\hat{\mu}_2$	0.9709951	0.1159339	-	-	-	0.3319951	-	-0.1762885
	$\log \hat{\sigma}_1^2$	0.9526223	-	-0.500211	-	1.1084163	1.2052169	-	-0.4962146
	$\log \hat{\sigma}_2^2$	-4.7336472	-	-0.6677905	-	-	-	-	-
	$\tanh^{-1} \rho$	-0.1935874	0.4903134	-	-	-	-0.58282	-	-

**Tabla 8c.** Coeficientes modelos de mínimos cuadrados de los datos censurados al 21%.

	Modelo	Constante	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Esperanza condicional iniciando con $Y_1$	$\hat{\mu}_1$	720.429	2.113	-	-	-	4.984	-	-3.074
	$\hat{\mu}_2$	0.972	-	-	-	-	0.333	-	-0.178
	$\log \hat{\sigma}_1^2$	0.795	-	-0.657	-	1.1338213	1.048	-	-
	$\log \hat{\sigma}_2^2$	-4.786	-	-0.681	-	-	-	-	-
	$\tanh^{-1} \rho$	-0.095	-	-	0.499	-	-	-	-
Esperanza condicional iniciando con $Y_2$	$\hat{\mu}_1$	720.585	2.075	-	-	-	5.140	-	-3.230
	$\hat{\mu}_2$	0.963	-	-	-	-	0.324	-	-0.171
	$\log \hat{\sigma}_1^2$	0.870	-	-0.583	-	1.1360743	1.122	-	-
	$\log \hat{\sigma}_2^2$	-4.959	-	-0.815	-	-	-	-	-
	$\tanh^{-1} \rho$	-0.139	-	-	0.490	-	-0.528	-	-
Estadísticas de orden para $Y_1$	$\hat{\mu}_1$	720.429	2.113	-	-	-	4.984	-	-3.074
	$\hat{\mu}_2$	0.972	-	-	-	-	0.333	-	-0.179
	$\log \hat{\sigma}_1^2$	0.833	-	-0.620	-	1.111796	1.086	-	-

	$\log \hat{\sigma}_2^2$	-4.779	-	-0.674	-	-	-	-	-
	$\tanh^{-1} \hat{\rho}$	-0.079	-	-	0.511	-	-	-	-
Estadísticas de orden para $Y_2$	$\hat{\mu}_1$	720.597	2.077	-	-	-	5.152	-	-3.242
	$\hat{\mu}_2$	0.963	-	-	-	-	0.324	-	-0.171
	$\log \hat{\sigma}_1^2$	0.876	-	-0.577	-	1.1337552	1.128	-	-
	$\log \hat{\sigma}_2^2$	-4.839	-	-0.695	-	-	-	-	-
	$\tanh^{-1} \hat{\rho}$	-0.042	-	-	-	-	-	-	-0.499
Observaciones simuladas para $Y_1$	$\hat{\mu}_1$	720.713	2.061	-	-	-	5.268	-	-3.358
	$\hat{\mu}_2$	0.973	-	-	-	-	0.334	-	-0.180
	$\log \hat{\sigma}_1^2$	0.941	-	-0.512	-	1.1264178	1.193	-	-
	$\log \hat{\sigma}_2^2$	-4.756	-	-0.648	-	-	-	-	-
	$\tanh^{-1} \hat{\rho}$	-0.079	-	-	0.559	-	-	-	-
Observaciones simuladas para $Y_2$	$\hat{\mu}_1$	720.611	2.073	-	-	-	5.166	-	-3.256
	$\hat{\mu}_2$	0.977	-	-	-	-	0.338	-	-0.182
	$\log \hat{\sigma}_1^2$	0.883	-	-0.570	-	1.1340933	1.135	-	-
	$\log \hat{\sigma}_2^2$	-4.656	-	-0.596	-	-	-	-	-
	$\tanh^{-1} \hat{\rho}$	-0.061	-	-	-	-	-	-	-

- Transformar los valores de  $\log \hat{\sigma}_1^2$ ,  $\log \hat{\sigma}_2^2$  y  $\tanh^{-1} \hat{\rho}$  para crear para cada corrida del diseño completo la matriz de varianza-covarianza  $\Sigma$ .
- Dada la función de densidad de probabilidad conjunta para  $Y$ ,  $f(Y; \mu = [\mu_1, \mu_2], \Sigma)$  y sea  $S$ , identificar  $P(Y \in S)$  para cada corrida del diseño completo.
- De acuerdo con  $P(Y \in S)$  concluir la configuración óptima de los parámetros del experimento.

En la Tabla 9 se presenta la matriz de diseño  $X$  con las 128 corridas, dado que el experimento que aquí se trabajó consta de 7 factores a dos niveles  $2^7=128$ . También se observan las estimaciones de los parámetros y la probabilidad de concordancia para los datos sin censura. Con fines de presentación, las estimaciones para los conjuntos de datos tratados con las técnicas de imputación se presentan en el apéndice A, al final del documento.

**Tabla 9.** Estimación de parámetros del diseño factorial completo con los modelos de los datos sin censura.

Run	Matriz de diseño X							Datos originales Sin censura						Run	Matriz de diseño X							Datos originales Sin censura					
	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	$\mu_1$	$\mu_2$	$\sigma_1^2$	$\sigma_2^2$	$\sigma_{12}$	$P(Y \in S)$		F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	$\mu_1$	$\mu_2$	$\sigma_1^2$	$\sigma_2^2$	$\sigma_{12}$	$P(Y \in S)$
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	716.98	0.7	0.64	0.02	-0.01	0	65	-1	-1	-1	-1	-1	-1	710.17	0.35	0.24	0.02	-0.01	0.19	
2	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	720.73	0.93	0.64	0.02	0.07	0	66	1	-1	-1	-1	-1	-1	713.91	0.58	0.24	0.02	0.04	0.07	
3	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	716.98	0.7	0.23	0	0	0	67	-1	1	-1	-1	-1	-1	710.17	0.35	0.09	0	0	0.4	

Comparación de técnicas de imputación para tratar respuestas censuradas en un diseño de experimentos bivariado

4	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	720.73	0.93	0.23	0	0.02	0	68	1	1	-1	-1	-1	-1	1	713.91	0.58	0.09	0	0.01	0
5	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	716.98	0.7	0.64	0.02	-0.01	0	69	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	710.17	0.35	0.24	0.02	-0.01	0.19
6	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	720.73	0.93	0.64	0.02	0.07	0	70	1	-1	1	-1	-1	-1	1	713.91	0.58	0.24	0.02	0.04	0.07
7	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	716.98	0.7	0.23	0	0	0	71	-1	1	1	-1	-1	-1	1	710.17	0.35	0.09	0	0	0.4
8	1	1	1	-1	-1	-1	-1	720.73	0.93	0.23	0	0.02	0	72	1	1	1	-1	-1	-1	1	713.91	0.58	0.09	0	0.01	0
9	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	716.98	0.7	6.91	0.02	-0.03	0	73	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	710.17	0.35	2.61	0.02	-0.02	0.16
10	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	720.73	0.93	6.91	0.02	-0.24	0	74	1	-1	-1	1	-1	-1	1	713.91	0.58	2.61	0.02	0.15	0.06
11	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	716.98	0.7	2.5	0	-0.01	0	75	-1	1	-1	1	-1	-1	1	710.17	0.35	0.94	0	-0.01	0.32
12	1	1	-1	1	-1	-1	-1	720.73	0.93	2.5	0	0.07	0	76	1	1	-1	1	-1	-1	1	713.91	0.58	0.94	0	0.04	0
13	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	716.98	0.7	6.91	0.02	-0.03	0	77	-1	-1	1	1	-1	-1	1	710.17	0.35	2.61	0.02	-0.02	0.16
14	1	-1	1	1	-1	-1	-1	720.73	0.93	6.91	0.02	0.24	0	78	1	-1	-1	1	1	-1	-1	713.91	0.58	2.61	0.02	0.15	0.06
15	-1	1	1	1	-1	-1	-1	716.98	0.7	2.5	0	-0.01	0	79	-1	1	1	1	-1	-1	1	710.17	0.35	0.94	0	-0.01	0.32
16	1	1	1	1	-1	-1	-1	720.73	0.93	2.5	0	0.07	0	80	1	1	1	1	-1	-1	1	713.91	0.58	0.94	0	0.04	0
17	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	727.62	1.36	7.01	0.02	-0.27	0	81	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	720.8	1.01	2.65	0.02	-0.17	0
18	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	731.36	1.58	7.01	0.02	-0.04	0	82	1	-1	-1	-1	1	-1	1	724.55	1.24	2.65	0.02	-0.03	0
19	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	727.62	1.36	2.53	0	-0.08	0	83	-1	1	-1	-1	1	-1	1	720.8	1.01	0.96	0	-0.05	0
20	1	1	-1	-1	1	-1	-1	731.36	1.58	2.53	0	-0.01	0	84	1	1	-1	-1	1	-1	1	724.55	1.24	0.96	0	-0.01	0
21	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	727.62	1.36	7.01	0.02	-0.27	0	85	-1	-1	1	-1	1	-1	1	720.8	1.01	2.65	0.02	-0.17	0
22	1	-1	1	-1	1	-1	-1	731.36	1.58	7.01	0.02	-0.04	0	86	1	-1	1	-1	1	-1	1	724.55	1.24	2.65	0.02	-0.03	0
23	-1	1	1	-1	1	-1	-1	727.62	1.36	2.53	0	-0.08	0	87	-1	1	1	-1	1	-1	1	720.8	1.01	0.96	0	-0.05	0
24	1	1	1	-1	1	-1	-1	731.36	1.58	2.53	0	-0.01	0	88	1	1	1	-1	1	-1	1	724.55	1.24	0.96	0	-0.01	0
25	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	727.62	1.36	75.61	0.02	-0.9	0	89	-1	-1	-1	1	1	-1	1	720.8	1.01	28.53	0.02	-0.55	0
26	1	-1	-1	1	1	-1	-1	731.36	1.58	75.61	0.02	-0.15	0	90	1	-1	-1	-1	1	-1	1	724.55	1.24	28.53	0.02	-0.09	0
27	-1	1	-1	1	1	-1	-1	727.62	1.36	27.32	0	-0.27	0	91	-1	1	-1	1	1	-1	1	720.8	1.01	10.31	0	-0.17	0
28	1	1	-1	1	1	-1	-1	731.36	1.58	27.32	0	-0.04	0	92	1	1	-1	1	1	-1	1	724.55	1.24	10.31	0	-0.03	0
29	-1	-1	1	1	1	-1	-1	727.62	1.36	75.61	0.02	-0.9	0	93	-1	-1	1	1	1	-1	1	720.8	1.01	28.53	0.02	-0.55	0
30	1	-1	1	1	1	-1	-1	731.36	1.58	75.61	0.02	-0.15	0	94	1	-1	1	1	1	-1	1	724.55	1.24	28.53	0.02	-0.09	0
31	-1	1	1	1	1	-1	-1	727.62	1.36	27.32	0	-0.27	0	95	-1	1	1	1	1	-1	1	720.8	1.01	10.31	0	-0.17	0
32	1	1	1	1	1	-1	-1	731.36	1.58	27.32	0	-0.04	0	96	1	1	1	1	1	-1	1	724.55	1.24	10.31	0	-0.03	0
33	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	716.98	0.7	0.64	0.02	-0.01	0	97	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	710.17	0.35	0.24	0.02	-0.01	0.19
34	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	720.73	0.93	0.64	0.02	0.07	0	98	1	-1	-1	-1	-1	1	1	713.91	0.58	0.24	0.02	0.04	0.07
35	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	716.98	0.7	0.23	0	0	0	99	-1	1	-1	-1	-1	1	1	710.17	0.35	0.09	0	0	0.4
36	1	1	-1	-1	-1	1	-1	720.73	0.93	0.23	0	0.02	0	100	1	1	-1	-1	-1	1	1	713.91	0.58	0.09	0	0.01	0
37	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	716.98	0.7	0.64	0.02	-0.01	0	101	-1	-1	1	-1	-1	1	1	710.17	0.35	0.24	0.02	-0.01	0.19
38	1	-1	1	-1	-1	1	-1	720.73	0.93	0.64	0.02	0.07	0	102	1	-1	1	-1	-1	1	1	713.91	0.58	0.24	0.02	0.04	0.07
39	-1	1	1	-1	-1	1	-1	716.98	0.7	0.23	0	0	0	103	-1	1	1	-1	-1	1	1	710.17	0.35	0.09	0	0	0.4
40	1	1	1	-1	-1	1	-1	720.73	0.93	0.23	0	0.02	0	104	1	1	1	-1	-1	1	1	713.91	0.58	0.09	0	0.01	0
41	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	716.98	0.7	6.91	0.02	-0.03	0	105	-1	-1	-1	1	-1	1	1	710.17	0.35	2.61	0.02	-0.02	0.16
42	1	-1	-1	1	-1	1	-1	720.73	0.93	6.91	0.02	0.24	0	106	1	-1	-1	1	-1	1	1	713.91	0.58	2.61	0.02	0.15	0.06
43	-1	1	-1	1	-1	1	-1	716.98	0.7	2.5	0	-0.01	0	107	-1	1	-1	1	-1	1	1	710.17	0.35	0.94	0	-0.01	0.32
44	1	1	-1	1	-1	1	-1	720.73	0.93	2.5	0	0.07	0	108	1	1	-1	1	-1	1	1	713.91	0.58	0.94	0	0.04	0
45	-1	-1	1	1	-1	1	-1	716.98	0.7	6.91	0.02	-0.03	0	109	-1	-1	1	1	-1	1	1	710.17	0.35	2.61	0.02	-0.02	0.16
46	1	-1	1	1	-1	1	-1	720.73	0.93	6.91	0.02	0.24	0	110	1	-1	1	1	-1	1	1	713.91	0.58	2.61	0.02	0.15	0.06
47	-1	1	1	1	-1	1	-1	716.98	0.7	2.5	0	-0.01	0	111	-1	1	1	1	-1	1	1	710.17	0.35	0.94	0	-0.01	0.32
48	1	1	1	1	-1	1	-1	720.73	0.93	2.5	0	0.07	0	112	1	1	1	1	-1	1	1	713.91	0.58	0.94	0	0.04	0
49	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	727.62	1.36	7.01	0.02	-0.27	0	113	-1	-1	-1	-1	1	1	1	720.8	1.01	2.65	0.02	-0.17	0
50	1	-1	-1	-1	1	1	-1	731.36	1.58	7.01	0.02	-0.04	0	114	1	-1	-1	-1	1	1	1	724.55	1.24	2.65	0.02	-0.03	0
51	-1	1	-1	-1	1	1	-1	727.62	1.36	2.53	0	-0.08	0	115	-1	1	-1	-1	1	1	1	720.8	1.01	0.96	0	-0.05	0
52	1	1	-1	-1	1	1	-1	731.36	1.58	2.53	0	-0.01	0	116	1	1	-1	-1	1	1	1	724.55	1.24	0.96	0	-0.01	0
53	-1	-1	1	-1	1	1	-1	727.62	1.36	7.01	0.02	-0.27	0	117	-1	-1	1	-1	1	1	1	720.8	1.01	2.65	0.02	-0.17	0
54	1	-1	1	-1	1	1	-1	731.36	1.58	7.01	0.02	-0.04	0	118	1	-1	1	-1	1	1	1	724.55	1.24	2.65	0.02	-0.03	0
55	-1	1	1	-1	1	1	-1	727.62	1.36	2.53	0	-0.08	0	119	-1	1	1	-1	1	1	1	720.8	1.01	0.96	0	-0.05	0
56	1	1	1	-1	1	1	-1	731.36	1.58	2.53	0	-0.01	0	120	1	1	1	-1	1	1	1	724.55	1.24	0.96	0	-0.01	0
57	-1	-1	-1	1	1	1	-1	727.62	1.36	75.61	0.02	-0.9	0	121	-1	-1	-1	1	1	1	1	720.8	1.01	28.53	0.02	-0.55	0
58	1	-1	-1	1	1	1	-1	731.36	1.58	75.61	0.02	-0.15	0	122	1	-1	-1	1	1	1	1	724.55	1.24	28.53	0.02	-0.09	0
59	-1	1	-1	1	1	1	-1	727.62	1.36	27.32	0	-0.27	0	123	-1	1	-1	1	1	1	1	720.8	1.01	10.31	0	-0.17	0
60	1	1	-1	1	1	1	-1	731.36	1.58	27.32	0	-0.04	0	124	1	1	-1	1	1	1	1	724.55	1.24	10.31	0	-0.03	0
61	-1	-1	1	1	1	1	-1	727.62	1.36	75.61	0.02	-0.9	0	125	-1	-1	1	1	1	1	1	720.8	1.01	28.53	0.02	-0.55	0
62	1	-1	1	1	1	1	-1	731.36	1.58	75.61	0.02	-0.15	0	126	1	-1	1	1	1	1	1	724.55	1.24	28.53	0.02	-0.09	0
63	-1	1	1	1	1	1	-1	727.62	1.36	27.32</																	

**Análisis: suma de cuadrados del error**

Considerando la respuesta  $Y_j$  del experimento sin censura ( $Y_{jO}$ ) y la respuesta  $Y_j$  que se genera después de aplicar una técnica de imputación al experimento con censura ( $Y_{jC}$ ), y sean  $m$  número de corridas: la suma de cuadrados del error se obtiene de sumar las diferencias al cuadrado entre  $Y_{jO}$  y  $Y_{jC}$  desde 1 hasta  $m$  corridas, ver Ecuación 6.

$$SCE_j = \sum_i^m (Y_{jiO} - Y_{jiC})^2, \text{ Ecuación 6.}$$

Dónde:  $SCE_j$  es la suma de cuadrados de la respuesta  $j$ , para  $j=1, 2$ .  $Y_{jiO}$  el valor de la respuesta  $j$  en la corrida  $i$  de los datos originales, e  $Y_{jiC}$  el valor de la respuesta  $j$  en la corrida  $i$  de los datos imputados con las distintas técnicas mencionadas.

Este cálculo se realiza para las dos respuestas y con todos los conjuntos de datos que se generan con cada una de las técnicas de imputación en los dos porcentajes de censura.

**Resultados**

Por cada técnica de imputación que se aplica a los datos censurados se genera un nuevo conjunto de datos que incluye: la matriz de diseño  $X$  original, los datos del experimento original que se encontraron por debajo de los límites de censura, y los valores imputados que reemplazan a los valores censurados.

Al conjunto de datos generado por cada una de las técnicas de imputación, en los dos porcentajes de censura, se le aplica el método de análisis para obtener la configuración óptima de parámetros, en la Tabla 10 se pueden observar estos resultados, los factores no significativos presentan un guion.

**Tabla 10.** Configuración óptima de parámetros para cada conjunto de datos.

		F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Porcentaje de censura: 16%	Datos originales	X <sub>opt</sub> =	-1	1	-	-1	-1	-1
	Esperanza condicional iniciando con Y <sub>1</sub>	X <sub>opt</sub> =	-1	1	-	-1	-1	-1
	Esperanza condicional iniciando con Y <sub>2</sub>	X <sub>opt</sub> =	1	-1	-	-1	-1	-1
	Estadísticas de orden para Y <sub>1</sub>	X <sub>opt</sub> =	-1	1	-	-1	-1	-1
	Estadísticas de orden para Y <sub>2</sub>	X <sub>opt</sub> =	1	-1	-	-1	-1	-1
	Observaciones simuladas para Y <sub>1</sub>	X <sub>opt</sub> =	-1	1	-	1	-1	-1
	Observaciones simuladas para Y <sub>2</sub>	X <sub>opt</sub> =	-1	1	-	-1	-1	-1
Porcentaje de censura: 21%	Esperanza condicional iniciando con Y <sub>1</sub>	X <sub>opt</sub> =	1	-1	1	-1	-1	-1
	Esperanza condicional iniciando con Y <sub>2</sub>	X <sub>opt</sub> =	1	-1	1	-1	-1	-1
	Estadísticas de orden para Y <sub>1</sub>	X <sub>opt</sub> =	1	-1	1	-1	-1	-1
	Estadísticas de orden para Y <sub>2</sub>	X <sub>opt</sub> =	1	-1	-	-1	-1	-1



Comparación de técnicas de imputación para tratar respuestas censuradas en un diseño de experimentos bivariado

	Observaciones simuladas para $Y_1$	$X_{opt} =$	1	-1	1	-1	-1	-	1
	Observaciones simuladas para $Y_2$	$X_{opt} =$	1	1	-	-1	-1	-	1

En la Tabla 11 se aprecian los valores que se generaron con cada técnica de imputación para cada dato del experimento que fue censurado. Los datos sombreados en las columnas correspondientes a los originales son observaciones que en una misma corrida y replica en una variable de respuesta no están censuradas, pero en la otra respuesta sí. Utilizando la Ecuación 6 se calcula el SCE para cada técnica de imputación.

**Tabla 11a.** Valores imputados y sumas de cuadrados del error para cada método. Los cuadros en blanco muestran los datos censurados al 16%.

RUN	REP	Datos originales		Porcentaje de censura: 16%											
		Sin censura		Esperanza condicional iniciando con $Y_1$		Esperanza condicional iniciando con $Y_2$		Estadísticas de orden para $Y_1$		Estadísticas de orden para $Y_2$		Observaciones simuladas para $Y_1$		Observaciones simuladas para $Y_2$	
		$Y_1$	$Y_2$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_1$	$Y_2$
4	1	733.70	1.50	730.93	1.50	731.98	1.50	730.25	1.50	731.99	1.50	731.79	1.50	731.96	1.50
4	2	724.10	1.55	724.10	1.57	724.10	1.57	724.10	1.57	724.10	1.57	724.10	1.57	724.10	1.57
4	3	732.00	1.38	730.93	1.38	731.72	1.38	730.57	1.38	731.73	1.38	732.52	1.38	731.71	1.38
4	4	732.70	1.45	730.93	1.45	731.86	1.45	731.03	1.45	731.87	1.45	732.67	1.45	731.85	1.45
4	5	733.30	1.45	730.93	1.45	731.86	1.45	731.86	1.45	731.87	1.45	733.01	1.45	731.85	1.45
5	3	722.60	1.51	722.60	1.56	722.60	1.54	722.60	1.56	722.60	1.54	722.60	1.56	722.60	1.53
7	1	726.60	1.52	726.60	1.58	726.60	1.56	726.60	1.58	726.60	1.52	726.60	1.58	726.60	1.60
7	2	731.40	1.58	731.56	1.63	732.12	1.56	730.60	1.62	732.08	1.54	731.72	1.62	732.19	1.59
7	3	731.40	1.61	731.56	1.63	732.12	1.56	731.39	1.62	732.16	1.56	733.38	1.64	732.25	1.61
7	5	731.30	1.57	731.56	1.63	732.12	1.56	732.68	1.64	732.29	1.61	733.66	1.64	732.18	1.58
SCE				17.73	0.013	7.52	0.006	21.35	0.014	7.72	0.007	13.61	0.014	8.05	0.008

**Tabla 11b.** Valores imputados y sumas de cuadrados del error para cada método. Los cuadros en blanco muestran los datos censurados al 21%.

RUN	REP	Datos originales		Porcentaje de censura: 21%											
		Sin censura		Esperanza condicional iniciando con $Y_1$		Esperanza condicional iniciando con $Y_2$		Estadísticas de orden para $Y_1$		Estadísticas de orden para $Y_2$		Observaciones simuladas para $Y_1$		Observaciones simuladas para $Y_2$	
		$Y_1$	$Y_2$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_1$	$Y_2$
4	1	733.7	1.5	730.05	1.56	731.10	1.51	729.29	1.55	731.01	1.46	732.08	1.58	731.49	1.65
4	2	724.1	1.55	724.10	1.52	724.10	1.51	724.10	1.52	724.10	1.49	724.10	1.52	724.10	1.56
4	3	732	1.38	730.05	1.38	730.80	1.38	729.66	1.38	730.82	1.38	730.45	1.38	730.79	1.38
4	4	732.7	1.45	730.05	1.56	731.10	1.51	730.17	1.56	731.16	1.52	731.81	1.57	731.19	1.55
4	5	733.3	1.45	730.05	1.56	731.10	1.51	731.09	1.57	731.32	1.57	732.61	1.58	731.21	1.56
5	3	722.60	1.51	722.60	1.51	722.60	1.49	722.60	1.51	722.60	1.49	722.60	1.51	722.60	1.54
7	1	726.6	1.52	726.60	1.53	726.60	1.51	726.60	1.53	726.60	1.46	726.60	1.53	726.60	1.51
7	2	731.4	1.58	730.46	1.56	731.12	1.51	729.43	1.55	731.08	1.49	732.00	1.57	731.35	1.61
7	3	731.4	1.61	730.46	1.56	731.12	1.51	729.95	1.56	731.18	1.52	730.82	1.56	731.34	1.60
7	4	729.6	1.4	730.46	1.40	730.84	1.40	730.64	1.40	730.86	1.40	732.51	1.40	730.83	1.40
7	5	731.3	1.57	730.46	1.56	731.12	1.51	731.82	1.58	731.35	1.58	731.14	1.57	731.17	1.54
SCE				37.87	0.031	17.28	0.025	43.59	0.034	16.70	0.044	15.50	0.042	14.54	0.047

Para el conjunto de datos censurados al 16%, los métodos que llevaron a conclusiones correctas fueron: esperanza condicional iniciando con  $Y_1$ , estadísticas de orden para  $Y_1$ , y observaciones

simuladas para  $Y_2$ . Ninguno de los métodos lleva a la conclusión correcta del experimento cuando el porcentaje de datos censurados aumenta al 21%.

De los métodos: esperanza condicional iniciando con  $Y_1$ , estadísticas de orden para  $Y_1$ , y observaciones simuladas para  $Y_2$ , observaciones simuladas para  $Y_2$  presenta el menor  $SCE_1$ , en los dos porcentajes de censura. Se les da mayor importancia a los valores  $SCE_1$  dado que las diferencias entre los  $SCE_2$  son mínimas.

Considerando lo anterior, se puede suponer al método observaciones simuladas para  $Y_2$  como la técnica de mejor funcionamiento.

### **Conclusiones**

En este trabajo se trató un caso de diseño de experimentos bivariado reportado en la literatura, a diferencia de los artículos de origen, se presenta una comparación entre los resultados de los datos con dos porcentajes de censura (aplicando técnicas de imputación) y de los datos de origen sin censura. Además, se reporta un método con código en un programa estadístico libre que permite la réplica de los resultados presentados.

Del diseño de experimentos se generaron dos conjuntos de datos, uno con el 16% de datos censurados y el otro con el 21%. Aplicar y comparar las técnicas de imputación en distintos porcentajes de censura permite obtener un mejor conocimiento sobre el funcionamiento de las técnicas de imputación. Como se observa en las Tablas 10 y 11, cuando el porcentaje de censura aumenta, la posibilidad de las técnicas para identificar la  $X_{opt}$  correcta disminuye y los valores SCE aumentan.

Chowdhury y Aggarwala (2007) solo mencionan en su artículo que con las técnicas de imputación que proponen se obtienen valores parecidos a los originales. Comparando esas técnicas en este trabajo se encontró que no todas funcionan para estimar la configuración óptima de parámetros de manera asertiva, y además, se identificó a la técnica que genera valores para los datos censurados con menor diferencia con respecto a los datos originales. Aquí las técnicas fueron aplicadas al mismo experimento que ellos tratan, pero, los valores de imputación que ellos obtienen y los que se encontraron en este trabajo con los datos censurados en el mismo porcentaje que ellos manejan, difieren significativamente.

Con 16% de datos censurados, la  $X_{opt}$  que se identificó con las técnicas de imputación: esperanza condicional después de hacer regresión con las respuestas iniciando con  $Y_1$ , estadísticas

de orden para  $Y_1$ , y observaciones simuladas para  $Y_2$ , concuerda con la de los datos sin censura. De estos métodos, con el 21% de datos censurados, donde todas las técnicas concluyeron una  $X_{opt}$  incorrecta, observaciones simuladas para  $Y_2$  genera el menor  $SCE_1$ . Considerando lo anterior se llega a la conclusión de que, de las técnicas de imputación consideradas en este trabajo, observaciones simuladas para  $Y_2$  trabaja mejor para imputar las respuestas censuradas del diseño de experimentos bivariado que aquí se describe.

Como trabajo futuro pudieran implementarse diferentes criterios de comparación e incluir otros métodos de imputación para diseños de experimentos con distintas características, para tener una base más sólida que permita establecer un mejor método de manera general.

Relativo al método para determinar la configuración óptima de parámetros, Chiao y Hamada (2001) mencionan explícitamente en su introducción: “proponemos un método simple para manejar adecuadamente respuestas múltiples”, lo cual se aprecia como algo engañoso después de llevar a cabo el método para todos los conjuntos de respuestas resultantes. Durante el desarrollo del trabajo se establece que el criterio estándar para identificar los factores significativos en los modelos de  $\log \hat{\sigma}_j^2$  era comparar su desviaciones estándar contra  $\pm 1.96$ , sin embargo al reproducir el análisis de los datos sin censura (donde ya se conocía la configuración óptima) se identifica un inconveniente en el modelo de  $\log \hat{\sigma}_2^2$  donde fue necesario disminuir el valor de comparación a  $\pm 1.94$  para que se detectaran como significativos todos los factores que Chiao y Hamada describieron en su trabajo.

Los problemas de reproducibilidad señalados pueden deberse a la diferencia de los programas con los que los autores mencionados trabajaron en su momento y el que se utilizó para este trabajo.

## **Referencias**

- Azzalini, A., y Genz, A. (2016). The R package 'mnormt': The multivariate normal and 't' distributions (versión 1.5-5). Obtenido de <http://azzalini.stat.unipd.it/SW/Pkg-mnormt>
- Bartlett, M., y Kendall, D. (1946). The Statistical Analysis of Variance-Heterogeneity and the Logarithmic Transformation. *Journal of the Royal Statistical Society*, 8(1), 128-138.
- Chambers, J. (1992). Linear models. En J. Chambers, y T. Hastie, *Statistical Models in S* (Capítulo 4). Pacific Grove: Wadsworth.

- Chiao, C. H., y Hamada, M. (2001). Analyzing Experiments with Correlated Multiple Responses. *Journal of Quality Technology*, 33(4), 451-465.
- Chowdhury, A., y Aggarwala, R. (2007). Imputation of censored response data in a bivariate designed experiment. *Quality Engineering*, 19(1), 67-75. Doi: 10.1080/08982110601093679
- Derringer, G., y Suich, R. (1980). Simultaneous Optimization of Several Response Variables. *Journal of Quality Technology*, 12(4), 214-219
- Hamada, M., y Balakrishnan, N. (1998). Analyzing unreplicated factorial experiments: a review with some new proposals. *Statistica Sinica*, 8, 1-28.
- Harper, D., Kosbe, M., y Peyton, L. (1987). Optimization of ford taurus wheel cover balance (by design of experiments-Taguchi's method). *Fifth Symposium on Taguchi Methods*, Romulus, MI: American Supplier Institute, 527-539.
- Lenth, R. (1989). Quick and easy analysis of unreplicated factorials. *Technometrics*, 31(4), 469-473.
- R Core Team. (2016). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria. Obtenido de <https://www.R-project.org/>
- Trautmann, H., Steuer, D., Mersmann, O., y Bornkamp, B. (2014). *Truncnorm: Truncated normal distribution*. Paquete en R versión 1.0-7.
- Wang, M., y Lam, C. (1996). Confidence limits for proportion of conformance. *Journal of quality technology*, 28(4), 439-445.





Comparación de técnicas de imputación para tratar respuestas censuradas en un diseño de experimentos bivariado

87	720.2	1.13	1.05	0.00	0.03	0.00	720.4	1.12	1.31	0.00	-0.01	0.00	720.23	1.13	1.21	0.00	0.03	0.00	720.43	1.12	1.34	0.00	-0.04	0.00	720.56	1.13	1.64	0.00	0.04	0.00	720.45	1.13	1.37	0.01	-0.01	0.00
88	724.5	1.13	1.05	0.00	0.03	0.00	724.6	1.12	1.31	0.00	-0.01	0.00	724.45	1.13	1.21	0.00	0.03	0.00	724.58	1.12	1.34	0.00	-0.04	0.00	724.68	1.13	1.64	0.00	0.04	0.00	724.59	1.13	1.37	0.01	-0.01	0.00
89	720.2	1.13	37.9	0.02	-0.42	0.00	720.4	1.12	40.9	0.02	-0.66	0.00	720.23	1.13	38.49	0.02	-0.42	0.00	720.43	1.12	41.06	0.02	-0.40	0.00	720.56	1.13	43.50	0.02	-0.48	0.00	720.45	1.13	41.36	0.02	-0.05	0.00
90	724.5	1.13	37.9	0.02	-0.42	0.00	724.6	1.12	40.9	0.02	-0.66	0.00	724.45	1.13	38.49	0.02	-0.42	0.00	724.58	1.12	41.06	0.02	-0.40	0.00	724.68	1.13	43.50	0.02	-0.48	0.00	724.59	1.13	41.36	0.02	-0.05	0.00
91	720.2	1.13	10.2	0.00	-0.11	0.00	720.4	1.12	12.7	0.00	-0.16	0.00	720.23	1.13	11.15	0.00	-0.12	0.00	720.43	1.12	12.95	0.00	-0.11	0.00	720.56	1.13	15.62	0.00	-0.15	0.00	720.45	1.13	13.22	0.01	-0.02	0.00
92	724.5	1.13	10.2	0.00	-0.11	0.00	724.6	1.12	12.7	0.00	-0.16	0.00	724.45	1.13	11.15	0.00	-0.12	0.00	724.58	1.12	12.95	0.00	-0.11	0.00	724.68	1.13	15.62	0.00	-0.15	0.00	724.59	1.13	13.22	0.01	-0.02	0.00
93	720.2	1.13	37.9	0.02	0.30	0.00	720.4	1.12	40.9	0.02	-0.14	0.00	720.23	1.13	38.49	0.02	0.32	0.00	720.43	1.12	41.06	0.02	-0.40	0.00	720.56	1.13	43.50	0.02	0.38	0.00	720.45	1.13	41.36	0.02	-0.05	0.00
94	724.5	1.13	37.9	0.02	0.30	0.00	724.6	1.12	40.9	0.02	-0.14	0.00	724.45	1.13	38.49	0.02	0.32	0.00	724.58	1.12	41.06	0.02	-0.40	0.00	724.68	1.13	43.50	0.02	0.38	0.00	724.59	1.13	41.36	0.02	-0.05	0.00
95	720.2	1.13	10.2	0.00	0.08	0.00	720.4	1.12	12.7	0.00	-0.03	0.00	720.23	1.13	11.15	0.00	0.09	0.00	720.43	1.12	12.95	0.00	-0.11	0.00	720.56	1.13	15.62	0.00	0.12	0.00	720.45	1.13	13.22	0.01	-0.02	0.00
96	724.5	1.13	10.2	0.00	0.08	0.00	724.6	1.12	12.7	0.00	-0.03	0.00	724.45	1.13	11.15	0.00	0.09	0.00	724.58	1.12	12.95	0.00	-0.11	0.00	724.68	1.13	15.62	0.00	0.12	0.00	724.59	1.13	13.22	0.01	-0.02	0.00
97	710.3	0.46	0.48	0.02	-0.05	0.18	710.1	0.47	0.45	0.02	-0.01	0.13	710.26	0.46	0.47	0.02	-0.05	0.18	710.13	0.47	0.45	0.02	-0.04	0.16	710.03	0.46	0.42	0.02	-0.05	0.16	710.12	0.46	0.44	0.02	-0.01	0.13
98	714.5	0.46	0.48	0.02	-0.05	0.14	714.3	0.47	0.45	0.02	-0.01	0.17	714.48	0.46	0.47	0.02	-0.05	0.14	714.28	0.47	0.45	0.02	-0.04	0.16	714.15	0.46	0.42	0.02	-0.05	0.18	714.26	0.46	0.44	0.02	-0.01	0.19
99	710.3	0.46	0.13	0.00	-0.01	0.16	710.1	0.47	0.14	0.00	0.00	0.08	710.26	0.46	0.14	0.00	-0.01	0.16	710.13	0.47	0.14	0.00	-0.01	0.12	710.03	0.46	0.15	0.00	-0.01	0.15	710.12	0.46	0.14	0.01	0.00	0.13
100	714.5	0.46	0.13	0.00	-0.01	0.13	714.3	0.47	0.14	0.00	0.00	0.11	714.48	0.46	0.14	0.00	-0.01	0.13	714.28	0.47	0.14	0.00	-0.01	0.12	714.15	0.46	0.15	0.00	-0.01	0.17	714.26	0.46	0.14	0.01	0.00	0.20
101	710.3	0.46	0.48	0.02	0.03	0.11	710.1	0.47	0.45	0.02	0.06	0.06	710.26	0.46	0.47	0.02	0.04	0.11	710.13	0.47	0.45	0.02	-0.04	0.16	710.03	0.46	0.42	0.02	0.04	0.08	710.12	0.46	0.44	0.02	-0.01	0.13
102	714.5	0.46	0.48	0.02	0.03	0.19	714.3	0.47	0.45	0.02	0.06	0.20	714.48	0.46	0.47	0.02	0.04	0.19	714.28	0.47	0.45	0.02	-0.04	0.16	714.15	0.46	0.42	0.02	0.04	0.21	714.26	0.46	0.44	0.02	-0.01	0.19
103	710.3	0.46	0.13	0.00	0.01	0.10	710.1	0.47	0.14	0.00	0.01	0.02	710.26	0.46	0.14	0.00	0.01	0.09	710.13	0.47	0.14	0.00	-0.01	0.12	710.03	0.46	0.15	0.00	0.01	0.05	710.12	0.46	0.14	0.01	0.00	0.13
104	714.5	0.46	0.13	0.00	0.01	0.17	714.3	0.47	0.14	0.00	0.01	0.11	714.48	0.46	0.14	0.00	0.01	0.17	714.28	0.47	0.14	0.00	-0.01	0.12	714.15	0.46	0.15	0.00	0.01	0.18	714.26	0.46	0.14	0.01	0.00	0.20
105	710.3	0.46	4.66	0.02	-0.15	0.15	710.1	0.47	4.33	0.02	-0.03	0.11	710.26	0.46	4.39	0.02	-0.14	0.15	710.13	0.47	4.30	0.02	-0.13	0.14	710.03	0.46	4.00	0.02	-0.14	0.10	710.12	0.46	4.27	0.02	-0.02	0.11
106	714.5	0.46	4.66	0.02	-0.15	0.09	714.3	0.47	4.33	0.02	-0.03	0.12	714.48	0.46	4.39	0.02	-0.14	0.09	714.28	0.47	4.30	0.02	-0.13	0.09	714.15	0.46	4.00	0.02	-0.14	0.10	714.26	0.46	4.27	0.02	-0.02	0.13
107	710.3	0.46	1.25	0.00	-0.04	0.15	710.1	0.47	1.35	0.00	-0.01	0.07	710.26	0.46	1.27	0.00	-0.04	0.15	710.13	0.47	1.36	0.00	-0.04	0.11	710.03	0.46	1.44	0.00	-0.05	0.15	710.12	0.46	1.37	0.01	-0.01	0.11
108	714.5	0.46	1.25	0.00	-0.04	0.06	714.3	0.47	1.35	0.00	-0.01	0.07	714.48	0.46	1.27	0.00	-0.04	0.06	714.28	0.47	1.36	0.00	-0.04	0.06	714.15	0.46	1.44	0.00	-0.05	0.09	714.26	0.46	1.37	0.01	-0.01	0.14
109	710.3	0.46	4.66	0.02	0.11	0.09	710.1	0.47	4.33	0.02	0.19	0.04	710.26	0.46	4.39	0.02	0.11	0.09	710.13	0.47	4.30	0.02	-0.13	0.14	710.03	0.46	4.00	0.02	0.11	0.08	710.12	0.46	4.27	0.02	-0.02	0.11
110	714.5	0.46	4.66	0.02	0.11	0.15	714.3	0.47	4.33	0.02	0.19	0.18	714.48	0.46	4.39	0.02	0.11	0.15	714.28	0.47	4.30	0.02	-0.13	0.09	714.15	0.46	4.00	0.02	0.11	0.17	714.26	0.46	4.27	0.02	-0.02	0.13
111	710.3	0.46	1.25	0.00	0.03	0.06	710.1	0.47	1.35	0.00	0.05	0.01	710.26	0.46	1.27	0.00	0.03	0.06	710.13	0.47	1.36	0.00	-0.04	0.11	710.03	0.46	1.44	0.00	0.04	0.05	710.12	0.46	1.37	0.01	-0.01	0.11
112	714.5	0.46	1.25	0.00	0.03	0.14	714.3	0.47	1.35	0.00	0.05	0.11	714.48	0.46	1.27	0.00	0.03	0.15	714.28	0.47	1.36	0.00	-0.04	0.06	714.15	0.46	1.44	0.00	0.04	0.17	714.26	0.46	1.37	0.01	-0.01	0.14
113	720.2	1.13	3.92	0.02	-0.14	0.00	720.4	1.12	4.22	0.02	-0.21	0.00	720.23	1.13	4.17	0.02	-0.14	0.00	720.43	1.12	4.25	0.02	-0.13	0.00	720.56	1.13	4.57	0.02	-0.15	0.00	720.45	1.13	4.28	0.02	-0.02	0.00
114	724.5	1.13	3.92	0.02	-0.14	0.00	724.6	1.12	4.22	0.02	-0.21	0.00	724.45	1.13	4.17	0.02	-0.14	0.00	724.58	1.12	4.25	0.02	-0.13	0.00	724.68	1.13	4.57	0.02	-0.15	0.00	724.59	1.13	4.28	0.02	-0.02	0.00
115	720.2	1.13	1.05	0.00	-0.04	0.00	720.4	1.12	1.31	0.00	-0.05	0.00	720.23	1.13	1.21	0.00	-0.04	0.00	720.43	1.12	1.34	0.00	-0.04	0.00	720.56	1.13	1.64	0.00	-0.05	0.00	720.45	1.13	1.37	0.01	-0.01	0.00
116	724.5	1.13	1.05	0.00	-0.04	0.00	724.6	1.12	1.31	0.00	-0.05	0.00	724.45	1.13	1.21	0.00	-0.04	0.00	724.58	1.12	1.34	0.00	-0.04	0.00	724.68	1.13	1.64	0.00	-0.05	0.00	724.59	1.13	1.37	0.01	-0.01	0.00
117	720.2	1.13	3.92	0.02	0.10	0.00	720.4	1.12	4.22	0.02	-0.05	0.00	720.23	1.13	4.17	0.02	0.11	0.00	720.43	1.12	4.25	0.02	-0.13	0.00	720.56	1.13	4.57	0.02	0.12	0.00	720.45	1.13	4.28	0.02	-0.02	0.00
118	724.5	1.13	3.92	0.02	0.10	0.00	724.6	1.12	4.22	0.02	-0.05	0.00	724.45	1.13	4.17	0.02	0.11	0.00	724.58	1.12	4.25	0.02	-0.13	0.00	724.68	1.13	4.57	0.02	0.12	0.00	724.59	1.13	4.28	0.02	-0.02	0.00
119	720.2	1.13	1.05	0.00	0.03	0.00	720.4	1.12	1.31	0.00	-0.01	0.00	720.23	1.13	1.21	0.00	0.03	0.00	720.43	1.12	1.34	0.00	-0.04	0.00	720.56	1.13	1.64	0.00	0.04	0.00	720.45	1.13	1.37	0.01	-0.01	0.00
120	724.5	1.13	1.05	0.00	0.03	0.00	724.6	1.12	1.31	0.00	-0.01	0.00	724.45	1.13	1.21	0.00	0.03	0.00	724.58	1.12	1.34	0.00	-0.04	0.00	724.68	1.13	1.64	0.00	0.04	0.00	724.59	1.13	1.37	0.01	-0.01	0.00
121	720.2	1.13	37.9	0.02	-0.42	0.00	720.4	1.12	40.9	0.02	-0.66	0.00	720.23	1.13	38.49	0.02	-0.42	0.00	720.43	1.12	41.06	0.02	-0.40	0.00	720.56	1.13	43.50	0.02	-0.48	0.00	720.45	1.13	41.36	0.02	-0.05	0.00
122	724.																																			