

ARTÍCULO

Recibido: 30 Julio / Aceptado: 11 Agosto

Métodos de homogenización y bifurcaciones en modelos sobre dispersión ecológica

Homogenization methods and bifurcations in models on ecological dispersion

Mauro Montealegre Cardenas
mmonteal@usco.edu.co

Jasmidt Vera Cuenca
jasmidt.vera@usco.edu.co

Edgar Montealegre Cardenas
ingemco@hotmail.com

Resumen

Este artículo sobre métodos de la modelación para sistemas ecológicos resultado del proyecto de investigación denominado "Movilización Matemática y Sistemas Dinámicos en algunos Ecosistemas", donde estudiamos el paradigma de los sistemas dinámicos para la descripción de la dispersión ecológica. Este enfoque ha sido muy exitoso para conocer variedad de fenómenos de las ciencias naturales y sociales; pero debido a las interacciones complejas entre: clima, suelo, agua, biótica, la presencia de la memoria en los procesos dada por la historia local integrada a un entorno, a la morfo-dinámica moldeada por el flujo de poblaciones, resulta que los ecosistemas son más complejos y deben ser considerados como un sistema dinámico adaptativo o emergente. En este trabajo escribimos la evolución de ecosistemas, que se caracterizan por: interdependencia de sus variables a partir de la toma de datos, la estimación estadística de los parámetros, la existencia de varias escalas espacio-temporales; por ello integramos métodos estadísticos con los cambios de variables multiescala para homogenizar y promediar sus perturbaciones singulares.

Los modelos estudiados se aplican a procesos de migración dispersivos que incluyen interrelaciones complejas, en donde se consideran el autocontrol resiliente, siempre y cuando las fluctuaciones no superen un umbral específico.

Palabras clave: Sistemas dinámicos adaptativos, perturbaciones singulares, dispersión ambiental, homogenización, sistemas promediados, complejidad ambiental.

Abstract

This article on methods for ecological systems modeling research project was called "Mobilization Mathematics and Dynamical Systems in some Ecosystems", where we study the dynamical systems paradigm for describing organic dispersion. This approach has been very successful to meet variety of phenomena in the natural and social sciences; but because of the complex interactions between: weather, soil, water, biota, the presence of memory in the process given in local history integrated into a setting, molded by the own of population-dynamics morph, is that ecosystems They are more complex and should be considered as a dynamic adaptive or emergent system.

In this work we wrote the evolution of ecosystems, which are characterized by: interdependence of its variables from the data collection, the statistical parameter estimation, the existence of multiple spatial and temporal scales; therefore we integrate statistical methods with changes multiscale variables to homogenize and averaging their singular perturbation.

Studied models apply to dispersive migration processes involving complex interrelationships, wherein the resilient self-considered, provided that the fluctuations do not exceed a specific threshold.

Key Words: Adaptive Dynamic System, singular perturbations, environmental dispersal, homogenization, averaging systems, environmental complexity.

Complejidad Ambiental

El "Pensamiento Resiliente" es un nuevo paradigma sobre la Sostenibilidad en Ciencias Ambientales, se refiere a una forma única de la conceptualización y gestión de los sistemas socio-ecológicos. El objetivo de la gestión de la resiliencia es mantener la capacidad de un sistema de absorber perturbaciones generadas por humanos y la recuperación del estado natural. Cuando un sistema cruza el umbral debido a que se maneja inadecuadamente, su capacidad de recuperación disminuye y la probabilidad de un cambio de esquema a un estado inestable se incrementa. También sabemos que ciertos aspectos de un sistema ambiental incluida: la diversidad, la jerarquía y la auto-organización, tienden a aumentar la capacidad de recuperar la estructura estable del sistema.

El acercamiento a un umbral entre estados estables alternativos en un sistema conduce a un fenómeno llamado "desaceleración crítica hacia abajo", porque los indicadores deseables del sistema están cada vez más ausentes. Los investigadores de estas áreas usan códigos para estudiar los fenómenos naturales, eligiendo formalmente parámetros y los sistemas dinámicos como paradigma de dichos ecosistemas, un sistema dinámico es un proceso cuyo estado cambia con el tiempo" (Arrowsmith y Place, 1994).

En la fundamentación de los ecosistemas los científicos de las Ciencias Ambientales distinguen entidades tales como especies, formas de vida o grupos funcionales que tienen en cuenta el impacto de los procesos externos y prevén la sustitución de elementos estructurales por otra estructura.

Los sistemas ambientales automodificables, corresponden a un paradigma alternativo a los sistemas dinámicos, son sistemas cuyos componentes se basan en un conjunto abierto de diferentes tipos de componentes y que puede destruir con sus actividades económicas, sus propios componentes (Kampis, 1991). Estos ecosistemas son sistemas adaptativos que pueden automodificarse produciendo nuevas variables, por ejemplo debido a la venir y ir de los organismos, a nuevos contextos ambientales, a los que aparecen expresiones fenotípicas ocultas, a la competencia evolutiva o económica. Por lo tanto, los parámetros y las variables son denibles solo a posteriori.

Modelos Basicos sobre Dispersion Ambiental

Los modelos referentes al fenómeno de dispersión espacial, Turchin (1998), correspondientes a movimientos simples de individuos de múltiples especies, se realizan en ambientes heterogéneos y tienen la siguiente ecuación básica,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi(u)}{\partial x^2},$$

donde $u(t; x)$ es la densidad poblacional, B es el coeficiente de dispersión, es una función que relaciona la tendencia hacia la agregación, Por ejemplo; si los individuos se propagan siguiendo un camino ya existente el modelo corresponde a la ecuación del telegrafo, si consideramos saltos el modelo es integro-diferencial porque involucra la probabilidad de factores exógenos.

Si solo tenemos en cuenta la alteración que sufre el movimiento poblacional debido a las interacciones con un medio ambiente heterogéneo y si el movimiento de los individuos es aleatorio el modelo básico es entonces el siguiente,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [B(u) \frac{\partial u}{\partial x}];$$

donde $B(u)$ es una función dependiente de variables espaciales, la cual describe las alteraciones en la dispersión. Son casos particulares los modelos de tipo Fickian,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (B(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (u(t, x));$$

o modelos no lineales de Reacción-Difusión con coeficientes dependientes de variables espaciales, como el siguiente modelo Kolmogorov,

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} [B(u) \frac{\partial u}{\partial x}] + F(u).$$

Fischer considero el caso $F(u) = u(u-a)(u-1)$ con $0 < a < 1$:

Las interrelaciones entre consumo y conservación de recursos naturales son fenómenos de dispersión no-homogéneos y no-autónomos, son muy frecuentes en la denominada difusión ecológica, estos fenómenos se expresan con estas ecuaciones diferenciales parciales cuyas variables espaciales y temporales generalmente tienen escalas rápidas,

De estos modelos concretos más frecuentes para describir la difusión ecológica son los de Fokker-Planck no autónomos

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (B(x, t) u(x, t)) + \frac{\partial}{\partial x} (v(x, t) u(x, t)),$$

o de Kolmogorov con variables espaciales rápidas,

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = \text{div} [B(\frac{x}{\epsilon}) \text{grad}(u)] + F(\frac{x}{\epsilon}, u).$$

los que en el límite $\epsilon \rightarrow 0$, probaremos respectivamente, que por procesos de auto-regresión estadística se convierten en los siguientes modelos homogéneos y autónomos,

$$\frac{\partial}{\partial t} c(x, t) = \left(\lim_{y \rightarrow \infty} \int_y^* \frac{1}{\delta(x, s)} ds \right)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} c(x, t),$$

$$u_t^0 = \text{div}[B^0 \text{grad} u^0] + \frac{1}{\text{vol}(C)} \int_C^* F(y, u) dy;$$

donde B_0 es constante. Finalmente para un modelo experimental de una microfrecuencia Lange (1994) Considero el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial C_m}{\partial t} + \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \frac{\partial C_{m_i}}{\partial t} = B \frac{\partial^2 C_m}{\partial x^2} - v \frac{\partial C_m}{\partial x} \\ \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) C_{m_i} = \alpha(C_m - C_{m_i}) \end{cases}$$

donde C_m es el contenido de agua, C_{m_i} es el coeficiente de transferencia.

El Metodo de Escalas Múltiples en Sistemas Dispersión

En esta sección consideramos cuatro casos sobre dispersión singularmente perturbados, a los que le aplicamos el método de homogenización

Problemas con Escalas Temporales Múltiples

Nos vamos en la siguiente ecuación no amortiguada con perturbaciones singulares de Dug

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y + \epsilon y^3 = 0; y(0) = 1, y'(0) = 0,$$

la no linealidad cubica es de orden $O(\epsilon)$.

Podemos pensar en una escala de tiempo "lento" ya que si ϵ es pequeño, la cantidad t aumenta lentamente cuando t cambia por orden uno, por ello introducimos una variable lenta explícita $T = t/\epsilon$; ahora expresamos su solución tanto de t como en T , $y = y(t; T)$; expandida para ϵ :

$$y(t) = y_0(t, T) + \epsilon y_1(t, T) + \dots,$$

reemplazamos en la anterior ecuación de Dug y obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \left(\frac{\partial y_0}{\partial t} + \frac{dT}{dt} \frac{\partial y_0}{\partial T} \right) + \epsilon \left(\frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{dT}{dt} \frac{\partial y_1}{\partial T} \right) + O(\epsilon^2) \\ &= \frac{\partial y_0}{\partial t} + \epsilon \left(\frac{\partial y_0}{\partial T} + \frac{\partial y_1}{\partial t} \right) + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Diferenciando una vez más, obtenemos,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} + \epsilon \left(2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t \partial T} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} \right) + O(\epsilon^2).$$

Las ecuaciones diferenciales para y_0 ; y_1 ; y_2 ; son respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} + y_0 &= 0, \\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + y_1 &= -y_0^3 - 2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

La ecuación de orden cero del oscilador armónico, tiene coeficientes que involucran la variable T ,

$$y_0(t, T) = A(T)e^{it} + A^*(T)e^{-it},$$

donde $A(T)$ es una función de la variable lenta T y por la periodicidad con respecto a t , $y_0 = C(T)\cos(t) + S(T)\sin(t)$ con coeficientes $C(T)$ y $S(T)$ determinados por las condiciones iniciales. El lado derecho de la ecuación de orden "2" se puede escribir en la forma:

$$\begin{aligned} -y_0^3 - 2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} &= e^{it} \left\{ -2i \frac{dA}{dT} - 3|A|^2 A \right\} \\ &+ e^{3it} \{ |1 - A^3| \} + c.c., \end{aligned}$$

Los términos e^{it} y e^{-it} son soluciones con coeficientes constantes igual a cero, por ello resulta la siguiente ecuación,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + y_1 = 0 \\ -2i \frac{dA}{dT} - 3|A|^2 A = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, podemos esperar que la ecuación expansión sea válida solo hasta tiempos $t < 1/\epsilon$ y la solución de la ecuación de amplitud en la forma polar es,

$$A(T) = a(T)e^{i\theta(T)},$$

resultando dos ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas para la magnitud y la fase:

$$\frac{da}{dT} = 0, \quad \frac{d\theta}{dT} = \frac{3}{2}a^2.$$

lo que se integra facilmente para dar

$$\theta(T) = \theta_0 + \frac{3}{2}a^2T,$$

donde 0 es otra constante de integracion. Llegamos a la conclusion de que la soluci on de la ecuaci on de amplitud tiene la forma

$$A(T) = ae^{i\theta} = a_0 \exp \left[i \left(\theta_0 + \frac{3}{2}a_0^2 T \right) \right],$$

y por lo que la solucion de el orden cero la solucion de la ecuacion de Dung esta dada por

$$Y_0(t, T) = A(t)e^{i\mu} + c.c. = 2a_0 \cos \left(\theta_0 + \frac{3}{2}a_0^2 T + t \right)$$

para determinar los valores de las constantes a0 y 0; podemos asumir que

$$\begin{aligned} y(0) = 1 &\Rightarrow y_0(0, 0) = 1, y_1(0, 0) = 1 \\ y'(0) = 0 &\Rightarrow \frac{\partial y_0}{\partial T}(0, 0) = 0, \frac{\partial y_1}{\partial T}(0, 0) = -\frac{\partial y_0}{\partial T}(0, 0) \end{aligned}$$

donde @ty1 = ..@ty0; entonces se deduce que,

$$\begin{cases} y_0(0, 0) = 2a_0 \cos(\theta_0) = 1, \\ \partial y_0(0, 0) = -2a_0 \sin(\theta_0) = 0. \end{cases}$$

Finalmente la solucion multiescala de orden cero para la ecuacion singular de Dung resulta ser,

$$Y_0(t, T) = \cos \left[t + \frac{3}{8}T \right] = \cos \left[t \left(1 + \frac{3}{8}\epsilon \right) \right].$$

Problemas con escalas especiales múltiples

Sea $\mathbb{R}^N; N \geq 1; T > 0$; sea una funcion espacialmente peri odica $f(t; x) \in L^2((0; T) \times \mathbb{R}^N)$, a $\in L^2(\Omega)$, consideramos variables microscopicas x_2 y variables macroscopicas $y = x/\epsilon$ para $\epsilon > 0$ peque~no; aplicamos un proceso de la teoria de perturbacion multiescalar, G. Allaire (2010), para transformar el siguiente problema de Cauchy (P):

$$P_\epsilon: \begin{cases} C\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} - \operatorname{div}\left(B\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \nabla u_\epsilon\right) = f(t, x) \\ u_\epsilon = 0 \quad \text{en} \quad (0, T) \times \partial\Omega \\ u_\epsilon(0, x) = a(x) \quad \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

en un sistema homogeneo (P0); donde B es espacialmente peri odica y satisface la siguiente propiedad coercitiva,

$$\alpha |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^N B_{i,j}(y) \xi_i \xi_j \leq \beta |\xi|^2, \beta > \alpha \geq 0.$$

Asumimos que la soluci on de (P) tiene la siguiente expansion

$$u_\epsilon(t, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i u_i(t, x, \frac{x}{\epsilon}),$$

Podemos aplicar el metodo del doble reescalamiento singular para obtener que: $u_0(t; x; y) = u(t; x)$ satisface el siguiente problema homogeneo P0:

$$P_0: \begin{cases} C^* \frac{\partial u_0}{\partial t} - \operatorname{div}(B^* \nabla u_0) = f \quad \text{en} \quad (0, T) \times \partial\Omega, \\ u_0 = 0 \quad \text{en} \quad (0, T) \times \partial\Omega, \\ u_0(0) = a \quad \text{en} \quad \Omega, \end{cases}$$

donde $C = \int_{W_i} \dots$ es solucion al siguiente problema de la celula unitaria,

$$-\operatorname{div}(D(y) \nabla u - W(y)) = f.$$

Cuando el problema (P) es autonomo, lo cual se consigue con un cambio de variable espacial, el sistema limite homogeneo alcanza la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u_t^0 &= \operatorname{div}(u^0 \operatorname{grad} u^0) + F^0(u^0), F^0(u) \\ &= \frac{1}{\operatorname{vol}(C)} \int_C f(y, u) dy. \end{aligned}$$

Formas Normales para Dispersion con Reaccion Peri odica Rapida

Consideramos una version heterogenea temporal que se encuentra en el termino de reaccion periodica, ver B. Friedler (2001),

$$u_t = \Delta_{x,y} u + f\left(\frac{t}{\epsilon}, u\right);$$

donde reescribimos esta ecuacion con los siguientes cambios de variables,

$$u = \begin{pmatrix} u \\ u_x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\Delta_y & 0 \end{pmatrix}, \quad F\left(\frac{t}{\epsilon}, u\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -f\left(\frac{t}{\epsilon}, u\right) \end{pmatrix}$$

Obtenemos de nuevo una ecuacion

$$u_t = Bu + F\left(\frac{t}{\varepsilon}, u\right),$$

La correspondiente ecuacion de reaccion es periodica, R ; la cual convertimos en autonoma aumentando el sistema en una dimension $2(RZ)m = Tm; m \in \mathbb{N}$; para obtener

$$\begin{cases} u_t = Bu + F(\phi, u) \\ \dot{\phi} = \frac{1}{\varepsilon}G(\phi, u) \end{cases}$$

con $G(\phi, u) = c\phi + \dots$, donde $u \in X$, X alg un espacio apropiado para el operador B . Para este sistema singular u se expresa proximo de la identidad en una bola $BR(X)$ en la siguiente forma,

$$u = v + \varepsilon W(\phi, u);$$

esta ecuacion se puede derivar para obtener

$$\partial_t u = \partial_t v + \varepsilon \partial_v W(\phi, v) \partial_t v + \varepsilon \partial_\phi W(\phi, v) \partial_t \phi;$$

reemplazando en el sistema de arriba obtenemos:

$$\partial_t v = (I + \varepsilon \partial_v W(\phi, v))^{-1} \{B(v + \varepsilon W(\phi, v)) + f(\phi, v + \varepsilon W(\phi, v))\}$$

"G(v; ϕ): Por la teoria de Formas Normales dependiendo de G , se puede tratar de simplificar el termino F con una eleccion apropiada de W ;

$$F(v, \phi) = \hat{F}(v) + g(\phi, v) \text{ tal que } \langle g \rangle = \int_{T^m} g(\psi, v) d\psi = 0.$$

En el caso mas simple de forzamiento externo periodico, $m = 1$ y $G = 1$, hacemos,

$$W(v, \phi) = \int_0^\phi g(\psi, v) d\psi,$$

entonces la ecuacion transformada adquiere la forma

$$\partial_t v = (I + \varepsilon \partial_v W(\phi, v))^{-1} \{B(v + \varepsilon W(\phi, v)) + \hat{F}(v + \varepsilon W(\phi, v), \phi) + g(v + \varepsilon W(\phi, v), \phi) - g(\phi, v)\}.$$

Tratamiento analogo se da al siguiente sistema de ecuaciones de reaccion-difusi

$$\begin{cases} u_t = B\Delta u + F(u) + g(\phi, u) \\ \dot{\phi} = \frac{1}{\varepsilon}G(\phi, u) \\ (\phi(0), u(0)) \in X * T^m \end{cases}$$

Despues de aplicar la normalizacion anterior, surge una cuestion importante es la descripci on del comportamiento cerca de un equilibrio para el sistema de la forma,

$$u_t = Bu + F(u), u \in \mathbb{R}^n,$$

cuando B tiene espectro puramente imaginario y semisimple, esto es no hay bloques de Jordan de tama~no 2 o mas grande en la forma normal de Jordan compleja. La estabilidad de la soluci on u_0 depende de los valores propios de $DuF_0(u_0)$; pues si uno de sus valores propios tiene parte real cero estamos ante la presencia de una bifurcacion de Hopf para la variable espacial.

Para el reconocimiento de patrones expresamos las soluciones del problema P_0 en terminos de frecuencias as,

$$u_0(t, x) = A(\tau, x, y) e^{iq_c x} + t.o.s.$$

donde q_c es el numero de onda critico; la ecuacion de la amplitud $A(\tau, x, y)$ se consigue para $\tau = 1$ en la sustitucion de la expansion u en (P) . En este caso $\exp(Bt)$ es periodico con periodo $b = T$, entonces todos los terminos resonantes pueden ser removidos por cambios apropiados de coordenadas, excepto los que sean invariantes bajo el operador de promedio temporal ;

$$\pi F(u) = \frac{1}{T} \int_0^T \exp(-Bt) F(\exp(Bt)u) dt.$$

Homogenizacion espacio-temporal para Difusi on Ecologica

La propagacion de una poblacion o enfermedad est a conectado a la circulacion de los individuos en habitats locales, as como en paisajes grandes podemos asumir que el coeficiente de difusi on depende de dos escalas espaciales, uno que var a rapidamente en distancias corto, por ejemplo, debido a las caracter sticas de la vegetacion y una variable correspondiente escalas 10^3 de paisaje, Turchin (1998) introduce un parametro λ , que es la relacion de las peque~nas y grandes escalas, es decir, sea x la escala espacial grande con una asociada escala de tiempo lento, t . Entonces la variable espacial puede expresarse como $x = y / \lambda$, mientras que el tiempo asociado esta relacionado por $t = 2 \lambda^2 \tau$. Murray (1989) estima que el tiempo promedio para que un organismo en viajar una distancia L es

$$\frac{\partial L^2}{\partial B} \ln\left(\frac{L}{a}\right)$$

De la seccion 4 de este articulo, suponiendo que no hay ning un componente de adveccion, obtenemos la siguiente ecuacion de difusion ecologica,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(B(u)),$$

u = u(x; t) y B = B(x; t) representa el coeficiente de difusion que podran variar con el tiempo y el espacio; B, es la motilidad de los individuos y se supone que vara en el espacio con dos escalas.

Suponemos que la variable dependiente u puede escribirse como una serie de potencias en ϵ , $u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots$ donde ϵ es pequeño, mas cercano a cero que de uno. La soluci on u_0 , se conoce como la aproximaci on de primer orden de u. Transformamos las derivadas en terminos de las nuevas variables x; y; t; τ ; y de la sustituci on de u con la anterior serie de potencias obtenemos,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t} \right) (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots) = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) B(x, y) (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots).$$

Esta ecuaci on se puede dividir en una serie de ecuaciones simples igual andolas segun las potencias de ϵ . Comenzamos por reunir las condiciones de primer orden, 0, para formar la ecuacion $\frac{\partial u_0}{\partial \tau} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} B(x; y) u_0$. Tengamos en cuenta que esta es una ecuacion de difusi on con escala espacial peque~na, y, escala de tiempo rapido, τ . Por lo tanto el equilibrio de esta ecuacion es $\frac{\partial u_0}{\partial \tau} = 0$. Tambien la ecuacion formada por el termino con ϵ , $u_1 = b(x; t) = B(x; y)$. La ecuacion para ϵ^2 es la siguiente,

$$\frac{\partial u_2}{\partial \tau} + \frac{\partial u_0}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} (B(x, y) u_2) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x, y) u_0.$$

Como en las ecuaciones para 0 y 1, hay una derivada de la escala de tiempo rapida τ , por lo que la soluci on a esta ecuacion se aproxima rapidamente a la soluci on de la ecuacion de estado estacionario con respecto a τ . La escala de tiempo es τ , la ecuacion se convierte en,

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (B(x, y) u_2) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{c(x, t)}{B(x, y)} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} c(x, t).$$

Puesto que la derivada parcial con respecto a τ es cero, resulta que $u_1 = 0$, as que c; es constante en y y R Y representa el subconjunto de soporte espacial sobre el cual se desea promediado. Los dos ultimos terminos del lado derecho crecen sin l mites cuando y tiende hacia el infinito. Este comportamiento no ocurrir a en una soluci on valida, por lo que una condici on necesaria es que la suma de estos dos terminos es igual a cero, es decir,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial}{\partial t} c(x, t) \int_Y \frac{1}{B(x, s)} \partial s - y \frac{\partial^2}{\partial x^2} c(x, t) \right] = 0$$

Esta condici on con algunas produce la siguiente ecuaci on de difusi on homogeneizada, El coeficiente de difusi on B; es la media arm onica de B sobre la escala pequena.

Detecci on de Formaci on de patrones en Sistemas Dispersivos

Un Modelo con Dispersion Discontinua

En el libro de Murray (2002), se propone el siguiente sistema:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u, v); \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (D(x) \frac{\partial v}{\partial x}) + g(u, v)$$

donde f y g tienen un estado estacionario (u_0 ; v_0) distintos del origen. Por simplicidad, consideramos estas ecuaciones en dominio finito, por ejemplo [0; 1], con condiciones de contorno cero ujo y donde,

$$D(x) = \begin{cases} D^-, & 0 \leq x \leq \xi \\ D^+, & \xi \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{con } \bar{D} < D^+.$$

Linealizamos el sistema alrededor del estado estacionario (u_0 ; v_0), de tal forma que $u = u_0 + \epsilon u(x)$; $v = v_0 + \epsilon v(x)$: Sustituimos en el modelo linealizado de ecuaciones diferenciales ordinarias, resultando ecuaciones para

$$X_u'' + (a - \lambda) X_u + b X_v = 0$$

son parametros en el espacio de Turing consideramos estas ecuaciones en [0; 1], posteriormente en (0; 1]. En el primer caso adicionamos a la primera ecuacion $s = D$. veces la segunda ecuacion,

$$(X_u + s X_v)'' + \left[a - \lambda + \frac{cs}{D} \right] + \left[X_u + \frac{b + (d - \lambda)s / D}{a + \lambda cs / D} X_v \right] = 0$$

donde s es tal que: $b + (d - \lambda)s = D(a + \lambda cs)$. $s = D$; es una ecuacion de segundo grado des...La ecuacion anterior se convierte en una sola ecuacion en $X_u + s X_v$, para $j = 1; 2$, con soluci on general $C_j \cos(\alpha_j x) + D_j \sin(\alpha_j x)$. Aqu C_j y D_j son constantes de integraci on, $\alpha_j = [a + s \lambda - j D \lambda]^{1/2}$, $j = 1; 2$. Por lo tanto, resultan dos ecuaciones simultaneas para $X_u(x)$ y $X_v(x)$ en [0; 1]. Luego aplicamos las condiciones de contorno de ujo cero en la frontera $x = 0$ y obtenemos,

$$X_u(x) = \frac{1}{(s_2^- - s_1^-)} \left[\frac{(\Gamma_u + s_1^- \Gamma_v) s_1^-}{\cos(\xi \alpha_1^-)} \cos(\alpha_1^- x) - \frac{(\Gamma_u + s_1^- \Gamma_v) s_1^-}{\cos(\xi \alpha_1^-)} \cos(\alpha_2^- x) \right]$$

$$X_v(x) = \frac{1}{(s_2^- - s_1^-)} \left[\frac{(\Gamma_u + s_2^- \Gamma_v)}{\cos(\xi \alpha_2^-)} \cos(\alpha_2^- x) - \frac{(\Gamma_u + s_1^- \Gamma_v)}{\cos(\xi \alpha_1^-)} \cos(\alpha_1^- x) \right]$$

donde $u = Xu$, $v = Xv$. Estamos suponiendo que $s = 1/6 = s/2$, u y v pueden no tener, en general, continuidad de segundo orden en $x = 0$. Las soluciones de la relación de dispersión satisfacen j para algún $n \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2, 3, \dots$, $j = 2$; $n = 1/2$ es la media de los valores propios, los cuales no son raíces, ya que $\cos(n/2) = 0$; cuando n es par.

Análisis no lineal para Formación de Patrones Dispersivos

Estudiaremos el siguiente sistema genérico de (RDE, C. Holmes and Others, 2012)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= f(u, v; p) + D_u u_{xx}, \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) &= g(u, v; p) + D_v v_{xx}, \end{aligned}$$

donde u y v son vectores con variables de difusión lenta o rápida, respectivamente; D_u, D_v son matrices diagonales de los coeficientes de difusión; p es un vector de parámetros de la reacción; asumimos que cuando la difusión de u (resp. v) es suficientemente lenta (resp. rápida) la región perturbada evoluciona de acuerdo con el siguiente EDO de ecuaciones de reacción,

$$\begin{aligned} \frac{du^g}{dt}(x, t) &= f(u^g, v^g; p), \\ \frac{dv^g}{dt}(x, t) &= g(u^g, v^g; p), \\ \frac{du^l}{dt}(x, t) &= f(u^l, v^l; p); \end{aligned}$$

Las variables $(u^g; v^g)$ representan concentraciones "globales" lejos de una perturbación especial y u^l la concentración en una región localmente perturbada.

Consideramos esta ecuación en el intervalo $[-1; 1]$, sin condiciones de contorno en la frontera u, v en RM y u en RN , respectivamente. Para simplificar la notación, asumimos

$$D_u = \epsilon^2 I, \quad D_v = DI,$$

donde I es la matriz identidad de tamaño adecuado. El supuesto central es que hay tres difusividades cinéticas, lenta y rápida, según sean $2 \leq 1/D$, de manera que $f, g = O(1)$; supongamos también que este sistema tiene un estado de reposo homogéneo $(u_s(p); v_s(p))$ que satisface $f(u_s(p); v_s(p); p) = 0 = g(u_s(p); v_s(p); p)$. Consideramos condiciones iniciales de la forma

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u^g, & v(x, 0) &= v^g, & \text{en } |x| > \sqrt{\epsilon}, \\ u(x, 0) &= u^l, & v(x, 0) &= v^l, & \text{en } |x| < \sqrt{\epsilon}. \end{aligned}$$

donde $(u^g; v^g)$ es $O(1)$ con respecto a ϵ y D . Denotamos R_l la región local $|x| < p$ y R_g la región global $|x| > p$.

Para describir la evolución de $(u; v)$ en estas regiones hay que considerar diferentes escalas temporales y espaciales. Un argumento de diferentes escalas de tiempo se aplica para analizar el papel de los efectos de la reacción y difusión, se aplica una técnica de capa límite para separar las escalas espaciales.

La reacción lenta y difusión rápida inherentes a esta clase de RDE pueden ser descritos para tiempos $t = O(1)$, $t_u = 2t$, y $t_v = Dt$. Supongamos que $u = U(x; t; t_u; t_v)$, $v = V(x; t; t_u; t_v)$. Se espera que las capas límite estén separadas en escala de longitud $O(\epsilon)$, para ello escogemos coordenadas $x = (x \dots x_{capa})/\epsilon$; obteniendo así dos sistemas, el primero para la región perturbada,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f + \epsilon^2 u_{xx}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = g + D v_{xx};$$

el segundo para las regiones exteriores lejos de capas límite,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f + u_{\xi\xi}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = g + \frac{D}{\epsilon^2} v_{\xi\xi}.$$

Consideremos en primer lugar la escala de tiempo de difusión rápida y asumimos que u, v tienen expansiones $u = u^0 + u^1$, $v = v^0 + v^1$. Sustituyendo $t_v = Dt$; primer sistema obtenemos los siguientes términos de primer orden

$$\frac{\partial u^0}{\partial t_v} = 0, \quad \frac{\partial v^0}{\partial t_v} = v^0_{xx};$$

está claro que en las regiones exteriores, $u^0 = u^0(x; t; t_u)$ no evoluciona y v^0 evoluciona debido a la difusión de acuerdo a la siguiente expansión,

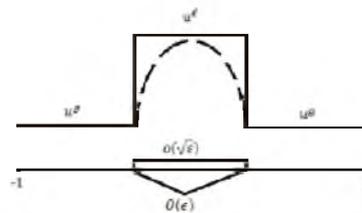


Figura 1: Efecto en la Evolución de la Perturbación en la Frontera

$$\begin{aligned} v^0(x, t, t_u, t_v) &= v^0(t, t_v) + \sum_{n=1}^{\infty} v^n(t, t_u) \\ &\exp(- (n\pi)^2 t_v) \cos(n\pi x). \end{aligned}$$

Como se ilustra que en cada regi on externa Rl;g , v0 evoluciona a un valor constante de manera exponencial rapidamente con tv.Por lo tanto (u0; v0) evolucionar a a un per l constante a trozos con diferentes valores en Rg y Rl. Luego consideremos las capas lmite entre estas regiones con escala de tiempo r apido. Dada la simetr a espacial, considerar solamente la capa l mite izquierda y sustituimos tv = Dt; en el segundo sistema resulta v0 = 0, entonces

$$v^0 = a_0(t_v)\xi + a_1(t_v)$$

las condiciones de frontera conducen a,

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} v^0(\xi) = v^l, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} v^0(\xi) = v^g,$$

lo que implica que a0 = 0: Cuando t = 0(1); las soluciones se acercan a las regiones externas (ug; vg; ul)con valores constantes a trozos en Rl;g. La evoluci on de estos valores con esta escala de tiempo son descritos por la siguiente ecuacion con t = O(1),

$$\frac{\partial u^0}{\partial t} = f(u^0, v^0; p), \quad \frac{\partial v^0}{\partial t} = g(u^0, v^0; p).$$

Sustituyendo (ug; vg) y (ul; vg), respectivamente, se obtiene las ecuaciones de reacci on mencionados arriba. Integrando la segunda de estas ultimas ecuaciones obtenemos:

$$\frac{\partial v^g}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(u^0, v^g; p) dx = g(u^g, v^g; p) + \sqrt{\epsilon} [g(u^l, v^g; p) - g(u^g, v^g; p)].$$

Medidas Estadísticas de la Complejidad Ambiental

Los sistemas dinamicos ambientales tienen complejidades particulares, pues en estos modelos las variables corresponden a datos que deben ser tratados estad sticamente, con procesos de ltracion entre las entradas y salidas para garantizar que no pierden su naturaleza y estructura. Los modelos b asico que representan sistemas ambientales son claramente no triviales, disipativos, emergentes, explicados a partir de las leyes de la termodinamica y el c alculo de probabilidades, como lo plantea I. Prigogine y F. Takens, de las escuelas de sistemas dinamicos de B elgica y Holanda [Marsdeu and Schuele, 1988].

La interpretaci on de los datos estad sticos x(ti) correspondientes a los fen omenos de difusi on ecol ogica involucran los siguientes medidas estadsticas:

a) Las sumas parciales, $y^{(n)} = \sum_{i=1}^n x(t_i)$

b) Desviacion con respecto de un incremento lineal de las sumas parciales en un rango dado de tiempo k,

$$D(n, i, k) = y(n+i) - y(n) - \frac{i}{k}(y(n+k) - y(n))$$

c) Rango estadstico, $R(n; k) = D_{max} \times k$

d) Desviaciones $S(n; k) =$

e) Indice estadstico, $q(n; k) = R(n; k)$

f) Si los datos X se expresan en un alfabeto A con palabras de longitud L, xi ! ai; A = aj con j = 0; 1; 2; :::; A .. 1; Las p erdidas de informaciones son dada por la entropia de Shannon, HL, donde

$$H_L = - \sum_{p_i} p_i^L \ln(p_i^L).$$

g) La ganancia de informacion es $MIG = H_L \dots H_{L+1}$;

h) La complejidad de las uctuaciones es dada por $2^{-k} = \sum p_{ij}^k$; donde pi y pij son las frecuencias y frecuencias relativas para que tal smbolo aparezca en esas palabras de longitud L:

Estimacion de Parametro y Trayectorias

En los modelos de dispersi on ecologica se involucran relaciones socio-ambientales, por ello sus soluciones sostenibles deseadas involucran variables ambientales y economicas, tal como se ilustra en la siguiente gura

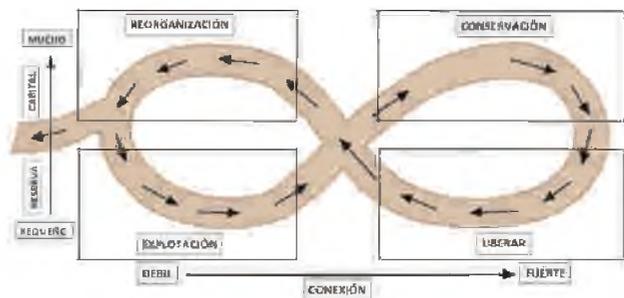


Figura 2: Periodicidad en un Sistema Ambiental Complejo

Por ello para el conocimiento de par ametro y soluciones de modelos dispersivos recurrimos a procesos estoc asticos porque son los que mejor se aproxima al mundo real.

Los Datos y sus mediciones

Podemos representar el sistema que representa la dispersion que puede escribirse a traves de la siguiente E.D.O.,

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \lambda)$$

donde el vector de parametros contiene todos los parametros ambientales y de medicion. Para estos fenomenos los estados $x(t)$ no pueden ser medidos directamente, lo que observamos son cantidades $y(t)$ que se relaciona con $x(t)$ por una transformacion dada por una funcion de medicion suave que algunos errores aleatorios independientes (t) ; las mediciones se realizan con un intervalo de muestreo $j_0 t; t + t; \dots; t + (N - 1)t$: Se supone de una funcion de medicion $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que asigna el estado vector $x(t)$ a una cantidad de dimension menor o igual $y(t)$; y los errores de medicion t se asumen Gaussianos con media cero, entonces la ecuacion de medida se convierte en,

$$y_i = G(x_i, \lambda) + \eta_i$$

produciendo una serie temporal multivariante $y_i (i = 1; \dots; N)$. Este modelo estocastico sobre dispersion ambiental que se encontro (J. Timmer, 2002) se pueden formular as:

$$\begin{cases} x_{t+\Delta t} = F(x_t, \lambda) \\ y_{t+\Delta t} = G(x_{t+\Delta t}, \lambda) + \eta_{t+\Delta t} \end{cases}$$

El paso de tiempo t corresponde al tiempo de muestreo, la funcion F se obtiene de la funcion f en la ecuacion de dispersion a traves del operador

$$F(x_t, \lambda) = x_t + \int_t^{t+\Delta t} f(x(T), \lambda) dT$$

Los estados descritos obedecen a un proceso de Markov, es decir, cada estado sigue unicamente de su predecesor. Un modelo lineal tiene la siguiente forma

$$x_{t+\Delta t} = F(\lambda)x_t + \varepsilon_t; y_{t+\Delta t} = G(\lambda)x_{t+\Delta t} + \eta_{t+\Delta t}$$

Las covarianzas del ruido del proceso y proceso de medicion se denotan respectivamente por Q_t y R_t ,

$$\begin{cases} Q_t := E[\varepsilon_t \varepsilon_t^T] \\ R_t := E[\eta_t \eta_t^T] \end{cases}$$

donde $E[\cdot]$ es el valor esperado. Por lo tanto, $\varepsilon_t \sim N(0; Q_t)$. Por ejemplo consideramos el caso (Timmer, 1998) de la funcion de medicion es $Gx_t = x_t$ y las variaciones Q y R son constantes,

$$\begin{cases} x_{t+\Delta t} = Fx_t + \varepsilon_t, (|F| < 1) \\ y_{t+\Delta t} = x_{t+\Delta t} + \eta_{t+\Delta t} \end{cases}$$

Entonces la constante F puede estimarse multiplicando ambos lados de la primera ecuacion por x_t ; promediando obtenemos,

$$\hat{F} = \frac{\sum_t x_{t+\Delta t} x_t}{\sum_t x_t^2} = \frac{cov(x_{t+\Delta t}, x_t)}{var(x_t)}$$

Esto tambien es la estimacion de m minimos cuadrados de F que surge de la minimizacion de la funcion costo $Z(F)$;

$$\hat{F} = arg \min_F \chi^2(F), \hat{F} = arg \min_F \sum_t \frac{(x_{t+\Delta t} - Fx_t)^2}{Q}$$

ra consideremos un Filtro de Kalman, F.K., todos los estados estimados hasta el tiempo $t + t$ son dadas por, $\hat{x}_{t..t}$; \hat{x}_t y todas sus medidas, y_t ; y_{t+t} , se denota por $\hat{x}_{t+t|t+t}$. La estimacion a posteriori en el tiempo de referencia $t + t$ se escribira como $\hat{x} := \hat{x}_{t+t|t+t}$:

Entonces la estimacion del F.K. en el estado en el tiempo $t + t$ se realiza en dos partes:

(i) Una estimacion a priori de la situacion $\sim x$ antes de la observacion de la nueva medida y_{t+t} :

(ii) Una correccion despues de la observacion de la nueva medida que es proporcional a la diferencia de la nueva medida y_{t+t} y el valor predicho de la nueva medida $\sim y$, $\hat{x}_{t+t|t+t} = \sim x_{t+t|t+t} + K_{t+t}(y_{t+t} - \sim y_{t+t|t+t})$. La matriz del Filtro de Kalman en $t + t$ se define mediante la siguiente relacion:

$$\hat{x} = \tilde{x} + K(y - \tilde{y})$$

Para el caso no-lineal, la representacion del sistema ambiental es ahora el siguiente,

$$\begin{cases} \lambda_{t+\Delta t} = \lambda_t \\ x_{t+\Delta t} = F(x_t, \lambda) \\ y_{t+\Delta t} = G(x_{t+\Delta t}, \lambda) + \eta_{t+\Delta t} \end{cases}$$

Por ejemplo el modelo de Lorenz

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 - x_2 - x_1 x_2 \\ \dot{x}_3 = -\lambda_3 x_3 + x_1 x_2 \end{cases}$$

se extiende hasta el sistema de estados con dimension $D_x = 6$; entonces el modelo completo de espacio de estados no lineal es entonces:

$$\begin{cases} \lambda_{i,t+\Delta t} = \lambda_{i,t} & (i = 1, 2, 3) \\ x_{i,t+\Delta t} = x_{i,t} + I_i & (i = 1, 2, 3) \\ y_i = x_{1,t} + \eta_i \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \int_t^{t+\Delta t} \begin{pmatrix} -\lambda_{1,T}x_{1,T} + \lambda_{1,T}x_{2,T} \\ \lambda_{2,T}x_{1,T} - x_{2,T} - x_{1,T}x_{3,T} \\ -\lambda_{3,T}x_{3,T} + x_{1,T}x_{2,T} \end{pmatrix} dT$$

Estimación Estadística de Parámetro

Podemos pensar en la cantidad observada de seres vivos $N(x; t)$ y denotamos los conjuntos finitos de variables de estados y parámetros as,

$$u(t) \equiv (u(1, t), \dots, u(x, t), \dots, u(n, t))$$

para n lugares espaciales de interés, proceso relacionado en el siguiente modelo estadístico bayesiano,

$$N(x, t) \sim [N(x, t) | u(x, t)], \forall x, t,$$

$$u(x, t) \sim [u(x, t) | f(u(x, t), \delta)], \forall x, t,$$

donde la notación $[j]$, se refiere a una distribución de probabilidad condicional, representa un conjunto correspondiente a coeficientes de difusión para cada una de las localizaciones espaciales, el modelo de difusión ecológica está representado por una aproximación discretizada de $f(u(t.. t); \delta)$. Entonces, suponiendo un conjunto finito de coeficientes modelados por $[j]$, dados $N(t)$ buscamos encontrar la distribución condicional (es decir, a posteriori) del parámetros y las variables de estado ambientales $u(t)$,

$$[u(t), \delta | N(t)] \propto [Datos | Procesos] [Procesos | Parámetros] [Parámetros]$$

$$\propto \prod_t [N(t) | u(t)] \prod_t [u(t) | f(u(t - \Delta t), \delta)] [\delta].$$

donde, $f(u(t.. t); \delta)$, se asume que contiene un conjunto de condiciones iniciales y de frontera.

Si el modelo es ajustado a un proceso de Monte Carlo, MCMC, el algoritmo requiere a la evaluación iterativa del modelo discretizado f . Además, a menudo hay una discrepancia entre las mediciones y la inferencia es deseada. En la situación específica con un conjunto espacialmente heterogéneo de coeficientes de difusión (es decir, $B(x)$), la dimensión del espacio de parámetros es muy grande.

En (Lange 1994) se usa un enfoque Bayesiano para ajustar el modelo con un algoritmo MCMC, la distribución a posteriori correspondiente al modelo homogeneizado el cual es expresado como

$$[u_0(t), \delta | N(t)] \propto \prod_t [N(t) | u_0(t)] \prod_t [u_0(t) | f(u_0(t - \Delta t), \delta)] [\delta].$$

Para el muestreo de los coeficientes de difusión "delta" el algoritmo MCMC, la técnica de homogeneización ayuda al máximo, en particular si usamos la razón de Metropolis-Hastings,

$$\frac{(\prod_t [u_0(t) | f_h(u_0(t - \Delta t), \delta^{(k)})]) [\delta^{(k)}] [\delta^{(k-1)}] [\delta^{(k+1)}])}{(\prod_t [u_0(t) | f_h(u_0(t - \Delta t), \delta^{(k-1)})]) [\delta^{(k-1)}] [\delta^{(k)}] [\delta^{(k-1)})]}$$

En cada caso necesitamos calcular MCMC, donde $K..1$ es la última muestra MCMC para y se supone que $u_0(t)$ representa la muestra actual MCMC para el proceso homogeneizado de EDP, para el valor propuesto $g(x)$.

La homogeneización tratada en la sección 5 de este trabajo sugiere un cambio estadístico óptimo de apoyo en el proceso dinámico ambiental, y, aunque solo estamos agobiados con calcular $u_0(x; t)$, el modelo estadístico proporciona inferencia sobre $u(x; t)$.

En particular la dispersión de los seres vivos podemos asumir en distribución de Poisson,

$$N(t) \sim \text{Pois} (f(u(t - \Delta t), \delta(d))), \forall t$$

$$N(t) \sim \text{Pois} (f_h(u_0(t - \Delta t), \delta(d))), \forall t$$

donde f y f_h corresponden a las soluciones de EDP originales y homogeneizadas, respectivamente. Para el estado inicial (es decir, $u(0)$) y sin condiciones de contorno, entonces buscamos la distribución a posteriori de los coeficientes de difusión, $[dj fN(t); \delta tg]$.

Conclusiones

En este trabajo encontramos que para abordar matemáticamente fenómenos con estructura ambiental debemos usar intensivamente el método de las perturbaciones singulares para homogeneizar las ecuaciones de dispersión ecológicas y simultáneamente usar métodos de promediación para convertirlas en autónomas. Una vez aplicados los dos métodos anteriores, surgen ecuaciones de amplitud, cuyas soluciones son las envolventes del sistema original y con las cuales podemos describir el fenómeno a largo plazo a través de las bifurcaciones globales y la identificación de patrones. En particular resaltamos las ecuaciones diferenciales parciales ecológicas, del tipo Fokker-Planck o Kolmogorov, donde la estimación de sus parámetros, y sus soluciones se obtienen a través de los procesos estadísticos que se estiman a través de la recolección cuidadosa de datos, los cuales se someten a iterados para garantizar la no pérdida de su naturaleza.

El sistema dinámico ambiental que resulta es del tipo no Fickiano, y sus parámetros se estiman y a correlaciones, procesos de Markov o de Monte Carlo.

Estas interrelaciones entre determinismo y aleatoriedad se fundamentan en la naturaleza disipativa y estructurada de los sistemas ambientales, como lo reconoció I. Prigogine, porque los conceptos de entropía y termodinámica son fundamentales para comprender su complejidad ya planteada por D. Ruelle y F. Takens.

La ejecución de este trabajo fue favorecida por el marco teórico de la Teoría de la Complejidad, en particular la complejidad ambiental, que involucra conceptos como: disipación, autorregulación, resiliencia, aleatoriedad, entropía, complejidad y caos aleatorio.

Referencias

Arrowsmith and Place, *Introduction to Dynamical Systems*, Springer, 1994.

B. Fiedler, and M. Vishik. Quantitative homogenization of analytic semigroups and reaction diffusion equations with diophantine spatial frequencies. *Adv. Differ. Equ.*, 6:1377-1408, 2001.

G. Allaire, *Introduction to homogenization theory*, Ecole Polytechnique, France, 2010.

Doelman, R.A. Gardner, and T.J. Kaper. Stability analysis of singular patterns in the 1d gray-scott model: a matched asymptotics approach, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 122 (1998), pp. 1-36.

Ferreira, M. A. R., y Lee, H. K. H., y West, M. (2006), "Multiscale and Hidden Resolution Time Series Models", *Bayesian Analysis*, 1, 947-968.

Fisher, R. A. (1937), "The Wave of Advance of Advantageous Genes", *Annals of Eugenics*, 7, 355-369.

G. Iooss, and A. Mielke. Bifurcating time-periodic solutions of Navier-Stokes equations in infinite cylinders. *J. Nonlinear Science*, 1:107-146, 1991.

Henning N. Voss and Jens Timmer. Nonlinear Dynamical systems identification from uncertain and indirect measurements, *International Journal of Bifurcations and Chaos*, vol. 14 No. 6 (2004).

Holmes, C. Joanne Wang, Tasuku Ueno, Andrew Harwell, Leah Edelstein-Keshet, Takanari Inoue, and Andre Levchenko. Synthetic spatially graded

rac activation drives cell polarization and movement, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Early Edition (2012).

Holmes P, Lumley J.L., Berkooz B; turbulence, coherent structures, *Dynamical Systems and Symmetry*, Cambridge, 1996.

P. Gerard, P. Markowich, Homogenization limits and Wigner transforms. *Comm. Pure Appl. Math.*, 50: 323-379, 1997.

Hooten, M. B. y Wikle, C. K. (2007), "Shifts in the Spatio-Temporal Growth Dynamics of Shortleaf Pine", *Environmental and Ecological Statistics*, 14, 207-227.

23

Holmes W. R. Holmes, A. E. Regimes of wave type patterning driven by refractory actin feedback: Transition from static polarization to dynamic wave behaviour, *Phys Biol*, 9 (2012).

Huang, K.C. Huang and N.S. Wingreen, Min-protein oscillations in round bacteria, *Physical biology*, 1 (2005), p. 229.

K. Matthies. Time-averaging under fast periodic forcing of parabolic partial differential equations: exponential estimates. *J. Differential Equations*, 174(1):133-180, 2001.

Kampis G., *Self Modifying Systems in Biology and Cognitive Science: A New Framework for Dynamics, information and complexity*. Pergamon Press, Oxford, 1991.

Kim A.S., *Bias Monte Carlo Methods in environmental Engineering*, University Hawaii, 2014.

Lange, Holger y otros *Modelling Input-output relations in catchments*, Kluwer Academic Publishers, 1994.

Logan, J. A., y Powell, J. A. White, P., Bentz, B. J., (1998), "Model Analysis of Spatial Patterns in Mountain Pine Beetle Outbreaks", *Theoretical Population Biology*, 53 (3), 236-255.

Marsden and J. Scheurle, Exponentially small splittings of separatrices with applications to KAM theory and degenerate bifurcations in Hamiltonian dynamical systems (Boulder, CO, 1987), *Contemp. Math.*, 81: 213-244, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

Murray, J. D. (2002), *Mathematical Biology*, (3rd ed.), New York: Springer.

Timmer, J.; *Modeling noisy time Series: physiological tremor, J. Bifurcations and Chaos* 8, 1505-1506, 2002.

Turchin, P.; *Qualitative Analysis of Movement*; Sunderland, MA; Sinauer, Inc. Publishers, 1998.

A.M. Turing, The chemical basis of morphogenesis, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences*, 237 (1952), pp. 37-72.