Una familia de sucesiones convergentes a partir de un sistema dinámico discreto.

Luis Arturo Polanía Q.[1]
Gabriel Santiago Rozo P.[2]

Los autores exponen un método de construcción, que presenta ventajas sobre los métodos usuales de construcción de los números reales a partir de los números racionales ; tal como el método de los intervalos encajados de extremos racionales o el de las sucesiones de Cauchy de números racionales.

La sucesión de Fibonacci junto con la sección áurea han tenido intrigados a los matemáticos por mucho tiempo, en parte a causa de su tendencia a presentarse en los lugares más insospechados, por ejemplo, en el reino vegetal dicha sucesión hace su aparición en la implantación espiral de las semillas de ciertas variedades de girasol, igualmente en la distribución en espiral de las hojas alrededor del tallo con el propósito de aprovechar mejor la luz solar; en las escamas que se distribuyen en torno al eje de una piña. Una propiedad notable de la sucesión de Fibonacci es aquella en que la razón entre cada par de números consecutivos va oscilando por encima y por debajo de la razón áurea, y conforme se avanza en la sucesión, la diferencia con esta se hace cada vez menor; la razón de términos consecutivos tienen por límite en el infinito, la razón áurea.

Existe abundante literatura dedicada a la sección áurea y a la sucesión de Fibonacci, tal es el caso de las aplicaciones a las artes plásticas, a la arquitectura e incluso a la poesía (cuentan que Virgilio y otros poetas de su época se sirvieron de la sucesión de Fibonacci en sus composiciones).

El interés por esta sucesión y las llamadas sucesiones generalizadas de Fibonacci (que comienzan por dos enteros cualesquiera y a partir de allí, cada término se obtiene sumando los dos anteriores) ha aumentado, en respuesta a recientes avances en programación de computadores,

---

[1] Magister en Ciencias Matemáticas. Universidad Nacional. Profesor Facultad Ciencias Exactas y Naturales Universidad Surcolombiana.
[2] Especialista en Educación Matemática con aplicaciones en los sistemas dinámicos.

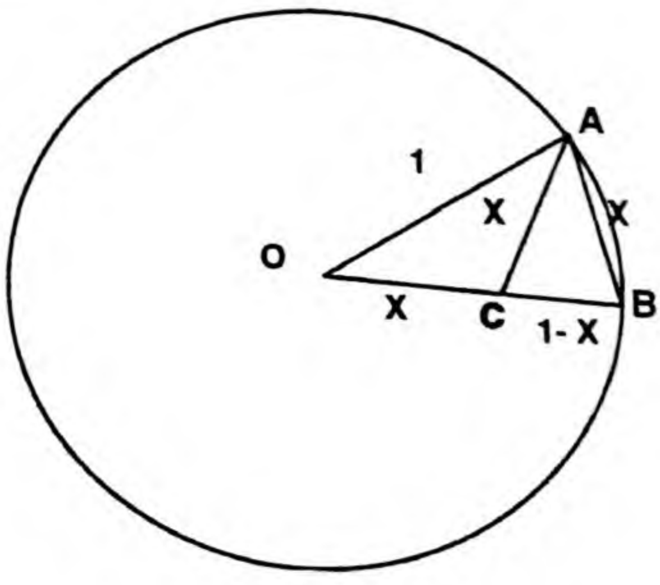
donde estas sucesiones son aplicadas en clasificación de datos, recuperación de información, generación de números aleatorios, e incluso en métodos rápidos de cálculo aproximado de valores máximos o mínimos de funciones complicadas, cuando no se conoce su derivada.

El objetivo del presente trabajo es el de construir una familia de sucesiones en el intervalo unidad [0,1] todas convergentes hacia un único número real, conocido como el número de oro de la geometría ó la media de oro.

Metodología

Para el desarrollo del presente trabajo hemos usado el método constructivo. Esto es, de una construcción geométrica hemos logrado una sucesión de aproximaciones del número de oro. Esta sucesión resulta ser un proceso iterativo. En consecuencia, le asociamos un Sistema Dinámico Discreto no-lineal; el cual nos permitió obtener la familia de sucesiones convergentes a través del único punto fijo del Sistema Dinámico que resultó ser atractor.

Discusión y resultados



Para obtener la media proporcional entre todo un segmento unitario y la parte más corta, consideramos un decágono regular inscrito en una circunferencia de radio unidad y llamando x a la medida del lado del decágono. Vemos que el ángulo AOB mide 36° y los ángulos OAB y OBA mide cada uno 72°, pues el triángulo AOB es isósceles. Al trazar la bisectriz al ángulo OAB se determina el triángulo BAC, también isósceles; y así el triángulo AOB es semejante con el triángulo BAC. En consecuencia, es válida la proporción $\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$; de donde $x(1+x)=1$, es decir, $x=\frac{1}{1+x}$. Esta ecuación genera la fracción continua simple

$$x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$$

de donde se obtiene la siguiente sucesión de estimaciones del número x (llamadas las convergentes de la fracción continua)

$$x_0=\frac{0}{1},\ x_1=\frac{1}{1},\ x_2=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}=\frac{1}{2},\ x_3=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}=\frac{2}{3},\ x_4=\frac{3}{5},\ x_5=\frac{5}{8},\ x_6=\frac{8}{13},\ x_7=\frac{13}{21},\cdots$$

o bien $(x_n)_{n\in N}=\left(\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\frac{8}{13},\ldots,\frac{a_n}{a_{n+1}},\cdots\right)$

donde a_n es el n-ésimo número de Fibonacci.
Luego,

$$x_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}=\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+a_n}=\cfrac{1}{1+\cfrac{a_n}{a_{n+1}}}=\frac{1}{1+x_n}$$

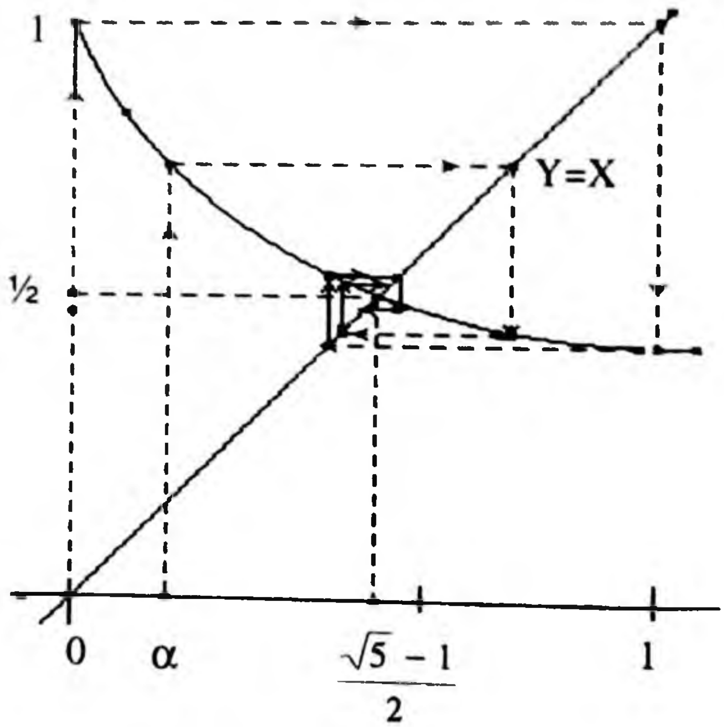
Equivalente al Sistema Dinámico discreto no-lineal

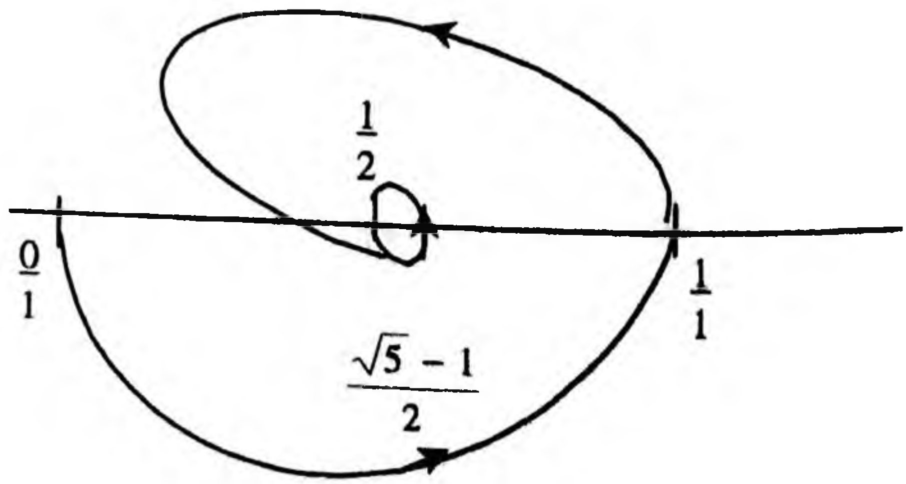
$x_{n+1}=\mathrm{f}(x_n),\ n=0,1,2,\ldots$

donde f es una aplicación $\mathrm{f}:[0,1]\to[0,1]$ definida por $\mathrm{f}(y)=\frac{1}{1+y}$

Por ser f función continua en $[0,1]$, en virtud del teorema Brouwer existe un $y\in[0,1]$ tal que $\mathrm{f}(y)=y$. Esto es, $\frac{1}{1+y}=y$, o sea, la ecuación cuadrática $y^2 + y - 1 = 0$, cuyas soluciones son $y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Seleccionamos $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ como valor de y, pues $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ no pertenece al intervalo $[0,1]$. En consecuencia, el sistema dinámico mencionado antes, posee un solo punto fijo $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ en el espacio de fases $[0,1]$.





Retrato de Fase

El gráfico anterior muestra claramente que la órbita de cualquier punto $\alpha \in [0,1]$ converge hacia $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Esto es, $\lim_{n\to\infty} f^n(\alpha) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ para todo $\alpha \in [0,1]$; pues si fuera $\lim_{n\to\infty} f^n(\alpha) = \beta$, con $\beta \neq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\beta \in [0,1]$ se tendría $f(\beta) = f\left(\lim_{n\to\infty} f^n(\alpha)\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(f^n(\alpha)\right) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(\alpha) = \beta$, por continuidad de la función f en $[0,1]$. Así $f(\beta) = \beta$ contradice el hecho de que $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ es el único punto fijo de f en $[0,1]$.

Obsérvese que $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ es un punto fijo atractor y que la órbita del punto $x_0 = \frac{0}{1}$, que es el conjunto de valores:

$$O^+(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), f^4(x_0), f^5(x_0), f^n(x_0), \ldots\} = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \ldots\right\}$$

converge hacia $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Conclusiones

- Mediante esta construcción se puede obtener fácilmente algunos números irracionales tal como $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
- El método de construcción logrado en este artículo, presenta ventajas sobre los métodos usuales de construcción de los números reales a partir de los números racionales ; tal como el método de los intervalos encajados de extremos racionales o el de las sucesiones de Cauchy de números racionales.

Bibliografía

ANDERSON, John and Ogilvy Stanley; Excursions in Number Theory. Dover Publications, INC. New York. 1988.

GUTIÉRREZ, María Victoria (Q.P.D); Geometría y Forma , segundo coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. 1985.

MISIUREWICZ, Michal and N. Zbigniew; Combinatorial patterns for Maps of the Interval, American Mathematical Society, November 1991, volumen 94.

REYES, Miguel y otros; Iniciación al Caos (Sistemas Dinámicos). Editorial Síntesis, S.A. 1995