

Bounds for the vehicle allocation problem

Cesar Dario Alvarez-Cruz, Pedro Augusto Munari & Reinaldo Morabito

Departamento de Ingeniería de Producción, Universidad Federal de São Carlos, São Carlos, Brazil. cesarknbv@ufscar.br, munari@ufscar.br, morabito@ufscar.br

Received: October 25th, de 2017. Received in revised form: November 15th, 2018. Accepted: December 15th, 2018

Abstract

The Vehicle Allocation Problem (VAP) consists in allocating a fleet of vehicles to attend the expected demand for freight transportation between terminals along a finite multiperiod planning horizon. The objective is to maximize the profit generated for the completed services. Given the geographical dispersion of freight transportation demand services, it is common that some vehicles accumulate where they are not needed or they lack where they are indeed needed, thus it is important to balance the supply of vehicles and demand for services along the planning horizon. The size of practical problems encountered by logistic transportation companies are significantly large to solve in reasonable computational times, especially in road freight transportation. Consequently, heuristic methods are used to obtain feasible solutions, however, without a quality certificate of the solution. For this reason, this work applies two decomposition methods, which provides quality certificate of the solution, to obtain bounds in good computational times. The methods used are lagrangean relaxation with subgradient optimization and Dantzig-Wolfe decomposition with column generation. Computational experiments with realistic instances show great potential of the bounds in terms of computational efficiency for the second method.

Keywords: optimization; vehicle allocation; Dantzig-Wolfe; column generation; lagrangean relaxation.

Cotas para el problema de asignación de vehículos

Resumen

El problema de asignación dinámica de vehículos consiste en asignar una flota de vehículos para atender la demanda prevista por transporte de carga entre terminales, durante un horizonte de tiempo finito y con múltiples periodos, cuyo objetivo es maximizar el lucro generado por los servicios completados. Dada la dispersión geográfica por demanda de servicios de transporte de carga, es común que se acumulen vehículos vacíos en lugares donde no son necesarios o se genere una escasez de vehículos donde son necesitados a lo largo del horizonte de planeación, por tanto, es importante balancear el suministro de vehículos y la demanda por servicios a lo largo del horizonte de planeación. El tamaño de los problemas prácticos enfrentados por transportadores logísticos es considerablemente grande para resolver en tiempos computacionales razonables, especialmente en transporte de carga por carretera. Consecuentemente, se recurre a métodos heurísticos para obtener soluciones factibles, pese a que no se tiene certificado de calidad de la solución. Por esta razón, en este trabajo se propone estudiar dos métodos de decomposición, que proporcionan certificados de calidad, para obtener cotas para el Problema de Asignación de Vehículos (PAV). Los métodos utilizados son relajación lagrangeana junto con método de subgradiente de optimización y decomposición de Dantzig-Wolfe junto con generación de columnas. Experimentos computacionales son realizados con instancias realistas, y los resultados de las cotas se muestran promisorios en términos de eficiencia computacional para el segundo método.

Palabras clave: optimización; asignación de vehículos; Dantzig-Wolfe; generación de columnas; relajación lagrangeana.

1. Introducción

El problema de la gestión de flotas en el transporte por carretera presenta varios desafíos operacionales, principalmente en la gestión del transporte de transferencia entre terminales, en el cual vehículos son asignados para atender la demanda por transporte de carga. Dada la dispersión geográfica por demanda de servicios de transporte

de carga, es común que se acumulen vehículos vacíos en lugares donde no son necesarios o se genere una escasez de vehículos donde son necesitados a lo largo del horizonte de planeación. Si bien el desplazamiento de vehículos vacíos no genera lucros para las empresas (los costos operacionales son cubiertos por los viajes de vehículos con carga), estos son necesarios para la continuidad de las operaciones de transporte. Consecuentemente, la asignación de vehículos de

carga es un componente central en el planeamiento y control de las operaciones de empresas de transporte de carga por carretera. En este contexto, aparece el Problema de Asignación de Vehículo (PAV), que consiste en, dado un conjunto de demandas conocidas por transporte de carga entre terminales (centros de almacenamiento o distribución), asignar vehículos vacíos a los terminales para atender la demanda, de tal forma a maximizar el lucro generado por los servicios completados y minimizar los costos de viajes de vehículos vacíos.

En [1] se aborda por primera vez el problema de asignación de vehículos en el contexto de transporte de carga por carretera. Basado en modelos previos, los autores proponen una red de espacio-tiempo para representar el aspecto dinámico del problema. En [2] se propone un modelo que incorpora la posibilidad de mantener inventario de vehículos vacíos en los terminales. Las decisiones a ser tomadas corresponden al desplazamiento de vehículos con carga, vehículos vacíos y el inventario de vehículos vacíos en los terminales. En [3] se presenta una taxonomía del problema de asignación de vehículos vacíos, pretendiendo ampliar el conocimiento de estos sistemas e identificar posibles tendencias de investigación relacionada. Los autores presentan una clasificación basada en el alcance y cobertura de los problemas, que consideran más pertinentes para el estudio de reposicionamiento de vehículos: modelos operacionales y modelos de políticas de decisión. Igualmente, definen diferentes criterios que sirven para perfilar la diferente clasificación de los modelos.

En [4] se estudia el PAV con demanda incierta con el objetivo de maximizar el margen de contribución neto esperado. El problema es formulado como un modelo de programación estocástica, y una nueva heurística es desarrollada, la cual es comparada como aproximaciones determinísticas previas. En [5, 6] se presenta una formulación de modelaje denominada Logistics Queueing Networks (LQN) para la gestión de cargas en un sistema operacional, basado en el trabajo de [7]. Las formulaciones clásicas basadas en programación lineal de problemas reales generalmente resultan en modelos intratables. No obstante, los modelos LQN pueden considerar una cantidad mayor de detalles del problema, contrariamente a las formulaciones clásicas. Los autores muestran que el algoritmo LQN se aproxima alrededor de 3% de los valores óptimos de la relajación lineal.

En [8-10] se estudia el PAV en el contexto de sistema de transporte de carga por carretera en Brasil. Los autores toman como punto inicial el modelo de [11] y acrecentan detalles importantes en la gestión de vehículos de carga, como la necesidad de tercerización de flota (outsourcing fleet sizing), la necesidad de aceptar backlog (como consecuencia del alto nivel competitivo en la industria de carga, es estratégicamente perjudicial rechazar pedidos), diferentes tipos de vehículos, restricciones de desplazamiento de vehículos para ciertas cargas o ciertos trayectos, y capacidad de carga en los terminales. El énfasis es dado en la caracterización del problema en situaciones reales, en la modelación matemática del problema y la utilización de

heurísticas y metaheurísticas como GRASP, simulated annealing y colonia de hormigas (ACO), para obtener soluciones factibles.

Considerando la dificultad computacional para resolver ejemplares realistas de gran porte del PAV por medio de software de optimización de propósito general, como IBM CPLEX, este trabajo contribuye con la generación de cotas ajustadas para el PAV a través de técnicas de decomposición, como relajación lagrangeana y decomposición Dantzig-Wolfe, para tratar problemas de gran porte y proporcionar cotas de buena calidad para el PAV. Cabe la pena resaltar, que estas cotas sirven para evaluar la calidad de soluciones generadas por métodos heurísticos, los cuales no generan certificados de calidad de las soluciones por si solos.

El resto de este artículo está estructurado de la siguiente forma. Inicialmente, se define un modelo de programación lineal entera para el PAV. Luego, se presenta los métodos de decomposición utilizados para resolver el problema. Posteriormente, se presenta resultados computacionales para ejemplares realistas de gran porte. Finalmente, las conclusiones y perspectivas de trabajos futuros son planteados. Las Tablas 1 a 3 definen las variables y parámetros utilizados en el modelo.

2. Modelo Matemático del PAV

Las decisiones a ser tomadas en el PAV implican determinar cuáles cargas son aceptadas y cuales son rechazadas entre los diferentes terminales, además de definir

Tabla 1.
Conjuntos del PAV

Símbolo	Definición
N	Conjunto de terminales (Centro de Distribución) de la red de transporte.
T	Conjunto de períodos del horizonte de planeación.
V	Conjunto de subdivisiones de toda la flota disponible para el transporte de cargas.

Fuente: Autor.

Tabla 2.
Parámetros del PAV

Símbolo	Definición
τ_{ij}	Tiempo de viaje de i hasta j , $\forall i, j \in N$.
d_{ijt}	Demanda por servicios de transporte (en número de vehículos llenos) desde i hasta j comenzando en el periodo t , $\forall i, j \in N, \forall t \in T$.
p_{ij}^v	Lucro (ingreso menos costos operacionales directos) obtenido por realizar el viaje desde i hasta j con un vehículo tipo v , $\forall i, j \in N, \forall v \in V$.
c_{ij}^v	Costo de desplazamiento para un vehículo vacío tipo v desde i hasta j , $\forall i, j \in N, \forall v \in V$.
m_{it}^v	Cantidad de vehículos tipo v que entran (i.e., se disponibilizan por distintas razones: quedan vacíos después de completar un servicio que comenzó antes del horizonte de planeación del modelo, son vehículos nuevos que son entregados en diferentes terminales, son vehículos tercerizados sobre los cuales no se tiene control antes de su contratación, entre otros.) en el sistema en el terminal i en el periodo t , $\forall i \in N, \forall t \in T, \forall v \in V$.
A_{ij}^v	Restricción de desplazamiento entre los terminales i y j para un vehículo tipo v , siendo 1: si el vehículo puede hacer el trayecto, y 0: caso contrario, $\forall i, j \in N, \forall v \in V$.

Fuente: Autor.

Tabla 3.
Variables del PAV

Símbolo	Definición
x_{ijt}^v	Flujo (número) de vehículos cargados tipo v que comienzan el viaje desde el terminal i hasta el terminal j en el periodo t para satisfacer la demanda d_{ijt} , $\forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V$.
y_{ijt}^v	Flujo (número) de vehículos vacíos tipo v , que comienzan el viaje desde el terminal i hasta el terminal j en el periodo t , $\forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V$.

Fuente: Autor.

el reposicionamiento de vehículos vacíos entre terminales para atender la demanda futura. A seguir, el PAV es modelado como en [9,10], el cual es una extensión de un problema de flujo multicommodity de costo mínimo en un grafo direccionado de espacio-tiempo, para el caso en que todas las demandas son conocidas a priori. Este problema es conocido por pertenecer al grupo de problemas NP-hard [12].

$$Z = \max \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{t \in T} \sum_{v \in V} (p_{ij}^v x_{ijt}^v - c_{ij}^v y_{ijt}^v) \quad (1)$$

$$s. a. \sum_{j \in N} (x_{ijt}^v + y_{ijt}^v) - \sum_{\substack{k \in N \\ k \neq i \\ t > \tau_{ki}}} (x_{kit}^v + y_{kit}^v) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} -y_{ii(t-1)}^v &= m_{it}^v, & \forall i \in N, \forall t \in T, \forall v \in V \\ \sum_{v \in V} x_{ijt}^v &\leq d_{ijt}, & \forall i, j \in N, \forall t \in T \end{aligned} \quad (3)$$

$$x_{ijt}^v = 0 \wedge y_{ijt}^v = 0 \text{ if } A_{ij}^v = 0, \forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V \quad (4)$$

$$x_{ijt}^v \in \mathbb{Z}^+, y_{ijt}^v \in \mathbb{Z}^+, \forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V \quad (5)$$

La función objetivo (1) maximiza el lucro total de las operaciones a lo largo del horizonte de planeación, que equivale al ingreso generado por el desplazamiento de vehículos cargado menos los costos de desplazamiento de vehículos vacíos. El conjunto de restricciones (2) garantiza el equilibrio de flujo de vehículos cargados y vehículos vacíos en cada terminal i , periodo t y vehículo tipo v . El conjunto de restricciones (3) establece una cota superior equivalente a la demanda del número de vehículos en cada arco (i, j, t) . El conjunto de restricciones (4) establece las rutas permitidas para vehículos cargados y vacíos. Estas restricciones son relevantes desde el punto de vista práctico, pues permiten que ciertos tipos de vehículos realicen ciertas rutas, sea por seguridad de las carreteras, restricciones impuestas en el contrato de los conductores, entre otros. Finalmente, el conjunto de restricciones (5) imponen el dominio de las variables de decisión.

En ciertas situaciones prácticas, es deseable tratar cada vehículo individualmente como un tipo de vehículo, en vez de separarlos en grupos. Esto se hace con el objetivo de mejorar el proceso de planeación de los recursos de operación [9,10]. De esta forma, cada vehículo es considerado como un grupo diferente y se fija $m_{it}^v = \{0,1\}$, $\forall i \in N, \forall t \in T, \forall v \in V$, como un parámetro binario, tomando el valor de 1 si el vehículo v entra en el sistema en el terminal i , en el periodo

t , y 0 caso contrario, satisfaciendo:

$$\sum_{i \in N} \sum_{t \in T} \sum_{v \in V} m_{it}^v = |V|$$

A medida que el número de tipo de vehículos aumenta, la dificultad para resolver la formulación (1)-(5) por métodos convencionales aumenta, debido al crecimiento del número de variables y restricciones en las formulaciones.

3. Métodos de solución

Dado que las heurísticas solo proporcionan cotas inferiores de la solución óptima, no es posible establecer una garantía de optimalidad por medio de estos métodos. Esto presenta una desventaja desde el punto de vista administrativo y operacional, ya que las empresas necesitan evaluar el valor o desempeño de las decisiones a ser tomadas. Además, el uso de software de optimización de propósito general, que proporcionan certificados de optimización, resulta inviable dada la cantidad de variables y restricciones de los modelos de las formulaciones clásicas. Así pues, en este trabajo se propone explorar la estructura en bloque del modelo propuesto para aplicar dos técnicas de reformulación que, en teoría, permiten garantizar la optimización para instancias de gran porte que no pueden ser resueltas por software de optimización de propósito general. Estas técnicas son: relajación lagranjeana y decomposición de Dantzig-Wolfe.

3.1. Relajación Lagranjeana y optimización por Subgradiente

En esta sección se presenta la relajación lagranjeana y el método de optimización de subgradiente. Iniciando con la reformulación, observe que la función objetivo (1), junto con las restricciones (2), (4) y (5) forman un problema de flujo de costo mínimo, el cual puede ser resuelto de forma eficiente [12]. De esta forma, se penaliza la función objetivo con las restricciones (3) y los multiplicadores lagranjeanos $u_{ijt} (\geq 0)$ para todo $\forall i, j \in N, \forall t \in T$, resultando el problema lagranjeano:

$$Z = \max \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{t \in T} \sum_{v \in V} (p_{ij}^v x_{ijt}^v - c_{ij}^v y_{ijt}^v) \quad (6)$$

$$+ \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{t \in T} u_{ijt} (d_{ijt} - \sum_{v \in V} x_{ijt}^v) \quad (7)$$

$$s. a. \sum_{j \in N} (x_{ijt}^v + y_{ijt}^v) - \sum_{\substack{k \in N \\ k \neq i \\ t > \tau_{ki}}} (x_{kit}^v + y_{kit}^v) \quad (8)$$

$$-y_{ii(t-1)}^v = m_{it}^v, \quad \forall i \in N, \forall t \in T, \forall v \in V$$

$$x_{ijt}^v = 0 \wedge y_{ijt}^v = 0 \text{ if } A_{ij}^v = 0, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V \quad (9)$$

$$x_{ijt}^v \in \mathbb{Z}^+, y_{ijt}^v \in \mathbb{Z}^+, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V \quad (10)$$

Note que dados u_{ijt} , el problema (6)-(10) puede ser fácilmente resuelto utilizando algún algoritmo que aproveche la estructura en red del problema de flujo. La solución del

problema (6)-(10) puede o no, proporcionar soluciones factibles para el problema original (1)-(5). Puesto que el problema lagranjeano resultante (6)-(10) es un problema de flujo de costo máximo en una red extendida de espacio-tiempo, este posee la propiedad de integralidad. Esto implica que la mejor cota superior producido por el problema lagranjeano (6)-(10) para el problema (1)-(5) no es mejor que la cota superior obtenida por la relajación lineal del problema original. Considerando que se quiere encontrar valores para los multiplicadores lagranjeanos que minimicen la cota superior, el problema dual lagranjeano corresponde a:

$$\min_{\lambda_{ijt} \geq 0} \left\{ \begin{array}{l} \max \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{t \in T} (u_{ijt} d_{ijt}) \\ + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{t \in T} \sum_{v \in V} \sum_{i \neq j} ((p_{ij}^v - \lambda_{ijt}) x_{ijt}^v - c_{ij}^v y_{ijt}^v) \\ \text{s. a. } \sum_{j \in N} (x_{ijt}^v + y_{ijt}^v) - \sum_{\substack{k \in N \\ k \neq i \\ t > \tau_{ki}}} (x_{ki(t-\tau_{ki})}^v + y_{ki(t-\tau_{ki})}^v) \\ -y_{ii(t-1)}^v = m_{it}^v \quad \forall i \in N, \forall t \in T \\ x_{ijt}^v = 0 \wedge y_{ijt}^v = 0 \text{ if } A_{ij}^v = 0 \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T \\ x_{ijt}^v \in \mathbb{Z}^+, y_{ijt}^v \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T \end{array} \right.$$

Para resolver el problema dual lagranjeano, se utiliza el método de optimización de subgradiente, el cual se presenta a continuación como descrito en [13]:

- Haga \underline{z} (cota inferior) igual a 0. Sea $ITMAX$ el número máximo de iteraciones e haga $it = 0$. Fije $u_{ijt} = 0, \forall i, j \in N, \forall t \in T$ como valores iniciales para los multiplicadores.
- Resuelva el problema lagranjeano (6)-(10) con el conjunto de multiplicadores actual, obteniendo la solución $[X, Y]$ e valor \bar{z} . Actualice la mejor cota superior \bar{z}_{min} con \bar{z} . Haga $it = it + 1$.
- Teste de factibilidad: si la solución lagranjeana es factible para el problema original, entonces actualice \underline{z} , la cota inferior para el problema correspondiente a una solución factible. actualice la mejor cota inferior \underline{z}_{max} con \underline{z} .
- Teste de optimalidad: pare si $(\underline{z}_{max} - \bar{z}_{min}) < \epsilon$; caso contrario, diríjase al Paso 5.
- Calcule los subgradientes:
 - $s = (-d - [1,0][X^1, Y^1]^T - \dots - [1,0][X^v, Y^v]^T)$
- Defina el tamaño del paso t por:

$$t = \frac{f * (\bar{z} - \underline{z})}{\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{t \in T} (\lambda_{ijt})^2}$$

Donde $0 < f \leq 2$, y actualice los multiplicadores lagranjeanos por:

$$u_{ijt} = \max(0, u_{ijt} + t * s_{ijt}), \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T$$

- Si $it = ITMAX$, pare; caso contrario, diríjase al Paso 2.

3.2. Decomposición de Dantzig-Wolfe

En esta sección se presenta la descomposición de Dantzig-Wolfe y el método de generación de columnas.

Iniciando con la descomposición, observe que las restricciones de flujo (2) y restricción de movimiento (4) pueden ser agrupadas de acuerdo a cada tipo de vehículo. De esta manera, tomando las restricciones de atendimento a la demanda (3) como restricciones de acoplamiento, las demás pueden ser agrupadas en conjuntos X^v para todo $v \in V$, dados por:

$$X^v = \left\{ \begin{array}{l} (x^v, y^v) \mid \sum_{j \in N} (x_{ijt}^v + y_{ijt}^v) - \sum_{\substack{k \in N \\ k \neq i \\ t > \tau_{ki}}} (x_{ki(t-\tau_{ki})}^v + y_{ki(t-\tau_{ki})}^v) \\ -y_{ii(t-1)}^v = m_{it}^v, \quad \forall i \in N, \forall t \in T \\ x_{ijt}^v = 0 \wedge y_{ijt}^v = 0 \text{ if } A_{ij}^v = 0, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T \\ x_{ijt}^v \in \mathbb{R}^+, y_{ijt}^v \in \mathbb{R}^+, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T \end{array} \right.$$

El dominio de las variables de los conjuntos X^v puede ser relajado dado que el problema posee la propiedad de integralidad. Así pues, se obtiene la siguiente formulación equivalente a la relajación lineal de (1)-(5)

$$\begin{array}{l} Z = \max \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{t \in T} \sum_{v \in V} \sum_{i \neq j} (p_{ij}^v x_{ijt}^v - c_{ij}^v y_{ijt}^v) \\ \text{s. a. } \sum_{v \in V} x_{ijt}^v \leq d_{ijt} \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T \\ (x^v, y^v) \in X^v \quad \forall v \in V \end{array}$$

Por el Teorema de la Representación [14], cualquier solución $(x^v, y^v) \in X^v$ puede ser descrita como una combinación de puntos extremos y rayos extremos de X^v , dada por:

$$(x^v, y^v) = \sum_{q \in Q^v} \lambda_q^v (\bar{x}_q^v, \bar{y}_q^v) + \sum_{r \in R^v} \lambda_r^v (\bar{x}_r^v, \bar{y}_r^v) \\ \sum_{q \in Q^v} \lambda_q^v = 1, \lambda_q^v \geq 0, \lambda_r^v \geq 0$$

Donde $(\bar{x}_q^v, \bar{y}_q^v)$ y $(\bar{x}_r^v, \bar{y}_r^v)$ denotan los puntos y rayos extremos de X^v , respectivamente. En el caso del PAV, los conjuntos son acotados y por lo tanto los rayos extremos no son considerados. Substituyendo esa representación de puntos en el problema encima, se obtiene el Problema Maestro (PM):

$$Z = \max \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{t \in T} \sum_{v \in V} \sum_{i \neq j} \left(p_{ij}^v \sum_{q \in Q^v} \lambda_q^v \bar{x}_{qijt}^v - c_{ij}^v \sum_{q \in Q^v} \lambda_q^v \bar{y}_{qijt}^v \right) \quad (11)$$

$$\text{s. a. } \sum_{v \in V} \sum_{q \in Q^v} \lambda_q^v \bar{x}_{qijt}^v \leq d_{ijt} \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T \quad (u_{ijt}) \quad (12)$$

$$\sum_{q \in Q^v} \lambda_q^v = 1 \quad \forall v \in V \quad (w_v) \quad (13)$$

$$\lambda_q^v \geq 0 \quad \forall q \in Q^v, \forall v \in V \quad (14)$$

donde λ_q^v representan las variables del PM, \bar{x}_{qijt}^v y \bar{y}_{qijt}^v representan las columnas del PM, u_{ijt} y w_v representan las variables duales de las restricciones de acoplamiento y

convexidad, respectivamente. Para obtener las columnas del PM, se puede resolver los subproblemas siguientes, que determinan un programa de asignación de vehículos cargados y vacíos para cada vehículo tipo $v \in V$:

$$\begin{aligned}
 Z = \max & \sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in N \\ i \neq j}} \sum_{t \in T} \sum_{v \in V} \left((p_{ij}^v x_{ijt}^v - c_{ij}^v y_{ijt}^v) - u_{ijt} x_{ijt}^v \right) \\
 \text{s. a.} & \sum_{j \in N} (x_{ijt}^v + y_{ijt}^v) - \sum_{\substack{k \in N \\ k \neq i \\ t > \tau_{ki}}} (x_{kit}^v + y_{kit}^v) \\
 & -y_{ii(t-1)}^v = m_{it}^v, \quad \forall i \in N, \forall t \in T, \forall v \in V \\
 x_{ijt}^v = 0 \wedge y_{ijt}^v = 0 & \text{ if } A_{ij}^v = 0 \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V \\
 x_{ijt}^v \in \mathbb{Z}^+, y_{ijt}^v \in \mathbb{Z}^+ & \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V
 \end{aligned}$$

De esta forma, el costo relativo de cada variable (columna) λ_q^v es dado por $(Z_{sp} - w_v)$. Esto permite inicializar el PM con apenas un subconjunto de columnas, resultando el PM restringido (PMR) y, iterativamente, generar nuevas columnas por medio de las soluciones duales obtenidas del PMR. Ese procedimiento es conocido como el método de generación de columnas (GC), el cual converge para una solución óptima del PM.

Tanto en la relajación lagrangiana como en la decomposición de Dantzig-Wolfe, dado que cada vehículo representa un tipo de vehículo, cada subproblema se vuelve un problema de camino máximo sobre un grafo direccionado de espacio-tiempo, y por ende, se utiliza un algoritmo de camino máximo para grafos direccionados acíclicos [12].

La generación de columnas estándar, basada en soluciones duales óptimas, presenta varios inconvenientes, especialmente cuando el método simplex es utilizado para resolver el PMR [15,16]. Entre estos, se encuentran: convergencia lenta próximo a la solución óptima (*tailing-off effect*); primeras iteraciones con columnas y valores duales irrelevantes (*heading-in effect*); degeneración del problema dual causa variaciones extremas en el valor óptimo del PMR (*Plateau Effect*); y inestabilidad en las soluciones duales, que salta de un valor extremo a otro (*voyo effect*). Así pues, para evitar el efecto negativo de tales inconvenientes, en este trabajo se utiliza la generación de columnas primal-dual [17], una variante del método GC que utiliza el algoritmo de puntos interiores para obtener soluciones duales estables y centralizadas en la región factible del PMR. Mas detalles de estos métodos aplicados al PAV, pueden ser encontrados en [18].

4. Resultados

En esta sección son presentados experimentos computacionales utilizando los métodos de solución propuestos en la sección anterior. Los modelos y algoritmos de este trabajo fueron implementados usando el lenguaje C++/CPLEX 12.6.1 en una maquina Intel® Core™ i7-4500U, 3,4 GHz y 16 GB de RAM.

Inicialmente fueron tomados 6 ejemplares de 15 terminales, 15 periodos de tiempo y 15 tipos de vehículos, para testar la viabilidad de los métodos en problemas mayores. La Tabla 4 muestra los resultados referentes al subgradiente de optimización. Las columnas se refieren a: nombre del problema (Prob); número de iteraciones de la ejecución (No. Iter.); valor

Tabla 4. Resultados de la relajación lineal para instancias pequeñas

Prob	Sol. Ot	Sol. LP	No. Iter	C.S	Iter	CPU LR (seg)	GAP LP (%)
1	17331	17331	5000	17331,0	3451	48332,20	0,0%
2	50112	50112	5000	50112,1	3845	50815,73	0,0%
3	19739	19739	5000	19739,0	3231	50992,36	0,0%
4	16573	16580	5000	16649,0	5000	45173,57	0,42%
5	50197	50197,5	5000	50197,6	3945	45061,26	0,00%
6	22401	22401	5000	22403,6	5000	45857,37	0,01%

Fuente: Autor

Tabla 5. Resultados de la GC primal-dual para instancias pequeñas

Prob	Sol. Ot	Sol. LP	C.S	C.I	GAP C.S.I (%)	CPU PDCGM (seg)	No. Iter
1	17331	17331	17331,00	17330,90	0,0%	8,24	74
2	50112	50112	50112,00	50111,90	0,0%	34,52	155
3	19739	19739	19739,00	19739,00	0,0%	9,44	70
4	16573	16580	16580,00	16580,00	0,0%	6,84	64
5	50197	50197,5	50197,50	50197,40	0,0%	29,21	155
6	22401	22401	22401,10	22400,90	0,0%	19,00	106

Fuente: Autor

óptimo del problema (Sol. Ot); valor óptimo de la relajación lineal (Sol. Ot. LP); cota superior obtenida con el subgradiente de optimización (C.S); número de la iteración en que la cota de la relajación lagrangiana alcanza la cota de la relajación lineal (Iter); tiempo de ejecución de las 5000 iteraciones, en segundos (CPU LR (seg)); porcentaje de desviación entre la cota superior y la solución óptima de la relajación lineal (GAP LP (%)).

La Tabla 5 muestra los resultados referentes a la GC primal-dual. Las primeras tres columnas son iguales a la Tabla 4, y las restantes se refieren a: cota superior obtenida con la GC primal-dual (C.S); cota inferior obtenida con la GC primal-dual (C.I); porcentaje de desviación entre las cotas de la GC primal-dual (GAP C.S.I (%)); tiempo de ejecución de la GC primal-dual, en segundos (CPU PDCGM (seg)); total de iteraciones de la GC primal-dual (No. Iter).

Se puede observar en la Tabla 4, que el método subgradiente requiere un tiempo computacional excesivo, como consecuencia de los problemas de convergencia, para cerrar el intervalo entre la cota superior y la solución de la relajación lineal en instancias consideradas de pequeño porte. Asimismo, se puede observar en la Tabla 5, que el método GC primal-dual obtiene tiempos computacionales bastante favorables para cerrar ese mismo intervalo. Dadas las observaciones anteriores, el siguiente conjunto de instancias, que se consideran de gran porte, serán testadas únicamente con el método GC primal-dual. Las 30 instancias realistas fueron tomadas del trabajo de [8], las cuales poseen las siguientes características: 53 terminales, 36 periodos - cada periodo de 4 horas; 300 cargas para transportar; y flota heterogénea con 130 vehículos - inicialmente agrupados en 17 tipos de vehículos. Utilizando las formulaciones (1)-(5), esos ejemplares involucran millones de variables y restricciones.

Las Tablas 6 y 7 muestran los resultados de las cotas obtenidas por la GC primal-dual para las instancias realistas. Las columnas de la tabla se refieren a: nombre del problema (Prob); valor óptimo de la relajación lineal (Sol. Ot. LP); tiempo

Tabla 6. Resultados de la GC primal-dual para instancias grandes V17

Prob.	Sol. Ot. LP	CPU LP (seg)	Sol. Ot. IP (seg)	CPU IP (seg)	C.S.	C.I.	CPU PDCGM (seg)	Iter PDCGM
p1v17	17080.6	321.02	17079.4	321.02	17080.6	17080.5	67.60	32
p2v17	18906.8	247.51	18906.8	247.51	18906.8	18906.8	80.20	34
p3v17	15789	521.42	15789	521.42	15789	15789	39.96	22
p4v17	19352	212.03	19352	212.03	19352	19352	156.50	42
p5v17	17567.2	270.93	17567.2	270.93	17567.2	17567.2	54.81	29
p6v17	19298	145.07	19298	145.07	19298	19298	91.27	39
p7v17	18878.2	221.95	18878.2	221.95	18878.2	18878.2	77.74	37
p8v17	17609.2	452.86	17609.2	452.86	17609.2	17609.2	103.00	37
p9v17	15016.4	169.92	15015.4	169.92	15016.4	15016.4	85.60	37
p10v17	18093.8	218.73	18093.8	218.73	18093.8	18093.7	46.84	25
p11v17	16387	288.47	16387	288.47	16387	16387	65.18	33
p12v17	21729.8	154.36	21729.8	154.36	21729.8	21729.7	123.74	44
p13v17	18939.2	367.64	18939.2	367.64	18939.2	18939.2	99.00	36
p14v17	19244.2	174.83	19241.8	174.83	19244.3	19244.2	90.29	35
p15v17	19796.2	230.99	19796.2	230.99	19796.3	19796.2	75.16	36
p16v17	17294.6	297.04	17294.6	297.04	17294.6	17294.5	94.37	31
p17v17	16719.8	316.79	16719.8	316.79	16719.8	16719.8	62.83	32
p18v17	17435.4	289.64	17435.4	289.64	17435.4	17435.3	60.67	31
p19v17	17777.8	225.06	17777.8	225.06	17777.8	17777.8	53.77	26
p20v17	19878.6	283.55	19878.6	283.55	19878.6	19878.6	89.01	35
p21v17	16694.8	161.12	16694.8	161.12	16694.8	16694.8	166.58	48
p22v17	18542.6	218.73	18542	218.73	18542.6	18542.6	129.01	43
p23v17	21119.2	674.51	21119.2	674.51	21119.2	21119.2	80.69	37
p24v17	17489.4	273.28	17489.4	273.28	17489.4	17489.4	39.71	22
p25v17	16819.4	257.58	16819.4	257.58	16819.4	16819.3	69.23	33
p26v17	19995.4	176.09	19995.4	176.09	19995.4	19995.4	64.56	31
p27v17	19557.6	283.42	19557.6	283.42	19557.7	19557.6	75.67	35
p28v17	17807.6	146.41	17807.6	146.41	17807.6	17807.5	100.96	35
p29v17	18473.6	211.80	18473.6	211.80	18473.6	18473.5	96.53	31
p30v17	16288.6	299.74	16288.6	299.74	16288.6	16288.6	68.00	29
Media		270.42		270.42			83.61	34
Min		145.07		145.07			39.71	22
Max		674.51		674.51			166.58	48

Fuente: Autor

de ejecución para resolver la relajación lineal del problema usando CPLEX, en segundos (CPU LP (seg)); valor óptimo del problema (Sol. Ot); tiempo de ejecución para resolver el problema usando CPLEX, en segundos (CPU IP (seg)); cota superior obtenida con la GC primal-dual (C.S); cota inferior obtenida con la GC primal-dual (C.I); tiempo de ejecución de la GC primal-dual, en segundos (CPU PDCGM (seg)); y total de iteraciones de la GC primal-dual (Iter PDCGM).

De los valores media, mínimo y máximo de la Tabla 6, se puede observar que los tiempos de ejecución de la GC primal-dual son menores que los tiempos de ejecución de CPLEX para la relajación lineal. Desde el punto de vista administrativo, para mejorar los procesos de planeación y control, es deseable gestionar cada vehículo individualmente. De esta forma, cada vehículo es tratado como un único tipo de vehículo. A continuación se muestra los resultados para el caso en que cada vehículo representa un único tipo de vehículo, o sea, la flota es totalmente desagregada.

Cabe resaltar que el caso de 17 tipos de vehículos involucra millones variables y restricciones, y el caso de 130 tipos de vehículos involucran decenas de millones de variables y restricciones, lo que supone modelos de gran tamaño para resolver con softwares de propósito general.

Se puede observar en la Tabla 7 que, aunque el tamaño del modelo de la formulación clásica crece (ya que el número de vehículos fue incrementado de 17 a 130) y por ende el tiempo de ejecución de CPLEX es mayor, el tiempo de ejecución y total de iteraciones de la GC primal-dual disminuye y es significativamente

Tabla 7. Resultados de la GC primal-dual para instancias grandes V130

Prob.	Sol. Ot. LP	CPU LP (seg)	Sol. Ot. IP (seg)	CPU IP (seg)	C.S.	C.I.	CPU PDCGM (seg)	Iter PDCGM
p1v130	17437.8	3093.68	17437.6	4350.35	17437.8	17437.8	25.6	14
p2v130	19260	3691.73	19260	3395.57	19260	19260	28.3	15
p3v130	16634.5	3433.6	16633.2	2770.19	16634.5	16634.4	28	14
p4v130	19560	4128.69	19560	5424.95	19560	19559.9	33.2	16
p5v130	18169.2	2554.14	18169.2	3768.04	18169.2	18169.1	27.8	15
p6v130	19969.4	2329.35	19969.4	4850.05	19969.4	19969.4	26.2	15
p7v130	19213.8	2611.12	19213.8	3505.86	19213.8	19213.8	25.3	14
p8v130	18475.9	2897.74	18472.6	3940.67	18475.9	18475.8	32.3	16
p9v130	15371.4	2966.85	15371.4	1187.2	15371.4	15371.3	24.9	14
p10v130	18344.8	2772.35	18344.8	3628.78	18344.8	18344.8	24.3	14
p11v130	16799.9	3222.03	16799.6	1030.21	16799.9	16799.8	27.8	13
p12v130	22008.4	3316.07	22008.4	4993.78	22008.4	22008.4	34	17
p13v130	19628.6	2329.99	19628.2	5070.35	19628.6	19628.6	30.3	16
p14v130	19616.6	2683.76	19616.6	1057.62	19616.6	19616.6	25.4	13
p15v130	20673.2	2605.39	20673.2	3894.45	20673.2	20673.1	27.1	14
p16v130	17796.2	2217.23	17796.2	1611.3	17796.2	17796.1	27.2	14
p17v130	17345.2	2453.76	17345.2	3357.3	17345.2	17345.1	26	12
p18v130	17850.7	2352.85	17849.2	4036.08	17850.7	17850.5	29	15
p19v130	18190.6	2765.63	18190.6	3693.52	18190.6	18190.6	27.1	13
p20v130	20754.4	3534.11	20753.4	1422.91	20754.4	20754.3	29	15
p21v130	16953.2	3215.68	16953.2	2396.34	16953.2	16953.2	35	17
p22v130	18699.2	3277.57	18699.2	4803.66	18699.2	18699.2	35	17
p23v130	21525.6	2198.62	21525.6	1692.28	21525.6	21525.5	28.6	15
p24v130	18266.2	2547.81	18266.2	3418	18266.2	18266.2	30.4	13
p25v130	17064.8	3266.69	17064.8	3825.87	17064.9	17064.8	41.9	14
p26v130	20324.4	2364	20324.4	4154.81	20324.4	20324.4	27.4	14
p27v130	20003	2201.89	20003	3690.15	20003	20002.9	25.4	12
p28v130	17956	2539.56	17956	1090.68	17956	17956	29.7	16
p29v130	19074.6	2154.76	19074.6	3754.41	19074.6	19074.5	26.8	15
p30v130	16464.6	3202.25	16464.6	3581.4	16464.6	16464.6	28.4	14
Media		2830.96		3313.23			28.91	15
Min		2154.76		1030.21			24.35	12
Max		4128.69		5424.95			41.87	17

Fuente: Autor

menor que el tiempo de CPLEX. La proximidad de la relajación lineal con la solución óptima del problema y la eficiencia de este método para proporcionar cotas de forma eficiente, muestra un gran potencial de la GC primal-dual para resolver el PAV.

Como último experimento, fue generado un ejemplar de 63 terminales, 36 periodos y 130 tipos de vehículos. Esta instancia fue generada con el propósito de simular el tamaño actual de la red de terminales de la empresa, el cual ha crecido desde que fue elaborado el trabajo de [9, 10]. El modelo generado contiene decenas de millones de variables y restricciones. Contrario al software CPLEX, que reporto problemas de memoria para compilar el problema, la GC primal-dual obtuvo el valor óptimo de la relajación lineal en 13 iteraciones y 33 segundos, de los cuales 81% fueron destinados a resolver los Problemas Maestros. Nuevamente, este resultado muestra un gran potencial para tratar problemas de gran porte que no pueden ser resueltos con softwares de propósito general.

5. Conclusiones

El Problema de Asignación de Vehículos (PAV) es de gran aplicabilidad en sistemas logísticos, específicamente en operaciones de transporte de carga por carretera. Dado que ejemplares de gran porte presentan limitaciones para ser resueltos con software de propósito general, heurísticas sin certificado de calidad son utilizadas para resolver estos

ejemplares [10]. De esta forma, el objetivo de este trabajo fue estudiar dos métodos que utilizan decomposiciones para proporcionar cotas superiores, y posiblemente inferiores, para instancias de gran porte. El primer método investigado fue relajación lagranjeana, utilizando el método de optimización de subgradiente para resolver el problema dual. El segundo método está basado en la decomposición de Dantzig-Wolfe para resolver la relajación lineal del problema original. Ambos métodos pueden ser insertados en un árbol de busca para encontrar la solución óptima del problema.

Ambos métodos fueron testados inicialmente en instancias pequeñas. Sin embargo, ya que la relajación lagranjeana muestra resultados poco favorables en estas instancias pequeñas, solo la GC primal-dual fue utilizada para resolver instancias mayores. Los resultados se muestran promisorios en términos de eficiencia de tiempo computacional, y dada la proximidad de la relajación lineal con la solución óptima del problema, los resultados también se muestran promisorios para utilizar un método que permita obtener soluciones factibles de buena calidad.

Así pues, los siguientes pasos para una investigación futura consisten en: 1) investigar formas de mejorar la convergencia del método subgradiente e investigar heurísticas lagranjeanas para obtener soluciones factibles del problema original; 2) investigar una MIP-heurística de factibilización para obtener soluciones factibles partiendo de las soluciones del PMR óptimo de la relajación de problema; y 3) colocar la GC primal-dual en un árbol de búsqueda Branch-and-Price para encontrar soluciones óptimas del problema.

Agradecimientos

Los autores agradecen a las agencias de apoyo a la investigación CNPq por el financiamiento para la realización de este proyecto.

Referencias

- [1] Powell, W.B., Sheffi, Y. and Thiriez, S., The dynamic vehicle allocation problem with uncertain demands, Proceedings of the Ninth International Symposium on Transportation and Traffic Theory, 1984, pp. 357-374.
- [2] Powell, W.B., A stochastic model of the dynamic vehicle allocation problem, *Transp. Sci.*, 20(2), pp. 117-129, 1986. DOI: 10.1287/trsc.20.2.117
- [3] Dejax, P.J. and Crainic, T.G., Survey Paper--A review of empty flows and fleet management models in freight transportation, *Transp. Sci.*, 21(4), pp. 227-248, 1987. DOI: 10.1287/trsc.21.4.227
- [4] Frantzeskakis, L.F. and Powell, W.B., A successive linear approximation procedure for stochastic, dynamic vehicle allocation problems. *Transp. Sci.*, 24(1), pp. 40-57, 1990. DOI: 10.1287/trsc.24.1.40
- [5] Powell, W.B. and Carvalho, T.A., Real-time optimization of containers and flatcars for intermodal operations, *Transp. Sci.*, 32(2), pp. 110-126, 1998. DOI: 10.1287/trsc.32.2.110
- [6] Powell, W.B. and Carvalho, T.A., Dynamic control of logistics queueing networks for large-scale fleet management, *Transp. Sci.*, 32(2), pp. 90-109, 1998. DOI: 10.1287/trsc.32.2.90
- [7] Powell, W.B., Jaillet, P. and Odoni, A., Stochastic and dynamic networks and routing, *Netw. Routing*, 8, pp. 141-295, 1995. DOI: 10.1016/S0927-0507(05)80107-0
- [8] Vasco, R.A., Otimização na alocação dinâmica de veículos no transporte rodoviário de cargas completas entre terminais, Phd. Thesis, Production engineering Department, Universidade Federal de São Carlos, São Paulo, Brasil, 2012.
- [9] Vasco, R.A., and Morabito, R., Optimization in dynamic allocation of vehicles on road transportation of full load between terminals, *Gestão e Produção*, 21(2), pp. 271-284, 2014. DOI: 10.1590/S0104-530X2014005000011
- [10] Vasco, R. A. and Morabito, R., The dynamic vehicle allocation problem with application in trucking companies in Brazil, *Comput. Oper. Res.*, 76, pp. 118-133, 2016. DOI: 10.1016/j.cor.2016.04.022
- [11] Ghiani, G., Laporte, G. and Musmanno, R., Introduction to logistics systems planning and control. Hoboken, NJ, USA: J. Wiley, 2004, pp. 239-241.
- [12] Ahuja, R., Magnanti, T.L. and Orlin, J.B., Network flows : theory, algorithms, and applications. Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall, 1993, pp. 93-107
- [13] Reeves, C., Modern heuristic techniques for combinatorial problems. New York: Halsted Press, 1993. pp. 256-260.
- [14] Bertsimas, D. and Tsitsiklis, J., Introduction to linear optimization, 1st ed. Athena Scientific, 1997. pp. 67-70.
- [15] Vanderbeck, F., Implementing mixed integer column generation, in: Desaulniers, G., Desrosiers, J. and Solomon, M.M., Eds., Column generation, 2005, pp. 331-358 Boston, MA, Springer US,. DOI: 10.1007/0-387-25486-2_12
- [16] Lübbecke, M.E. and Desrosiers, J., Selected topics in column generation, *Oper. Res.*, 53(6), pp. 1007-1023, 2005. DOI: 10.1287/opre.1050.0234
- [17] Gondzio, J., González-Brevis, P. and Munari, P., Large-scale optimization with the primal-dual column generation method, *Math. Program. Comput.*, 8(1), pp. 47-82, 2016. DOI: 10.1007/s12532-015-0090-6
- [18] Cruz, C.D.A., Abordagens de otimização para o problema de alocação dinâmica de veículos, Msc. Thesis, Production engineering Department, Universidade Federal de São Carlos, São Paulo, Brasil, 2016.

C.D.A. Cruz, es MSc. en Ingeniería de Producción UFSCar; estudiante Ph.D. en Ingeniería de Producción, Universidad Federal de São Carlos (UFSCar), Brasil.
ORCID : 0000-0002-2005-1564

P.A. Munari, es Phd en Ciencias de la Computación USP/ICMC. Profesor asociado en el Departamento de Ingeniería de Producción, Universidad Federal de São Carlos (UFSCar), Brasil.
ORCID :0000-0001-5929-593X

R. Morabito, es Phd en Ingeniería de Transportes USP/EESC; PROFESOR TITULAR en el Departamento de Ingeniería de Producción, Universidad Federal de São Carlos (UFSCar), Brasil.
ORCID: 0000-0002-3948-305X