Sobre un problema con condición de frontera de Neumann no lineal

Mauricio Bogoya[1]

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá

Se estudia un problema de difusión no local, con condicion de frontera de Neumann no lineal, en un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$. Como consecuencia del teorema del punto fijo de Banach, se obtiene la existencia y unicidad de la solución. Se analiza la validez de un principio de comparación para las soluciones.

Palabras claves: difusión no local,
condición de frontera de Neumann no lineal.

We consider a nonlocal diffusion problem, with nonlinear Neumann boundary conditions, in a domain bounded in $\mathbb{R}^N$. As a result of the fixed point theorem of Banach, we obtain the existence and uniqueness of the solutions. We analyze the validity of a comparison principle for solutions.

Keywords: nonlocal diffusion, nonlinear Neumann boundary condition.

MSC: 35K57, 35B40.

Recibido: 2 de diciembre de 2012 Aceptado: 18 de febrero de 2013

[1] mbogoyal@unal.edu.co

1 Introducción

Ecuaciones en derivadas parciales son la base para modelar algunos procesos de difusión que se encuentran en áreas como la biología, la física y la química, entre otras. Una de estas ecuaciones es la *ecuación de medios porosos*

$$u_t = \Delta(u^m)\,, \tag{1}$$

donde $u(x,t)$ es una función escalar, $m \geq 1$, $x \in \mathbb{R}^N$ con $N \geq 1$ y $t \in [0,\infty)$. Consideraciones físicas llevan a la restriccón $u(x,t) \geq 0$. La ecuación de medios porosos aparece en muchas aplicaciones físicas en las cuales este módelo describe procesos de difusión o transferencia de calor. Otras aplicaciones aparecen en biología matemática, filtración de agua, problemas de fronteras libres y en otros campos. Una propiedad importante de la solución de la ecuación de medios porosos, es que tiene la propiedad de velocidad finita de propagacion. Esto significa que si la condición inicial $u(\cdot,0)$ tiene soporte compacto, entonces la solución $u(\cdot,t)$ de (1) tiene soporte compacto para todo $t > 0$. Esta propiedad lleva al desarrollo de frontera libre, el cual consiste en la separación de la región donde la solución es positiva $u > 0$ y de la región donde $u = 0$. Para más información acerca de la ecuación de medios porosos, ver [2] y [7].

Otra ecuación que modela procesos de difusión, la cual es analizada en [6], está dada por

$$u_t(x,\,t) = J * u - u(x,\,t) = \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)\,u(y,\,t)\,dy - u(x,\,t)\,, \tag{2}$$

donde $J : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ con $N \geq 1$, es una función no negativa, continua, derivable, simétrica $J(-x) = J(x)$, radialmente decreciente, de soporte compacto en la bola unitaria y $\int_{\mathbb{R}^N} J(r)\,dr = 1$.

En [6], si la función $u(x,t)$ representa la densidad en el punto x y en el tiempo t y la función $J(x-y)$ representa la distribución de probabilidad de que individuos en la posición y salten a la posición x, entonces $(J * u)(x,t)$ es la razón con la cual los individuos llegan a la posición x desde todas la posiciones y $-u(x,t) = -\int_{\mathbb{R}} J(x-y)u(x,t)dy$ es la razón con la cual los individuos van de la posición x hacia cualquier otra posición y. Estas consideraciones, en ausencia de fuentes externas, implican que la densidad u satisface la ecuación (2), la cual es una ecuación de difusión no local, ya que la difusión de la densidad u no depende solamente de x, sino que también depende de una vecindad de x.

Cortázar y otros [4] introducen una variación al modelo (2). En este modelo unidimensional, la distribución de probabilidad de que individuos en la posición y salten a la posición x, está dada por $J\left(\frac{x-y}{u(y,t)}\right)\frac{1}{u(y,t)}$ cuando $u(x,t) > 0$ y 0 en otra parte. En este caso la razón con la cual los individuos llegan a la posición x desde todos los otros lugares es $\int_{\mathbb{R}} J\left(\frac{x-y}{u(y,t)}\right) dy$ y la razón con la cual se desplazan de la posición x hacia todas las otras posiciones es $-u(x,t) = -\int_{\mathbb{R}} J\left(\frac{x-y}{u(x,t)}\right) dy$. Estas consideraciones, en ausencia de fuentes externas, llevan a que la densidad u tenga que satisfacer

$$u_t(x,\, t) = \int_{\mathbb{R}} J\left(\frac{x-y}{u(y,t)}\right) u(y,\, t)\, dy - u(x,\, t)\,, \tag{3}$$

con dato inicial $u(x,0) = d + w(x,0)$, donde $d \geq 0$ y $w(x,0) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. En [4] se demuestra la existencia y unicidad de la solución de (3). Además, al igual que la ecuación de medios porosos, la ecuación (3) tiene la propiedad de velocidad finita de propagación.

Bogoya, en [3], extiende el modelo (3) a N dimensiones, con $N \geq 1$, obteniendo el siguiente modelo:

$$u_t(x,\, t) = \int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(y,t)}\right) u^{1-N\alpha}(y,\, t)\, dy - u(x,\, t)\,, \tag{4}$$

con dato inicial $u_0(x) = d + w_0(x)$, donde $d \geq 0$, $w_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $w_0 \geq 0$ y $0 < \alpha \leq \frac{1}{N}$. En [3] se analiza la existencia y unicidad de la solución de (4) y se demuestra que las soluciones tienen la propiedad de velocidad finita de propagación.

Bogoya, en [3], estudia los modelos asociados a (4) en un dominio acotado Ω de $\mathbb{R}^N$. Para el problema con condiciones de frontera de Neumann, se tiene el siguiente modelo para $(x,t) \in \Omega \times [0,\infty)$

$$\begin{aligned} u_t(x,\, t) \;\; &= \;\; \int_\Omega \left(J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(y,t)}\right) u^{1-N\alpha}(y,\, t) \right. \\ &\qquad \left. -J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(x,t)}\right) u^{1-N\alpha}(x,\, t) \right) dy\,, \end{aligned} \tag{5}$$

con $u(x,0) = u_0(x) \in L^1(\Omega)$ no negativa. En este modelo se asume que los individuos no pueden saltar adentro ni afuera del dominio Ω. Esto nos dice que el flujo de los individuos entrando o saliendo al dominio es nulo, razón por la cual se obtiene las condiciones de frontera de Neumann. En [3] se analiza la existencia y unicicdad de las soluciones. Además, se obtiene que la masa se conserva y que la solución converge al valor medio del dato inicial cuando $t \to \infty$. Para el módelo de ecuación de medios porosos, $u_t = \Delta(u^m)$, con condiciones de frontera de Neumann, se sabe que las soluciones conservan la masa y convergen al valor medio del dato inicial cuando $t \to \infty$; ver [1].

Condicion de frontera de Neumann no lineal. Cortázar y otros, en [5], estudian el modelo asociado a (2), con condición de frontera no lineal. Más aun, el modelo que proponen es

$$\begin{aligned} u_t(x,\,t) &= \int_\Omega J(x-y)\,(u(y,\,t)-u(x,\,t))\,dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} J(x-y)\,\overline{u}^p(y,\,t)\,dy\,, \end{aligned} \tag{6}$$

con dato inicial $u(x,0) = u_0(x)$, donde $u_0 \in C(\overline{\Omega})$ es una función no negativa y $\overline{u}$ es una extensión de u a una vecindad de $\overline{\Omega}$ definida como sigue. Se considera una vecindad pequeña V de $\partial\Omega$ en $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, en el sentido que existen coordenadas $(s,\overline{y}) \in (0,s_0) \times \partial\Omega$, la cual describe la vecindad V en la forma $y = \overline{y} + s\vec{\eta}(\overline{y})$, con $\overline{y} \in \partial\Omega$ y donde $\vec{\eta}(\overline{y})$ es la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$. Por lo tanto $\overline{u}(y,t) = u(\overline{y},t)$. También se asume que para $0 < r < s_0$ y que para $x \in \overline{\Omega}$ se tiene que $B_r(x)\cap(\mathbb{R}^N\setminus\Omega)$ está contenida en V. En [5] se analiza la existencia y unicidad de las soluciones de (6).

El objetivo de este trabajo, es estudiar el modelo asociado a (5), con condiciones de frontera de Neumann no lineal. Con este fin, sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado, conexo y con frontera suave. Consideramos la condición de frontera no lineal, de la forma $f(\overline{u})$, donde $\overline{u}$ es la extensión de u a una vecindad de $\overline{\Omega}$. Para esta condición de frontera no lineal se tiene el siguiente problema

$$\begin{aligned} u_t(x,\,t) &= \int_\Omega J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(y,t)}\right) u^{1-N\alpha}(y,\,t)\,dy \\ &\quad - \int_\Omega J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(x,t)}\right) u^{1-N\alpha}(x,\,t)\,dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} J(x-y)\,f(\overline{u}(y,\,t))\,dy\,, \\ u(x,\,0) &= d + w_0(x)\,, \end{aligned} \tag{7}$$

con $d \geq 0$ y $w_0 \in C(\overline{\Omega})$. En este modelo, en las integrales sobre Ω, se impone que la difusión no local esté definida en Ω. El último término tiene en cuenta el flujo prescrito, dado por $f(u)$, de los individuos que desde afuera entran al dominio. Esto nos da la condicion de frontera de Neumann.

2 Existencia y unicidad

En esta sección estudiaremos el problema (7). Se asume que $supp(J) \subset B_\delta(0)$ con $\delta > 0$, Ω es un dominio acotado conexo en $\mathbb{R}^N$ con frontera $\partial\Omega$ suave. Además, f es una función no negativa, creciente, $f(0) = 0$, y es una función de tipo Lipschitz con constante de Lipschitz $K > 0$.

Dado que $\int_{\mathbb{R}^N} J(r)dr = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} u(x,\,t) &= \int_\Omega J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(x,t)}\right) u^{1-N\alpha}(x,\,t)\,dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(x,t)}\right) u^{1-N\alpha}(x,\,t)\,dy\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el problema (7) lo podemos reescribir como

$$\begin{aligned} u_t(x,\,t) &= \int_\Omega J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(y,t)}\right) u^{1-N\alpha}(y,\,t)\,dy - u(x,\,t) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(x,t)}\right) u^{1-N\alpha}(x,\,t)\,dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} J(x-y)\,f(\overline{u}(y,\,t))\,dy\,, \\ u(x,\,0) &= d + w_0(x)\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Inicialmente, estudiaremos el problema (8) para $d > 0$ y luego, por medio de un argumento de convergencia, extenderemos el estudio a $d \geq 0$.

Para $t_0 > 0$ fijo, sea $Y_{t_0} = \{w \in C(\overline{\Omega} \times [0, t_0))|\, w \text{ es acotada}\}$ un espacio de Banach con la norma $\|u\| = \sup_{\overline{\Omega}\times[0,t_0)} |w(x, t)|$. Sea $Y_{t_0}^+ = \{w \in Y/\, w \geq 0\}$ un subconjunto no vacio, cerrado de Y_{t_0}. Al multiplicar la ecuación (8) por e^t, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(e^t u) &= e^t \int_\Omega J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(y,t)}\right) u^{1-N\alpha}(y,\,t)\,dy \\
&\quad + e^t \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(x,t)}\right) u^{1-N\alpha}(x,\,t)\,dy \\
&\quad + e^t \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} J(x-y)\, f(\overline{u}(y,\,t))\,dy\,.
\end{aligned}$$

Al integrar la anterior igualdad en el intervalo $[0,t]$, para $t \le t_0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
u(x,\,t) &= \int_0^t e^{(s-t)} \int_\Omega J\left(\frac{x-y}{u(y,t)^\alpha}\right) u(y,\,t)^{1-N\alpha}\,dy\,ds \\
&\quad + \int_0^t e^{(s-t)} \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} J\left(\frac{x-y}{u(x,t)^\alpha}\right) u(x,\,t)^{1-N\alpha}\,dy\,ds \\
&\quad + \int_0^t e^{(s-t)} \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} J(x-y)\, f(\overline{u(y,\,t)})\,dy\,ds + e^{-t}\,u_0(x)\,.
\end{aligned}$$

Por lo anterior, obtendremos la solución de (8) en la forma $u(x,t) = d + w(x,t)$, donde w es el punto fijo del operador $T_{w_0} : Y_{t_0}^+ \longrightarrow Y_{t_0}^+$, definido por

$$\begin{aligned}
&T_{w_0}(w)(x,\,t) \\
&\quad = \int_0^t e^{(s-t)} \int_\Omega J\left(\frac{x-y}{(w(y,s)+d)^\alpha}\right) (w(y,\,s)+d)^{1-N\alpha}\,dy\,ds \\
&\quad + \int_0^t e^{(s-t)} \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} J\left(\frac{x-y}{(w(x,t)+d)^\alpha}\right) (w(x,\,t)+d)^{1-N\alpha}\,dy\,ds \\
&\quad + \int_0^t e^{(s-t)} \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} J(x-y)\, f(\overline{w(y,\,t)}+d)\,dy\,ds \\
&\quad + e^{-t}\,w_0(x) - d\,(1-e^{-t})\,.
\end{aligned}$$

Lema 2.1. *Sean $d > 0$, $w_0, z_0 \in C(\overline{\Omega})$ no negativas y $w, z \in Y_{t_0}^+$. Entonces*

$$\|T_{w_0}(w) - T_{z_0}(z)\| \le Ct_0\|w - z\| + \|w_0 - z_0\|_\infty \,.$$

Demostración. Sean $w, z \in Y_{t_0}^+$ y $0 < t < t_0$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
&|T_{w_0}(w)(x,\, t) - T_{z_0}(z)(x,\, t)| \\
&\le \int_0^t e^{s-t} \int_\Omega \left| J\left(\frac{x-y}{(w(y,s)+d)^\alpha}\right)(w(y,\, s)+d)^{1-N\alpha} \right. \\
&\qquad \left. - \, J\left(\frac{x-y}{(z(y,s)+d)^\alpha}\right)(z(y,\, s)+d)^{1-N\alpha} \right| dy\, ds \\
&\quad + \int_0^t e^{s-t} \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \left| J\left(\frac{x-y}{(w(x,s)+d)^\alpha}\right)(w(x,\, s)+d)^{1-N\alpha} \right. \\
&\qquad \left. - \, J\left(\frac{x-y}{(z(x,s)+d)^\alpha}\right)(z(x,\, s)+d)^{1-N\alpha} \right| dy\, ds \\
&\quad + \int_0^t e^{s-t} \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} J(x-y)\, \left| f(\overline{w(y,\, s)}+d) - f(\overline{z(y,\, s)}+d) \right| dy\, ds \\
&\quad + e^{-t}\, |w_0 - z_0|(x)\,. \qquad (9)
\end{aligned}$$

Para el análisis del primer término de (8), dado que J es una función continua y derivable, tenemos por el teorema del valor medio que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left| J\left(\frac{x-y}{(w(y,s)+d)^\alpha}\right)(w(y,\, s)+d)^{1-N\alpha} \right. \\
&\qquad \left. - J\left(\frac{x-y}{(z(y,s)+d)^\alpha}\right)(z(y,\, s)+d)^{1-N\alpha} \right| dy \\
&\quad = \int_\Omega \left| (-\alpha)\, J'\left(\frac{x-y}{(\zeta(y,s)+d)^\alpha}\right) + J\left(\frac{x-y}{(\zeta(y,\, s)+d)^\alpha}\right)(1-N\alpha) \right| \\
&\qquad \times |(\zeta(y,\, s)+d)|^{-N\alpha} |w(y,\, s) - z(y,\, s)|\, dy \\
&\quad \le \frac{C}{d^{N\alpha}} \int_\Omega |w(y,\, s) - z(y,\, s)|\, dy\,.
\end{aligned}$$

Para el análisis del segundo término de (8) consideramos los conjuntos

$$
\begin{aligned}
A_+(s) &= \left\{ y \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \mid \; w(x,s) \geq z(x,s) \right\}, \\
A_-(s) &= \left\{ y \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \mid \; w(x,s) < z(x,s) \right\},
\end{aligned}
$$

obtiéndose que

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} \left| J\left(\frac{x-y}{(w(x,\, s)+d)^\alpha} \right) (w(x,\, s)+d)^{1-N\alpha} \right. \\
&\qquad\qquad \left. - J\left(\frac{x-y}{(z(x,s)+d)^\alpha} \right) (z(x,\, s)+d)^{1-N\alpha} \right| \, dy \\
&\quad = \int_{A_+(s)} \left(J\left(\frac{x-y}{(w(x,s)+d)^\alpha} \right) (w(x,\, s)+d)^{1-N\alpha} \right. \\
&\qquad\qquad \left. - J\left(\frac{x-y}{(z(x,s)+d)^\alpha} \right) (z(x,\, s)+d)^{1-N\alpha} \right) dy \\
&\qquad + \int_{A_-(s)} \left(J\left(\frac{x-y}{(z(x,s)+d)^\alpha} \right) (z(x,\, s)+d)^{1-N\alpha} \right. \\
&\qquad\qquad \left. - J\left(\frac{x-y}{(w(x,s)+d)^\alpha} \right) (w(x,\, s)+d)^{1-N\alpha} \right) dy \\
&\quad \leq |w(x,\, s) - z(x,\, s)| \, .
\end{aligned}
$$

Para el análisis del tercer término de (8), dado que f es una función de tipo Lipshitz, tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} J(x-y) \left| f(\overline{w(y,\, s)+d}) - f(\overline{z(y,\, s)+d}) \right| dy \\
&\quad \leq K \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} J(x-y) \; |\overline{w}(y,\, s) - \overline{z}(y,\, s)| \; dy \\
&\quad = K \int_0^r \int_{\partial\Omega} J(x - \overline{y} - \tau\, \eta(\overline{y})) \, |w(\overline{y},\, s) - z(\overline{y},\, s)| \, dS_{\overline{y}} \, d\tau \\
&\quad = K \int_{\partial\Omega} \left[\int_0^r J(x - \overline{y} - \tau\, \eta(\overline{y})) \, d\tau \right] |w(\overline{y},\, s) - z(\overline{y},\, s)| \, dS_{\overline{y}} \, .
\end{aligned}
$$

En resumen, tenemos que

$$
\begin{aligned}
&|T_{w_0}(w)(x,t) - T_{z_0}(z)(x,t)| \\
&\leq \frac{C}{d^{N\alpha}} \int_0^t e^{s-t} \int_\Omega |w(y,\, s) - z(y,\, s)|\, dy\, ds \\
&\quad + \int_0^t e^{s-t}\, |w(x,\, s) - z(x,\, s)|\, ds \\
&\quad + K \int_0^t e^{s-t} \int_{\partial\Omega} \left[\int_0^r J(x - \overline{y} - \tau\, \eta(\overline{y}))\, d\tau \right] \\
&\qquad\qquad\qquad \times |w(\overline{y},\, s) - z(\overline{y},\, s)|\, dS_{\overline{y}}\, ds \\
&\quad + e^{-t}\, |w_0(x) - z_0(x)| \\
&\leq \frac{C}{d^{N\alpha}} \int_0^t \int_\Omega |w(y,\, s) - z(y,\, s)|\, dy\, ds + \int_0^t |w(x,\, s) - z(x,\, s)|\, ds \\
&\quad + K \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left[\int_0^r J(x - \overline{y} - \tau\, \eta(\overline{y}))\, d\tau \right] |w(\overline{y},\, s) - z(\overline{y},\, s)|\, dS_{\overline{y}}\, ds \\
&\quad + e^{-t}\, |w_0(x) - z_0(x)|\, .
\end{aligned}
$$

Ahora, tomando el supremo sobre $\overline{\Omega} \times [0, t_0)$, tenemos que

$$
\|T_{w_0}(w) - T_{z_0}(z)\| \leq C_2 t_0 \|w - z\| + \|w_0 - z_0\|_\infty\, ,
$$

donde $C_2 = \frac{C}{d^{N\alpha}}|\Omega| + 1 + C_1 K |\partial\Omega|$. ■

Teorema 2.1. *Para toda función no negativa $w_0 \in C(\overline{\Omega})$ y para toda constante $d > 0$ existe una única solución $u \in Y_{t_0}^+$ de (8).*

Demostración. Sea $\|w_0\|_\infty \leq M$. Primero demostraremos que T_{w_0} es un operador que envia $Y_{t_0}^+$ en $Y_{t_0}^+$. Sean $t \leq t_0$ y $w \in Y_{t_0}^+$. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
&|T_{w_0}(w)(x,t)| \\
&\quad \leq \int_0^t e^{s-t} \int_\Omega J\left(\frac{x - y}{(w(y,s) + d)^\alpha} \right) (w(y,\, s) + d)^{1 - N\alpha}\, dy\, ds \\
&\qquad + \int_0^t e^{s-t} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} J\left(\frac{x - y}{(w(x,s) + d)^\alpha} \right) (w(x,\, s) + d)^{1 - N\alpha}\, dy\, ds \\
&\qquad + \int_0^t e^{s-t} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} J(x - y)\, f(\overline{w(y,\, s) + d})\, dy\, ds \\
&\qquad + e^{-t}\, w_0(x) + d\, (1 - e^{-t})\, .
\end{aligned}
$$

Dado que w es acotada, existe $A > 0$ tal que $\sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}\times[0,t_0)} u(x,t) \leq A$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
|T_{w_0}(w)(x,\,t)| &\leq \int_0^t e^{s-t} \int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{x-y}{(A+d)^{\alpha}}\right)(A+d)^{1-N\alpha}\,dy\,ds \\
&\quad + \int_0^t e^{s-t} \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} J(x-y)\,f(\overline{A+d})\,dy\,ds \\
&\quad + e^{-t}\,w_0(x) + d(1-e^{-t}) \\
&\leq (1-e^{-t_0})\,\big(f(\overline{A+d}) + A + 2\,d\big) + M\,.
\end{aligned}$$

Además, se tiene que $T_{w_0}(w)(x,t) \geq e^{-t}w_0(x) \geq 0$. Ahora, eligiendo $z_0 = w_0$ en el Lema 2.1 y $C_2 t_0 < 1$, tenemos que T_{w_0} es una contracción estricta en $Y^+_{t_0}$. Por lo tanto, por el teorema del punto fijo de Banach, existe un único punto fijo de T_{w_0} en $Y^+_{t_0}$. Por lo tanto, (8) tiene una única solución. ■

Nota 2.1. *La solución de (8) depende en forma continua del dato inicial en el siguiente sentido. Si u y v son soluciones de (8) con dato inicial u_0 y v_0, respectivamente, entonces para todo $t_0 > 0$ existe una constante $\widetilde{C} = \widetilde{C}(t_0)$ tal que*

$$\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\| \leq \widetilde{C}\|u_0 - v_0\|_{\infty}.$$

Nota 2.2. *La función u es solución de (8) si y sólo si*

$$\begin{aligned}
u(x,\,t) &= \int_0^t e^{(s-t)} \int_{\Omega} J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(y,t)}\right) u^{1-N\alpha}(y,\,t)\,dy\,ds \\
&\quad + \int_0^t e^{(s-t)} \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(x,t)}\right) u^{1-N\alpha}(x,\,t)\,dy\,ds \\
&\quad + \int_0^t e^{(s-t)} \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} J(x-y) f(\overline{u}(y,s))\,dy\,ds + e^{-t}\,u_0(x)\,.
\end{aligned}$$

Teorema 2.2. *(`Principio de Comparación`). Sean u y v soluciones continuas de (8) con condiciónes de frontera f y g, respectivamente. Si f y g son funciones crecientes tales que $f \leq g$ y $u(x,0) < v(x,0)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, entonces $u(x,t) < v(x,t)$ para todo $(x,t) \in \overline{\Omega}\times[0,T)$.*

Demostración. Argumentaremos por contradicción. Supongamos que la conclusión no se tiene. Entonces por la continuidad, existe un $0 < t_1 < t_0$ y un punto $x_1 \in \overline{\Omega}$ tal que $u(x_1, t_1) = v(x_1, t_1)$ y $u(x, t) \leq v(x, t)$ para todo $(x, t) \in \overline{\Omega} \times [0, t_1)$. De la Nota 2.2, y por las hipotesis de que J es radialmente decreciente, y $f \leq g$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
0 &= (u-v)(x_1,\, t_1) = e^{-t}(u(x_1,\, 0) - v(x_1,\, 0)) \\
&+ \int_0^t e^{s-t} \int_\Omega \left[J\left(\frac{x_1 - y}{u^\alpha(y, t_1)}\right) u^{1-N\alpha}(y,\, t_1) \right. \\
&\qquad \left. - J\left(\frac{x_1 - y}{v^\alpha(y, t_1)}\right) v^{1-N\alpha}(y,\, t_1) \right] dy\, ds \\
&+ \int_0^t e^{s-t} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} J(x_1 - y)\, (f(\overline{u}(y,\, t_1)) - g(\overline{v}(y,\, t_1)))\, dy\, ds \\
&< 0\,,
\end{aligned}
$$

lo cual es absurdo.■

A continuación extenderemos el Teorema 2.1 al caso $d = 0$.

Teorema 2.3. *Para toda función no negativa $w_0 \in C(\overline{\Omega})$ y para toda constante $d \geq 0$, existe una única solución $u \in Y_{t_0}^+$ de (8).*

Demostración. Consideremos el problema

$$
\begin{aligned}
u_t(x,\, t) &= \int_\Omega J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(y, t)}\right) u^{1-N\alpha}(y,\, t)\, dy \\
&\quad - \int_\Omega J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(x, t)}\right) u^{1-N\alpha}(x,\, t)\, dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} J(x-y)\, f(\overline{u}(y,\, t))\, dy\,, \\
u(x,\, 0) &= d_n + w_0(x)\,,
\end{aligned} \tag{10}
$$

donde $d_n > 0$ es una sucesión decreciente tal que $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$. Sea u_n la única solución de (10) con condición inicial $u_n(x, 0) = d_n + w_0$. Observemos que por el Principio de Comparación (Teorema 2.2) la sucesión u_n es monótona decreciente con respecto a n y como $u_n \geq 0$ existe u tal que $\lim_{n\to\infty} u_n = u$. De la Nota 2.2 y por el teorema de la convergencia monótona, se obtiene que u es la solución de (8) con condición inicial $u(x,0) = w_0(x)$. ■

Hacemos notar que el Principio de Comparación también vale para soluciones continuas de (8) con $d \geq 0$.

2.1 Conclusiones

El modelo de difusión no local con condición de frontera de Neumann no lineal dado por (8), está bien puesto, es decir, el problema (8) tienen una única solución y esta depende continuamnete del dato inicial. Además se satisface un principio de comparación para las soluciones de (8).

References

[1] N. D. Alikakos and R. Rostamain, *Large time behavior of solution of Neumann boundary value problem for the porous medium equation*, Indiana Univ. Math. J. **30**(5), 749 (1981).

[2] D. G. Aronson, *The porous medium equation*, in *Nonlinear Diffusion Problems*, A. Fasano and M. Primicerio (eds.), Lecture Notes in Mathematics **1224** (Springer Verlag, 1986).

[3] M. Bogoya, *A nonlocal nonlinear diffusion equation in higher space dimensions*, J. Math. Anal. Appl. **344**, 601 (2008).

[4] C. Cortázar, M. Elgueta and J. D. Rossi, *A non–local diffusion equation whose solutions develop a free boundary*, Ann. Henri Poincaré **6**(2), 269 (2005).

[5] C. Cortázar, M. Elgueta, J. D. Rossi and N. Wonlaski, *Boundary fluxes for non–local diffusion*, J. Diff. Eqs. **234**, 360 (2007).

[6] P. Fife, *Some nonclassical trends in parabolic and parabolic–like evolutions*, Trends in Nonlinear Analysis **153** (Springer, Berlin, 2003).

[7] J. L. Vazquez, *An introduction to the mathematical theory of the porous medium equation*, in *Shape optimization and free boundaries*, M. C. Delfour (ed.) (Dordrecht, Boston and Leiden, 1992), p. 347.