El problema de Cauchy asociado a una ecuación bidimensional de tipo Benjamin–Ono

Germán Preciado[1]

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá

El propósito de este artículo es estudiar la buena colocación del problema de Cauchy asociado a una ecuación bidimensional de tipo Benjamin–Ono en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$.

Palabras claves: problema de Cauchy, transformada de Hilbert, ecuación de Benjamin–Ono, buena colocación local.

The purpose of this work is to study the well–posedness of the Cauchy problem associated to a bidimensional equation of Benjamin–Ono type in the Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R}^2)$.

Keywords: Cauchy problem, Hilbert transformation, Benjamin–Ono equation, local wellposedness.

MSC: 35J99.

Recibido: 17 de enero de 2012 Aceptado: 22 de febrero de 2012

[1] gpreciadol@unal.edu.co

1 Introducción

El propósito de este artículo es estudiar algunas propiedades del problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} u_t + u^p\, u_x + \mathcal{H}\,\partial_x^2 u + \mathcal{H}\,\partial_y^2 u &= 0\,, \\ u(0;\, x,\, y) &= \phi(x,\, y)\,, \end{aligned} \qquad (1)$$

con $p \in \mathbb{N}$.

Más precisamente, estamos interesados en estudiar algunas propiedades de las soluciones reales de (1) tal como la buena colocación local en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$, $s > 2$, y con la ayuda de estimativas $L^p - L^q$ del grupo asociado obtenemos buena colocación global para dato inicial pequeño.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 presentamos algunos resultados que serán utilizados a lo largo de este artículo, en la sección 3 demostramos, con la ayuda de la teoría de Kato, la buena colocación local de (1), y en la sección 4, utilizando estimativas para el grupo, obtenemos buena colocación global para dato inicial pequeño.

Presentamos la notación que utilizaremos en este artículo.

1. $\mathcal{H}$ denota la transformada de Hilbert en la variable y, es decir

$$\mathcal{H}(f)(y) = \frac{1}{\pi}\, p\,\cdot\, v\,\cdot\, \frac{1}{x} * f(y) = \frac{1}{\pi}\int \frac{f(y-x)}{x}\, dx\,,$$

para cada función f integrable en $\mathbb{R}$ con derivada continua.

2. $S(\mathbb{R}^2)$ denota el espacio de Schwartz.

3. $S'(\mathbb{R}^2)$ denota el espacio de las distribuciones temperadas.

4. Para $f \in S'(\mathbb{R}^2)$, $\widehat{f}$ denota la transformada de Fourier de f y $\check{f}$ denota la transformada inversa de Fourier de f.

5. Para $s \in \mathbb{R}$, $H^s(\mathbb{R}^2) := \{f \in S'(\mathbb{R}^2) | (1 + \xi^2 + \eta^2)^{s/2}\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^2)\}$ es el espacio de Sobolev de orden s. $H^s(\mathbb{R}^2)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno $(f, g)_s = \int_{\mathbb{R}^2}(1+\xi^2+\eta^2)^s \widehat{f(\xi,\eta)}\overline{\widehat{g(\xi,\eta)}}d\xi d\eta$.

6. Para $f \in L_p^s(\mathbb{R}^2)$, $|f|_{p,s} = \|\Lambda^s f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$.

7. Si X, Y son espacios de Banach, $B(X,Y)$ es el espacio de los operadores lineales continuos de X en Y dotado de la norma

$$\|T\|_{B(X,Y)} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \,.$$

Si $X = Y$ escribiremos $B(X)$ en vez de $B(X,Y)$.

8. $\Lambda^s = (1-\Delta)^{s/2}$.

9. $[A,B]$ denota el conmutador de A y B.

2 Preliminares

Presentamos a continuación algunos resultados que serán utilizados a lo largo de este trabajo.

2.1 Teoría de Kato

Haremos una breve presentación de la teoría de Kato descrita en [8]. Con ésta se demuestra el buen planteamiento de problemas de Cauchy de ecuaciones lineales y cuasilineales de evolución.

2.1.1 Caso lineal

Supongamos que X y Y son espacios de Banach reflexivos con $Y \subseteq X$ de forma densa y continua, y sea $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ una familia de operadores tales que

1. $A(t) \in G(X,1,\beta)$. En otras palabras, $-A(t)$ genera un semigrupo de tipo C_0 tal que

$$\|e^{-sA(t)}\| \leq e^{\beta s} \,,$$

para todo $s \in [0,\infty)$.

2. Existe un isomorfismo $S : Y \to X$ tal que $SA(t)S^{-1} = A(t) + B(t)$, donde $B(t) \in B(X)$, para $0 \leq t \leq T$, $t \to B(t)x$ es fuertemente medible, para cada $x \in X$, y $t \to \|B(t)\|_X$ es integrable en $[0,T]$.

3. $Y \subseteq D(A(t))$, para $0 \leq t \leq T$, y $t \to A(t)$ es fuertemente continuo de $[0,T]$ a $B(Y,X)$.

Teorema 1. *Bajo las anteriores condiciones, existe una familia de operadores* $\{U(t,s)\}_{0\leq s\leq t\leq T}$ *tales que:*

1. *U es fuertemente continuo de $\Delta \to B(X)$, donde*

$$\Delta = \{(t,\, s) : \, 0 \leq s \leq t \leq T\}\,.$$

2. *$U(t,s)U(s,r) = U(t,r)$ para $(t,s),(s,r) \in \Delta$, y $U(s,s) = I$.*

3. *$U(t,s)Y \subset Y$ y U es fuertemente continuo de $\Delta \to B(Y)$.*

4. *$\dfrac{dU(t,s)}{dt} = -A(t)U(t,s)$, $\dfrac{dU(t,s)}{ds} = U(t,s)A(s)$, en el sentido fuerte dentro del espacio $B(X,Y)$ y son fuertemente continuas de $\Delta \to B(X,Y)$.*

La familia de operadores $\{U(t,s)\}_{0\leq s\leq t\leq T}$ en el teorema anterior se denomina *familia de operadores de evolución* asociada a $A(t)$. Una consecuencia inmediata de este último teorema es que, para $y \in Y$, $u(t) = U(t,s)y$ es solución del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + A(t)u &= 0\,, \\ u(s) &= y\,. \end{aligned}$$

para $s \leq t \leq T$.

Más aun, si $f \in C([0,T];X) \cap L^1([0,T];Y)$, entonces

$$u(t) = U(t,\,0)\,\phi + \int_0^t U(t,\,s)\,f(s)\,ds\,,$$

si y sólo si $u \in C([0,T];Y) \cap C^1((0,T);X)$ y

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + A(t)\,u &= f(t)\,, \\ u(0) &= \phi\,. \end{aligned}$$

para $0 \leq t \leq T$.

2.1.2 Caso Cuasilineal

Sean X y Y espacios de Banach reflexivos, $Y \subseteq X$, siendo la inclusión densa y continua. Consideremos el siguiente problema

$$\begin{aligned} \partial_t u + A(t,\, u)\, u &= f(t,\, u) \in X\,, \\ u(0) &= u_0 \in Y\,, \end{aligned} \tag{2}$$

para $t > 0$, donde, para cada t, $A(t, u)$ es un operador lineal de Y en X y $f(t, u)$ es una función de $\mathbb{R} \times Y$ en X. Consideremos también las siguientes condiciones:

(X) Existe un isomorfismo isométrico S de Y en X.

Existen $T_0 > 0$ y W, una bola abierta de centro w_0, tales que:

(A_1) Para cada $(t, y) \in [0, T_0] \times W$, el operador lineal $A(t, y)$ pertenece a $G(X, 1, \beta)$, donde β es un número real positivo. En otras palabras, $-A(t, y)$ genera un C_0 semigrupo tal que

$$\|e^{-s\,A(t,y)}\|_{\mathcal{B}(X)} \le e^{\beta s}\,,$$

para $s \in [0, \infty)$. Nótese que si X es un espacio de Hilbert, $A \in G(X, 1, \beta)$ si y sólo si

a. $\langle Ay, y\rangle_X \ge -\beta \|y\|_X^2$ para todo $y \in D(A)$,

b. $(A + \lambda)$ es sobreyectivo para todo $\lambda > \beta$.

(A_2) Para cada $(t, y) \in [0, T_0] \times W$ el operador $B(t, y) = [S, A(t, y)]S^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ y es uniformemente acotado, es decir, existe $\lambda_1 > 0$ tal que

$$\|B(t, y)\|_{\mathcal{B}(X)} \le \lambda_1\,,$$

para todo $(t, y) \in [0, T_0] \times W$. Además, para algún $\mu_1 > 0$, se tiene que, para todo $y, z \in W$,

$$\|B(t,\, y) - B(t,\, z)\|_{\mathcal{B}(X)} \le \mu_1 \|y - z\|_Y\,.$$

(A_3) $Y \subseteq D(A(t, y))$, para cada $(t, y) \in [0, T_0] \times W$, (la restricción de $A(t, y)$ a Y pertenece a $\mathcal{B}(Y, X)$) y, para cada $y \in W$ fijo, $t \to$

$A(t,y)$ es fuertemente continua. Además, para cada $t \in [0,T_0]$ fijo, se satisface la siguiente condición de Lipschitz,

$$\|A(t,\, y) - A(t,\, z)\|_{\mathcal{B}(Y,X)} \leq \mu_2 \, \|y - z\|_X \, ,$$

donde $\mu_2 \geq 0$ es una constante.

(A_4) $A(t,y)w_0 \in Y$ para todo $(t,y) \in [0,T] \times W$. Además, existe una constante λ_2 tal que

$$\|A(t,\, y)\, w_0\|_Y \leq \lambda_2 \, ,$$

para toda $(t,y) \in [0,T_0] \times W$.

(f_1) f es una función acotada en $[0,T_0] \times W$ a Y, es decir, existe λ_3 tal que

$$\|f(t,\, y)\|_Y \leq \lambda_3 \, ,$$

para todo $(t,y) \in [0,T_0] \times W$. Además, la función $t \in [0,T_0] \mapsto f(t,y) \in Y$ es continua con respecto a la topología de X y para todo $y, z \in Y$ se tiene que

$$\|f(t,\, y) - f(t,\, z)\|_X \leq \mu_3 \, \|y - z\|_X \, ,$$

donde $\mu_3 \geq 0$ es una constante.

Teorema 2 (Kato). *Supongamos que se satisfacen las condiciones (X), (A_1)–(A_4) y (f_1). Dado $u_0 \in Y$, existe $0 < T < T_0$ y una única $u \in C([0,T];Y) \cap C^1((0,T);X)$ solución de* (2)*. Además, la aplicación $u_0 \to u$ es continua en el siguiente sentido: consideremos la sucesión de problemas de Cauchy,*

$$\begin{aligned} \partial_t u_n + A_n(t,\, u_n)\, u_n &= f_n(t,\, u_n)\, , \\ u_n(0) &= u_{n_0}\, , \end{aligned} \tag{3}$$

para $t > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que se satisfacen las condiciones (X), (A_1)–(A_4) y (f_1) para todo $n \geq 0$ en (3)*, con los mismos X, Y y S, y las* *correspondientes β, λ_1–λ_3, μ_2–μ_3 pueden ser escogidas independientes de n. También supongamos que*

$$
\begin{aligned}
s\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n(t,w) &= A(t,w) \ \textit{en} \ \ B(X,Y)\,,\\
s\text{-}\lim_{n\to\infty} B_n(t,w) &= B(t,w) \ \textit{en} \ \ B(X)\,,\\
\lim_{n\to\infty} f_n(t,w) &= f(t,w) \ \textit{en} \ \ Y\,,\\
\lim_{n\to\infty} u_{n_0} &= u_0 \ \textit{en} \ \ Y\,,
\end{aligned}
$$

donde $s - \lim$ *denota el límite fuerte. Entonces, T puede se puede elegir de tal manera que $u_n \in C([0,T],Y) \cap C^1((0,T),X)$ y*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T]} \|u_n(t) - u(t)\|_Y = 0\,.$$

Para una demostración de este teorema se puede ver [8].

2.2 Otros resultados importantes

Los siguientes resultados acerca de conmutadores de operadores hacen parte del acervo de herramientas de las que se hace uso en el análisis.

El primero de ellos está dado por la siguiente proposición debida a Kato (para su demostración vease [8]).

Proposición 3 (Desigualdad de Kato). *Sea $f \in H^s$, $s > 2$, $\Lambda = (1-\Delta^2)^{1/2}$ y M_f el operador de multiplicación por f. Entonces, para $|\tilde{t}|$, $|\tilde{s}| \le s-1$,*

$$\Lambda^{-\tilde{s}}\,[\Lambda^{\tilde{s}+\tilde{t}+1},\, M_f]\,\Lambda^{-\tilde{t}} \in B(L^2(\mathbb{R}^2))\,,$$

y

$$\left\| \Lambda^{-\tilde{s}}\,[\Lambda^{\tilde{s}+\tilde{t}+1},\, M_f]\,\Lambda^{-\tilde{t}} \right\|_{B(L^2(\mathbb{R}^2))} \le c\,\|\nabla f\|_{H^{s-1}}\,. \tag{4}$$

Proposición 4 (Desigualdad de Kato–Ponce). *Sean $s > 0$, $1 < p < \infty$, $\Lambda = (1-\Delta^2)^{1/2}$ y M_f el operador de multiplicación por f. Entonces,*

$$|[\Lambda^s,\, M_f]\,g|_p \le c\,\left(|\nabla f|_\infty\, |\Lambda^{s-1}\,g\,|_p + |\Lambda^s f|_p\, |g|_\infty \right)\,, \tag{5}$$

para toda $f, g \in \mathcal{S}$

Corolario 5. *Para* $f, g \in \mathcal{S}$*,*

$$|f\,g|_{s,p} \leq c\,\left(|f|_\infty\,|\Lambda^s\,g|_p + |\Lambda^s\,f|_p\,|g|_\infty\right)\,.$$

La siguiente proposición es un resultado conocido y útil en la demostración del buen planteamiento global de muchos problemas de Cauchy asociados a ecuaciones diferenciales que aparecen en el contexto de la física.

Proposición 6. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función continua acotada tal que* $\partial_x f$ *existe y es continua y acotada. Entonces, si* $A = f\partial_x$*,*

$$\langle A(u),\, u\rangle_0 \geq -\frac{1}{2}\,|f|_\infty\,\|u\|_0^2\,, \tag{6}$$

para cada $u \in D(A)$*, y* $A + \lambda$ *es sobreyectivo, para todo* $\lambda > \frac{1}{2}|f|_\infty$*.*

En particular, $A \in G(L^2(\mathbb{R}^2), 1, \frac{1}{2}|f|_\infty)$ *(véase la sección anterior).*

Demostración. La desigualdad (6) se sigue inmediatamente después de hacer integración por partes. Veamos que si $\lambda > \frac{1}{2}|f|_\infty$, entonces $A+\lambda$ es sobreyectivo. Supongamos que ψ es tal que $\langle(A+\lambda)(u), \psi\rangle_0 = 0$, para toda $u \in D(A)$. Por lo tanto, $\psi \in D(A^*) \subseteq D(A)$. De (6) se sigue que

$$0 \geq \langle(A+\lambda)(\psi),\, \psi\rangle_0 \geq \left(\lambda - \frac{1}{2}\,|f|_\infty\right)\,\|\psi\|_0^2\,.$$

Luego, $\psi = 0$ y, por lo tanto, $A + \lambda$ es sobreyectivo. ■

3 Teoría local

En esta sección examinamos el buen plantemiento del problema de Cauchy (1).

3.1 Buen planteamiento en H^s

Teorema 7. *Sea* $s > 2$ *y* $p \in \mathbb{N}$*. Para* $\phi \in H^s(\mathbb{R}^2)$*, existe* $T > 0$*, que depende solamente de* $\|\phi\|_s$*, y una única*

$$u \in C([0,\,T],\,H^s(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0,\,T],\,H^{s-2}(\mathbb{R}^2))\,,$$

solución del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u_t + \mathcal{H}\,\partial_x^2 u + \mathcal{H}\,\partial_y^2 u + u^p\,u_x &= 0\,, \\ u(0) &= \phi\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Además, la tranformación $\phi \mapsto u$ *de* H^s *en* $C([0,T], H^s)$ *es continua.*

Demostración. En este caso, u es solución de (7) si y sólo si $v(t) = e^{t\mathcal{H}\Delta} u(t)$ es solución de

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} + A(t,\, v)\, v &= 0\,, \\ v(0) &= \phi\,, \end{aligned} \tag{8}$$

donde

$$A(t,\, v) = e^{t\mathcal{H}\Delta}\,(e^{-t\mathcal{H}\Delta}\, v)^p\, \partial_x e^{-t\mathcal{H}\Delta}\,.$$

Veamos que para este problema se satisfacen cada una de las condiciones del teorema de Kato (Teorema 2). Por lo pronto, sean $X = L^2(\mathbb{R}^2)$ y $Y = H^s(\mathbb{R}^2)$, para $s > 2$. Es claro que $S = (1-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ es un isomorfismo entre X y Y. En los siguientes lemas verificaremos que el problema (8) satisface las condiciones (A_1)–(A_4) que aparecen en la Sección 2.1.2.

Lema 8. $A(t,v) \in G(X, 1, \beta(v))$, *con* $\beta(v) = \frac{1}{2}\sup_t \|\partial_x (e^{t\mathcal{H}\Delta} v)^p\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ *(véase la condición* (A_1) *en la Sección 2.1.2).*

Demostración. Ya que $\{e^{-t\mathcal{H}\Delta}\}$ es un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios, y gracias a la observación que hicimos luego de establecer la condición (A_1) en la Sección 2.1.2, a partir de la Proposición 6 se sigue este lema. ■

Lema 9. *Si* $S = (1-\Delta)^{s/2}$, *entonces*

$$S\,A(t,\, v)\, S^{-1} = A(t,\, v) + B(t,\, v)\,,$$

donde $B(t,v)$ *es un operador acotado* L^2, *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *y* $v \in H^s$, *y satisface las desigualdades*

$$\|B(t,\, v)\|_{B(X)} \leq \lambda(v)\,, \tag{9}$$

$$\|B(t,\, v) - B(t,\, v')\|_{B(X)} \leq \mu(v,\, v')\, \|v' - v\|_s\,, \tag{10}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, *y todo* $v, v' \in H^s$, *con* $\lambda(v) = \sup_t C_s \|\nabla(e^{-t\mathcal{H}\Delta}v)^p\|_{s-1}$ *y* $\mu(v, v') = C_{p,s}(\|v\|_s^{p-1} + \|v'\|_s^{p-1})$.

Demostración. A partir de la Proposición 3 se sigue que $[S, (e^{-t\mathcal{H}\Delta}v)^p]\partial_x S^{-1} \in B(X)$ y

$$\|[S,\, (e^{-t\mathcal{H}\Delta}\, v)^p]\, \partial_x S^{-1}\|_{B(X)} \leq C_s\, \|\nabla(e^{-t\mathcal{H}\Delta}\, v)^p\|_{s-1}\,.$$

Por lo tanto, $B(t, v) \in B(X)$ y satisface (9).

Al proceder como antes y teniendo en cuenta que

$$\|v^p - w^p\|_s \leq C_{p,s}\, (\|u\|_s^{p-1} + \|v\|_s^{p-1})\, \|u - v\|_s^p\,,$$

para todo $u, v \in H^s$, se muestra (10). ■

Lema 10. $H^s(\mathbb{R}^2) \subset D(A(t, v))$ *y* $A(t, v)$ *es un operador acotado de* $Y = H^s(\mathbb{R}^2)$ *en* $X = L^2(\mathbb{R}^2)$ *con*

$$\|A(t,\, v)\|_{B(X,Y)} \leq \lambda(v)\,,$$

para todo $v \in Y$, *donde* λ *es como en el Lema 9. Además, la función* $t \mapsto A(t, v)$ *es fuertemente continua de* $\mathbb{R}$ *en* $B(Y, X)$, *para cada* $v \in H^s$. *Por otro lado, la función* $v \mapsto A(t, v)$ *satisface la siguiente condición de Lipschitz*

$$\|A(t,\, v) - A(t,\, v')\|_{B(Y,X)} \leq \mu(v,\, v')\, \|v - v'\|_X\,,$$

donde μ *es como en el lema anterior.*

Demostración. Puesto que $e^{-t\mathcal{H}\Delta} = (e^{t\mathcal{H}\Delta})^{-1}$ es unitario en $X = L^2(\mathbb{R}^2)$, de la definición de $A(t, v)$ se sigue $H^s(\mathbb{R}^2) \subset D(A(t, v))$. De hecho,

$$\begin{aligned} \|A(t,\, v)\, f\|_0 &= \|(e^{-t\mathcal{H}\Delta}\, v)^p\, \partial_x\, e^{t\mathcal{H}\Delta}\, f\|_0 \\ &\leq C_s \|(e^{-t\mathcal{H}\Delta}\, v)^p\|_s \|\, \partial_x f\|_0 \leq \lambda(v)\|f\|_s\,, \end{aligned}$$

para toda $f \in Y$.

Ahora, para todo $t, t' \in \mathbb{R}$ y toda $f, v \in Y$, tenemos

$$
\begin{aligned}
&\|A(t,\,v)f - A(t',\,v)\,f\|_0 \\
&\qquad\qquad \le \left\| \left(e^{t\mathcal{H}\Delta} - e^{t'\mathcal{H}\Delta}\right) (e^{-t\mathcal{H}\Delta}\,v)^p\,\partial_x(e^{t\mathcal{H}\Delta}\,f)\right\|_0 \\
&\qquad\qquad\quad + \left\| \left((e^{-t\mathcal{H}\Delta}\,v)^p - (e^{-t'\mathcal{H}\Delta}\,v)^p\right)\,\partial_x(e^{t\mathcal{H}\Delta}\,f)\right\|_0 \\
&\qquad\qquad\quad + \|(e^{-t'\mathcal{H}\Delta}\,v)^p\,\partial_x(e^{t\mathcal{H}\Delta} - e^{t'\mathcal{H}\Delta})\,f\|_0\,.
\end{aligned}
$$

Como el grupo $\{e^{-t\mathcal{H}\Delta}\}_{t\in\mathbb{R}}$ es fuertemente continuo y la función $v \to v^p$ de Y en sí mismo es continua, $t \mapsto A(t,v)$ es fuertemente continua de $\mathbb{R}$ en $B(Y,X)$.

Finalmente, para cualquier $t \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|A(t,\,v')\,f - A(t,\,v)\,f\|_0 &\le \|(e^{t\mathcal{H}\Delta}\,v')^p - (e^{t\mathcal{H}\Delta}\,v)^p\|_0\|\,\partial_x e^{t\mathcal{H}\Delta}\,f\|_\infty \\
&\le C_p(\|(e^{t\mathcal{H}\Delta}\,v)^{p-1}\,\|_\infty \\
&\qquad + \|(e^{t\mathcal{H}\Delta}\,v')^{p-1}\|_\infty)\,\|f\|_s\,\|v'-v\|_0 \\
&\le \mu(v,\,v')\,\|v'-v\|_0\,\|f\|_s\,.
\end{aligned}
$$

Esto termina la demostración del lema. ■

Los lemas inmediatamente anteriores muestran que el problema (8) satisface las condiciones del Teorema 2 y, por lo tanto, para cada $\phi \in H^s$, $s > 2$, existen $T > 0$, que depende de $\|\phi\|_s$, y una única $v \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^2) \bigcap C^1([0,T],\,H^{s-1}(\mathbb{R}^2))$ solución del problema (8). Además, la aplicación $\phi \mapsto v$ es continua de $H^s(\mathbb{R}^2)$ en $C([0,T], H^s(\mathbb{R}^2)$. Ahora bien, de las propiedades del grupo $Q(t) = e^{-t\mathcal{H}\Delta}$ se puede verificar que $u(t) = Q(t)v(t)$ es solución de (7) y satisface las propiedades enunciadas en el Teorema 7. ■

Teorema 11. *El tiempo de existencia para* (7) *se puede elegir independiente de s en el siguiente sentido: si $u \in C([0,T], H^s)$ es la solución de* (7) *con $u(0) = \phi \in H^r$, para algún $r > s$, entonces, $u \in C([0,T], H^r)$. En particular, si $\phi \in H^\infty$, $u \in C([0,T], H^\infty)$.*

Demostración. La demostración de este resultado es esencialmente la misma de la parte (*c*) del Teorema 1 en [9]. Esbozaremos brevemente esta. Sean $r > s$, $u \in C([0,T], H^s)$ solución de (7) y $v = e^{t\mathcal{H}\Delta}u$. Supongamos que $r \le s+1$. Si aplicamos ∂_x^2 en ambos lados de la ecuación diferencial en (8), llegamos a la siguiente ecuación de evolución lineal para $w(t) = \partial_x^2 v(t)$,

$$\frac{dw}{dt} + A(t)\,w + B(t)\,w = f(t)\,, \tag{11}$$

donde

$$\begin{aligned} A(t) &= \partial_x e^{t\mathcal{H}\Delta}\,(u(t))^p\,e^{-t\mathcal{H}\Delta}\,, & (12)\\ B(t) &= 2e^{t\mathcal{H}\Delta}\,[p(u(t))^{p-1}]\,u_x(t)e^{-t\mathcal{H}\Delta}\,, & (13)\\ f(t) &= -e^{t\mathcal{H}\Delta}\,[p\,(p-1)\,u^{p-2}(t)]\,[u_x(t)]^3\,. & (14) \end{aligned}$$

Puesto que $v \in C([0,T),H^s)$ se tiene que $w \in C([0,T);H^{s-2})$. Además, $w(0) = \phi_{xx} \in H^{r-2}$, ya que $\phi \in H^r$. Demostremos que $w \in C([0,T],H^{r-2})$. Para ésto demostraremos que el problema de Cauchy para la ecuación lineal (11) está bien planteado en $1-s \leq k \leq s-1$. En esta dirección tenemos el siguiente lema cuya demostración es completamente similar a la del lema 3.1 en [9].

Lema 12. *La familia $\{A(t)\}_{0\leq t\leq T}$ tiene una única familia de operadores de evolución $U(t,\tau)_{0\leq t\leq\tau\leq T}$ para los espacios $X = H^h$, $\quad Y = H^k$ (véase el Teorema 1), donde*

$$\begin{aligned} -s &\leq h \leq s-2\,,\\ 1-s &\leq k \leq s-1\,,\\ k+1 &\leq h\,. \end{aligned} \tag{15}$$

En particular, $U(t,\tau) : H^r \to H^r$ para $-s \leq r \leq s-1$.

Luego, a partir de la discusión que sigue al Teorema 1, w satisface la ecuación

$$w(t) = U(t,\,0)\,\phi_{xx} + \int_0^t U(t,\tau)\,[-B(\tau)\,w(\tau) + f(\tau)]\,d\tau\,. \tag{16}$$

Ahora bien, como $w(0) = \phi_{xx} \in H^{r-2}$, f, dada por (14), está en $C([0,T],H^{s-1}) \subset C([0,T],H^{r-2})$ (si $r \leq s+1$) y $B(t)$, dada en (13), es una familia de operadores en $\mathcal{B}(H^{r-2})$ que es fuertemente continua para t en el intervalo $[0,T]$ (si $r \leq s+1$), del Lema 12, la solución de (16) está en $C([0,T],H^{r-2})$ ((16) es una ecuación integral de tipo Volterra en H^{r-2}, la cual se puede resolver por aproximaciones sucesivas), en otras palabras, $\partial_x^2 u \in C([0,T],H^{r-2})$.

Si $w_1(t) = \partial_x\partial_y v(t)$, tenemos que

$$\frac{dw_1}{dt} + A(t)\,w_1 + B_1(t)\,w_1 = f_1(t)\,, \tag{17}$$

donde

$$\begin{aligned} B_1(t) &= e^{t\mathcal{H}\Delta}\,[p(u(t))^{p-1}]\,u_x(t)\,e^{-t\mathcal{H}\Delta} = \frac{1}{2}\,B(t)\,, && (18)\\ f_1(t) &= -e^{t\mathcal{H}\Delta}\,((p\,(p-1)\,u^{p-2}(t)\,[u_x(t)]^2 + p(u(t))^{p-1} \\ &\quad \times\ u_{xx}(t))\,u_y(t))\,. && (19) \end{aligned}$$

Como antes, tenemos que

$$w_1(t) = U(t,\,0)\,\phi_{xy} + \int_0^t U(t,\,\tau)\,[-B_1(\tau)\,w_1(\tau) + f_1(\tau)]\,d\tau\,. \tag{20}$$

Ya que $u_{xx} \in C([0,T],H^{r-2})$, $f_1 \in C([0,T],H^{r-2})$. Dado que, además, $B_1(t) \in \mathcal{B}(H^{r-2})$ es fuertemente continua en el intervalo $[0,T]$, argumentando como antes, tenemos que $w_1 \in C([0,T],H^{r-2})$ o, equivalentemente,

$$u_{xy} \in C([0,\,T],\,H^{r-2})\,.$$

Análogamente, si $w_2(t) = \partial_y^2 v(t)$, tenemos que

$$\frac{dw_2}{dt} + A(t)\,w_2 = f_2(t)\,, \tag{21}$$

donde

$$\begin{aligned} f_2(t) &= -e^{t\mathcal{H}\Delta}\,((p\,(p-1)\,u^{p-2}(t)\,u_x(t)\,u_y(t) \\ &\quad +2\,p(u(t))^{p-1}\,u_{xy}(t))\,u_y(t))\,. && (22) \end{aligned}$$

Luego

$$w_2(t) = U(t,\,0)\,\phi_{yy} + \int_0^t U(t,\,\tau)\,f_2(\tau)\,d\tau\,. \tag{23}$$

Ya que $u_{xy} \in C([0,T],H^{r-2})$, $f_2 \in C([0,T],H^{r-2})$. Repitiendo el argumento anterior, podemos concluir que $w_1 \in C([0,T], H^{r-2})$ o, equivalentemente, $\partial_y^2 u \in C([0,T], H^{r-2})$

Luego, hemos demostrado que si $s < r \leq s+1$ y $\phi \in H^r$, $u \in C([0,T], H^r)$. Para el caso $r > s+1$, dado que $\phi \in H^{s'}$, para $s' < r$, usando una y otra vez lo que hemos demostrado hasta ahora, se llega a que $u \in C([0,T], H^r)$. ■

4 Comportamiento asintótico de soluciones con dato inicial pequeño

En esta sección mostraremos que la solución es global si tomamos un dato lo suficientemente pequeño, en un sentido que precisaremos. También mostraremos que la solución, en un tiempo suficientemente grande, se comporta como la solución de la ecuación lineal asociada. A éstas últimas se les suele llamar los *estados de dispersión de la onda* (*scattering states* en inglés).

4.1 Solución global para dato pequeño

Para $\phi \in H^s(\mathbb{R}^2)$ en la sección 3 denotamos por $P(-t)\phi$ la solución del problema lineal asociado a la ecuación (7), es decir, si $u(t) = P(-t)\phi$, u satisface la ecuación

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{H}\,\partial_x^u + \mathcal{H}\,\partial_y^u = 0\,.$$

Si $\phi \in \mathcal{S}$ entonces

$$\begin{aligned} P(-t)\,\phi(x,\,y) &= \frac{1}{2\pi}\int e^{i(\mathrm{sgn}(\eta)\,(\xi^2+\eta^2)\,t+x\,\xi+y\,\eta)}\,\widehat{\phi}(\xi,\,\eta)\,d\xi\,d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi}\,I(t)\,*\,\phi(x,\,y)\,, \end{aligned}$$

donde $I(t) = (e^{i\mathrm{sgn}(\eta)(\xi^2+\eta^2)t})^{\vee}$

Lema 13. *Para $x, y, t \neq 0$ números reales cualesquiera,*

$$I(t)(x,\,y) = \frac{c}{t}\,e^{-\frac{i}{4t}(x^+y^2)}\int_{\frac{y}{\sqrt{t}}}^{\infty} e^{\frac{i}{4}s^2}\,ds + \frac{\bar{c}}{t}\,e^{\frac{i}{4t}(x^+y^2)}\int_{\frac{y}{\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\frac{i}{4}s^2}\,ds\,,$$

donde $c = (1+i)/2$.

Demostración. Es claro que

$$\begin{aligned}
2\,\pi\, I(1)(x,\,y) &= \int_{\mathbb{R}}\int_0^{\infty} e^{i\,(\xi^2+\eta^2+x\,\xi+y\,\eta)}\,d\xi\,d\eta \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{0} e^{i(-\xi^2-\eta^2+x\,\xi+y\,\eta)}\,d\xi\,d\eta \\
&= e^{-\frac{i}{4}\,(x^2+y^2)}\int_{\mathbb{R}} e^{i\,(\eta+y/2)^2}\,d\eta\int_0^{\infty} e^{i\,(\xi+x/2)^2}\,d\xi \\
&\quad + e^{\frac{i}{4}\,(x^2+y^2)}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\,(\eta-y/2)^2}\,d\eta\int_{-\infty}^{0} e^{-i\,(\xi-x/2)^2}\,d\xi\,.
\end{aligned}$$

Un simple cambio de variable demuestra el teorema para $t=1$. Usando la propiedad de homogeneidad de la transformada de Fourier se sigue el teorema para cualquier $t \neq 0$. ■

El lema anterior implica la siguiente estimativa $L^p - L^q$ para el grupo $P(t)$.

Proposición 14. *Para cualquier $f \in L^1 \bigcap L^2$, se tiene que*

$$|P(-t)\,f|_{\frac{2}{1-\theta}} \leq c\,|t|^{-\theta}\,|f|_{\frac{2}{1+\theta}}\,,$$

para $\theta \in [0,1]$

Demostración. El resultado lo obtenemos aplicando la desigualdad de Young para la convolución, el lema anterior e interpolación. ■

Del lema de encaje de Sobolev se obtiene la siguiente proposición.

Proposición 15. *Para $s>1$ y $f \in L^1 \bigcap H^s$, tenemos que*

$$|P(-t)f|_\infty \leq c(1+|t|)^{-1}(|f|_1 + \|f\|_s)\,.$$

Ahora estamos en condiciones de demostrar el siguiente teorema.

Teorema 16. *Sean $p \geq 3$ y $s>3$. Entonces, existe $\delta>0$ y $R=R(\delta)>0$ tal que si $\phi \in L^1_1 \bigcap H^s$ satisface*

$$|\phi|_{1,1} + \|\phi\|_s < \delta\,,$$

entonces la solución u de (7) está en $C_b(\mathbb{R}, H^s)$ y satisface

$$\sup_{t\in R}(1+|t|)\,|u(t)|_{1,\infty}\leq R\,. \tag{24}$$

Demostración. Para la demostración necesitamos el siguiente lema, cuya demostración se puede encontrar en [12] (Lema 3.0.52).

Lema 17. *Para $t\geq 0$, sea*

$$J(t)=(1+t)\int_0^t\frac{1}{(1+t-\tau)(1+\tau)^{p-1}}\,d\tau\,.$$

Entonces,

1. $J(t)=O(1)$ *cuando* $t\to\infty$*, si* $p\geq 3$*.*

2. $J(t)\to\infty$ *cuando* $t\to\infty$*, si* $p=1,2$*.*

Veamos primero que

$$\|u(t)\|_s\leq\|\phi\|_s\,\exp\left(c\int_0^t|u_x|_\infty\,|u|_\infty^{p-1}\,d\tau\right)\,. \tag{25}$$

Haciendo el producto interno en H^s por u en ambos lados de la ecuación llegamos a que

$$\frac{d}{dt}\|u\|_s^2=-2\,\langle u,u^pu_x\rangle_s\,.$$

En virtud de la desigualdad de Kato–Ponce y su corolario (Corolario 5), obtenemos

$$\frac{d}{dt}\|u\|_s^2\leq C\,|u|_\infty^{p-1}\,\|u\|_s^2\,.$$

La desigualdad (25) se sigue de esta última y de la desigualdad de Gronwall. Ahora, en virtud de (25), es suficiente demostrar (24). En efecto, a partir de las hipótesis, tenemos que

$$\int_0^t|u_x|_\infty\,|u|_\infty^{p-1}\,d\tau\leq\int_0^t|u|_{1,\infty}^p\,d\tau\leq R^p\int_0^t(1+|\tau|)^{-p}\,d\tau\leq C\,.$$

Entonces demostremos (24). Tomemos $T \in (0, T_s)$ y sea

$$K(T) = \sup_{t \in [0,T]} (1 + |t|)|u(t)|_{1,\infty} .$$

A partir de la Proposición 15, el Lema 17, (25) y la ecuación integral

$$u(t) = P(t)\,\phi - \int_0^t P(t - t')\,(u^p\, u_x)(t')\,dt' . \tag{26}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
(1+t)\,|u(t)|_{1,\infty} &\leq c\,\delta \\
&\quad + c\,(1+t) \int_0^t (1+t-\tau)^{-1}\,|u(\tau)|_\infty^{p-1}\,\|u(\tau)\|_s^2\,d\tau \\
&\leq c\,\delta + c\,\delta^2\,K(T)^{p-1}\,e^{c\,K(t)^p} ,
\end{aligned}$$

para $t \in [0, T]$.

Elegimos $\delta > 0$ suficientemente pequeño, tal que la función $x \mapsto c\delta + c\delta^2 x^{p-1} e^{cx^p} - x$, tiene un cero positivo. Sea $R = R(\delta)$ el primer cero positivo de esta función. Entonces, las estimativas anteriormente mostradas implican que $K(T) \leq R$. Del hecho de que el conjunto de soluciones es invariante bajo la transformación $(t, x, y) \to (-t, -x, -y)$ y haciendo uso de un argumento de extensión se obtiene el teorema. ∎

Como corolario se tiene el siguiente teorema.

Teorema 18. *Bajo las hipótesis del teorema anterior, existe* $\phi_\pm \in H^s$ *tal que*

$$\|u(t) - P(-t)\,\phi_\pm\|_r \to 0 ,$$

cuando $t \to \pm\infty$, *para* $r \in [s-1, s)$.

Demostración. Véase [12]. ∎

Referencias

[1] M. Ablowitz and J. Villarroel, *On the Kadomtsev–Petviashvili equation and associated constraints*, Stud. Appl. Math. **85**, 195 (1991).

[2] M. A. Ablowitz and P. A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, London Math. Soc. Lect. Notes Series **149** (Cambridge University Press, Cambridge, 1991)

[3] T. Benjamin, *Internal waves of permanent form in fluids of great depth*, J. Fluid Mech. **29**, 559 (1967).

[4] T. Cazenave and P.–L. Lions, *Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations*, Comm. Math. Phys. **85**, 549 (1982).

[5] R. J. Iório Jr., *KdV, BO and friends in weighted Sobolev Spaces, functional analytic methods for partial differential equations*, Lect. Notes Math. **1450**, 105 (Springer, 1990).

[6] R. J. Iório Jr., *The Benjamin–Ono equation in weighted Sobolev spaces,* J. Math. Anal. Appl. **157**, 577 (*1991*).

[7] R. J. Iório Jr. and W. V. L. Nunes, *On the equations of KP–type*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh A **128**, 725 (1998).

[8] T. Kato, *Quasi–linear equations of evolution with applications to partial differential equations*, Lect. Notes Math. **448**, 27 (Springer, 1975).

[9] T. Kato, *On the Korteweg–de Vries equation*, Manuscrita Math. **28**, 89 (1979).

[10] C. Kenig and K. Koenig, *On the local well–posedness of the Benjamin–Ono and modified Benjamin–Ono equations*, Math. Res. Lett. **10**, 879 (2003).

[11] H. Koch and N. Tzvetkov, *On the local well–posedness of the Benjamin–Ono equation in $H^s(\mathbb{R})$*, IMRN **26**, 1449 (2003).

[12] A. Milanés, *On some bidimensional versions of the generalized Benjamin–Ono equation*, Ph.D. Thesis (IMPA, Rio de Janeiro, 2002).

[13] Y. Matsuno, *Bilinear Transformation Method*, Math. Sci. Eng. **174** (Academic Press, New York, 1984).

[14] G. Ponce, *On the global well–posedness of the Benjamin–Ono equation*, Diff. Int. Eq. **4**, 527 (1991).

[15] F. H. Soriano, *On the Cauchy problem for a KP–Boussinesq–type system*, J. Diff. Eq. **183**, 79 (2002).

[16] T. Tao, *Global well–posedness for the Benjamin–Ono equation in $H^1(\mathbb{R})$*, J. Hyperbolic Diff. Eq. **1**, 27 (2004).