Espacios de lazos infinitos[1]

Angélica M. Osorno[2]

Department of Mathematics
University of Chicago
Chicago, Illinois

Estas notas son una presentación básica de la teoría de espacios de lazos infinitos. Contiene introducciones a las nociones de operads, Γ–espacios, y espacios E_n, las cuales son herramientas básicas de la topología algebraica moderna.

Palabras claves: espacios de lazos iterados, espacios de lazos infinitos, espacios E_n, teorías de cogomología generalizadas.

In these notes we present the basic theory of infinite loop spaces. We include introductions to the notions of operads, Γ–spaces and E_n spaces, which are basic tools in modern algebraic topology.

Keywords: iterated loop spaces, infinite loop spaces, E_n spacs, generalized cohomology theories.

MSC: 55P48, 55D35, 55B20, 18D10.

[1] Estas notas están basadas en las tres charlas que dio la autora durante el *Encuentro de Matemáticas* 2011, organizado por el Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá, como parte de la celebración de los 60 años de la Carrera de Matemáticas. La autora agradece a los organizadores por la invitación, y al público por su atención.

[2] `aosorno@math.uchicago.edu`

Introducción

La teoría de espacios de lazos infinitos es parte fundamental de la topología algebraica. Su estudio comenzó a mediados de los años 1960 y fue en los años 1970, con artculos como [3] y [9], que se empezó a entender su estructura. Los espacios de lazos infinitos están íntimamente relacionados con las teorías de cohomología, como lo explicamos en §3.1.

Por otro lado, los espacios de lazos infinitos son el comienzo del estudio de la teoría de homotopía estable, que se ocupa de los fenómenos que son invariantes al aplicar el funtor suspensión. Los espectros, que son los objetos de estudio en la teoría estable, están intrínsecamente relacionados con los espacios de lazos infinitos.

La principal fuente para estas notas es el libro *Infinite Loop Spaces* de Frank Adams [1]. Este libro es básicamente una radiografía del estado de la teoría de espacios de lazos infinitos en 1978. El libro está escrito como una buena introducción para los no expertos en el área, y es por eso que recomendamos su lectura a quienes, después de leer estas notas, deseen aprender más sobre el tema.

1 Charla I: Grupos topológicos y espacios de lazos

Definición 1.1. *Un* grupo topológico (G, m, e, i) *es un espacio topológico G, junto con un punto $e \in G$ llamado unidad, y funciones continuas*

$$\begin{aligned} m: &\quad G \times G \to G\,, \\ i: &\quad G \to G\,, \end{aligned}$$

llamadas función multiplicación y función inverso, respectivamente. Estas funciones deben satisfacer que para todo $a, b, c \in G$,

1. $m(a, m(b, c)) = m(m(a, b), c)$;

2. $m(a, e) = a = m(e, a)$;

3. $m(a, i(a)) = e = m(i(a), a)$.

Esto quiere decir que G es un grupo en el cual las funciones de multiplicación e inverso son continuas.

Ejemplos 1.2. *Los siguientes son algunos ejemplos de grupos topológicos.*

- *Cualquier grupo G con la topología discreta;*
- *los números reales,* $(\mathbb{R}, +, 0)$*; en general, cualquiera de los espacios vectoriales* $\mathbb{R}^n$*,* $\mathbb{C}^n$*;*
- *los grupos lineales* $GL_n(\mathbb{R})$ *y* $GL_n(\mathbb{C})$*;*
- *subgrupos de los grupos lineales, como por ejemplo* $O(n)$*,* $SO(n)$*,* $U(n)$*,* $SU(n)$*.*

Cuando trabajamos en topología algebraica nos interesan las relaciones salvo homotopía,. Entonces, si queremos relajar la definición de grupo topológico, debemos relajar las condiciones de la definición 1.1. Así surge la siguiente definición.

Definición 1.3. *Un H*–espacio (X, e, μ) *es un espacio puntuado* (X, e) *junto con un mapeo continuo*

$$\mu : X \times X \to X \,,$$

tal que los mapeos

$$\begin{aligned} X &\to X \\ x &\mapsto \mu(x,\, e)\,, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} X &\to X \\ x &\mapsto \mu(e, x)\,, \end{aligned}$$

son homotópicos a la identidad.

Un H–espacio es homotópicamente asociativo *si existe una homotopía*

$$h : X^3 \times I \to X \,,$$

tal que $h(x, y, z; 0) = \mu(\mu(x, y), z)$ *y* $h(x, y, z; 1) = \mu(x, \mu(y, z))$*. Es decir, la asociatividad se cumple salvo homotopía.*

Nótese que la homotopía h es entre las dos maneras de multiplicar tres elementos del grupo. No hemos puesto ninguna condición sobre la existencia de inversos.

Ejemplo 1.4. *Espacios de lazos. Sea* (Y, y) *un espacio puntuado. Consideramos el espacio de lazos* ΩY*, definido como el conjunto* $Map_*(S^1, Y)$*, es decir, el conjunto de mapeos puntuados del círculo al espacio* Y*. A este conjunto se le da la topología compacta abierta. Los puntos de este espacio son lazos en* Y *que comienzan y terminan en el punto* y*.*

Éste es un espacio puntuado, con el lazo constante $S^1 \mapsto y$ *como el punto base. Para la definición de la multiplicación, consideramos el círculo como el intervalo* $[0, 1]$ *con los puntos* 0 *y* 1 *identificados e iguales al punto base. La multiplicación es definida por concatenación de lazos, es decir que para* $f, g \in \Omega Y$*,*

$$\mu(f, g)(t) = \begin{cases} f(2t) & si\ 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ g(2t-1) & si\ \frac{1}{2} \leq t < 1. \end{cases}$$

Esta multiplicación no es estrictamente unitaria ni estrictamente asociativa, pero sí lo es salvo homotopía. Es decir, ΩY *es un* H*–espacio homotópicamente asociativo. Es más, este espacio tiene inversos salvo homotopía, ya que podemos recorrer el lazo en dirección contraria para obtener un inverso.*

Nótese que si X es un H–espacio homotópicamente asociativo, entonces el conjunto de componentes conexas $\pi_0(X)$ es un semi–grupo (es decir un conjunto con multiplicación asociativa y unitaria, pero sin inversos necesariamente). Decimos que un H–espacio es *group-like* si $\pi_0(X)$ es un grupo.

Por construcción, $\pi_0(\Omega Y) \cong \pi_1(Y, y)$, es decir, ΩY es *group-like.* De hecho, existe una fibración $\Omega Y \to PY \to Y$, donde $PY = Map_*(I, Y)$, es decir, es el espacio de caminos en Y que comienzan en y. Este espacio es contráctil. Usando este dato en la sucesión exacta larga para la fibración, obtenemos que para todo $i \geq 0$, $\pi_i(\Omega Y) \cong \pi_{i+1}(Y)$.

1.1 Espacios clasificantes

Una de las construcciones más importantes para un grupo topológico G, es la de su espacio clasificante BG. Hay varias maneras de construir el espacio clasificante de un grupo topológico, por ejemplo [6, Ch. 16, §5]. Las diferentes construcciones dan espacios no necesariamente homeomorfos, pero sí homotópicamente equivalentes. De hecho, la construcción incluye también un espacio EG, contráctil y con acción libre de G, y un mapeo

$$\begin{array}{c} EG \\ \downarrow \\ BG \end{array}$$

que hace de EG el espacio total de un G–fibrado principal sobre BG con fibra G. Este es el G–fibrado principal *universal.* Lo que esto quiere decir es que salvo isomorfismo, cualquier G–fibrado principal sobre un espacio X se puede construir como el pullback

$$\begin{tikzcd} f^*(EG) \arrow[r] \arrow[d] & EG \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"'] & BG \end{tikzcd}$$

Esta asignación da una correspondencia biyectiva entre las clases de isomorfismo de G–fibrados principales sobre X y $[X_+, BG]$, es decir el conjunto de clases de homotopía de mapeos puntuados de X con un punto base disjunto a BG.

Tenemos entonces una fibración $G \to EG \to BG$, la cual nos da una sucesión exacta larga de grupos de homotopía

$$\cdots \to \pi_{i+1}(BG) \to \pi_i(G) \to \pi_i(EG) \to \pi_i(BG) \to \cdots ,$$

y como EG es contráctil, esto implica que para todo $i \geq 0$, $\pi_i(G) \cong \pi_{i+1}(BG)$.

Usando la construcción del espacio BG, o su propiedad universal, se puede construir un mapeo $G \to \Omega BG$, el cual de hecho es un mapeo de fibraciones

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r] \arrow[d] & \Omega(BG) \arrow[d] \\
EG \arrow[r] \arrow[d] & P(BG) \arrow[d] \\
BG \arrow[r, no head] & BG
\end{tikzcd}$$

Esto, junto con las sucesiones largas exactas de las fibraciones, implica que el mapeo $G \to \Omega BG$ es una equivalencia homotópica débil (es decir, un mapeo que genera isomorfismos en todos los grupos de homotopía).

Este resultado dice que en cierta manera el funtor B es inverso al funtor Ω. Surge entonces la pregunta, ¿qué condiciones debemos exigir en un espacio X para poder construir su espacio clasificante con propiedades parecidas a las de BG?

La respuesta es los espacios A_∞, de los cuales hablaremos en la siguiente sección.

1.2 Espacios A_∞

Antes de dar la definición precisa de espacio A_∞, daremos la idea intuitiva.

Un espacio A_∞ es un H–espacio que es asociativo salvo todas las posibles homotopías.

Sea X un H–espacio. Para mejorar la notación, escribiremos xy en vez de $\mu(x, y)$ para la multiplicación. Como mencionamos anteriormente, decir que X es asociativo salvo homotopía, significa que existe una homotopía $h : X^3 \times I \to X$:

$$\begin{tikzcd}
X \times X \times X \arrow[r, "\mu \times id"] \arrow[d, "id \times \mu"'] & X \times X \arrow[d, "\mu"] \\
X \times X \arrow[r, "\mu"'] & X
\end{tikzcd}$$

Para cada tripla de puntos (x, y, z) en X, esta homotopía da un camino entre $(xy)z$ y $x(yz)$.

Si miramos los productos cuádruples, hay cinco maneras de asociarlos, y la homotopía h proporciona caminos entre algunos de ellos:

$$\begin{tikzcd}
 & & (wx)(yz) \arrow[drr] & & \\
((wx)y)z \arrow[urr] \arrow[dr] & & & & w(x(yz)) \\
 & (w(xy))z \arrow[rr] & & w((xy)z) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Esto quiere decir que hay dos homotopías entre $((wx)y)z$ y $w(x(yz))$. Para un espacio A_∞ vamos a exigir que éstas sean homotópicas, es decir, que exista una homotopía $X^4 \times I^2 \to X$ entre ellas dos, la cual conecta los dos caminos del pentágono.

Luego continuamos mirando los productos quíntuples, vamos a pedir la existencia de una homotopía $X^5 \times I^3 \to X$ entre homotopías, y así sucesivamente. La definición de espacio A_∞ de Stasheff [10] hace preciso este proceso.

La idea es construir complejos celulares K_i para todo $i \geq 2$, tal que K_i es homeomorfo a I^{i-2}, con subdivisiones de la frontera que conectan a K_i con K_{i-1}. Por ejemplo, K_3 es un intervalo. La frontera de K_4 es un pentágono, donde cada lado se considera como una copia de K_3.

Un espacio A_∞ es un espacio X, junto con mapeos

$$M_i : K_i \times X^i \to X\,,$$

para todo $i \geq 2$, que satisfacen ciertas condiciones de coherencia con respecto a la frontera.

Nótese que el mapeo correspondiente a $i = 2$, provee a X de una multiplicación, ya que K_2 es un punto, y el mapeo correspondiente a $i = 3$ está codificando la homotopía de asociatividad. La idea crucial de Stasheff es poder codificar combinatóricamente todas las homotopías altas, y además demostrar que esta definición es un sustituto adecuado para un espacio con multiplicación estrictamente asociativa. Este es el sentido del siguiente resultado, el cual está implícito en [10].

Teorema 1.5. *Sea X un H–espacio tal que $\pi_0(X)$ es un grupo. Existe un espacio Y tal que X es homotópico a ΩY si y sólo si X es un espacio A_∞.*

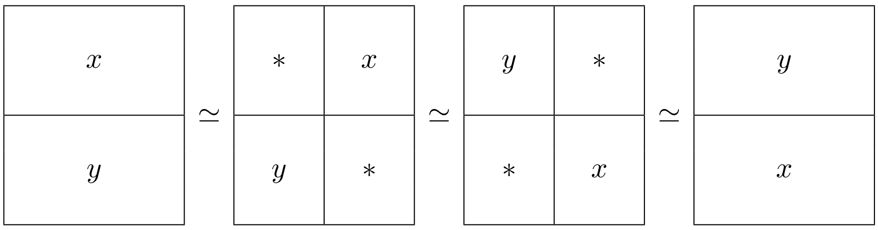
De hecho, la construcción del espacio Y es similar a la de BG para un grupo topológico G.

2 Charla II: Espacios de lazos iterados

Sea Y un espacio puntuado. Como dijimos anteriormente, el espacio ΩY también es puntuado, así podemos considerar $\Omega^2 Y := \Omega\Omega Y$, es decir el espacio de lazos dobles de Y. Nótese que este espacio también lo podemos definir como $Map_*(S^2, Y)$.

En la sección anterior dimos condiciones necesarias y suficientes para que un espacio sea homotópico a un espacio de lazos. Ahora podemos hacer la siguiente pregunta: ¿es posible determinar cuándo un espacio es homotópico a un espacio de lazos dobles?

Una condición evidentemente necesaria es que sea un espacio A_∞. Notemos también que la multiplicación es homotópicamente conmutativa, es decir, existe una homotopía entre los mapeos $(f, g) \mapsto fg$ y $(f, g) \mapsto gf$. Para ver esto, primero usamos la adjunción de $Map_*(-, -)$ y el producto smash $(- \wedge -)$, para identificar $\Omega^2 Y$ con $Map_*(S^2, Y)$. Para $f, g \in \Omega^2 Y$ tenemos la siguiente secuencia de homotopías:



Entonces, volviendo a la pregunta de cómo identificar si un H–espacio X es homotópico a un espacio de lazos dobles, sabemos que es necesario que sea un espacio A_∞, homotópicamente conmutativo, y tal que $\pi_0 X$ es un grupo. Después de haber estudiado el caso de los espacios de lazos, es de esperar que esto no sea suficiente. La respuesta es que necesitamos homotopías de coherencia, pero no todas las posibles.

Una posible estrategia es construir los complejos K_n como en el caso de los espacios de lazos, pero este sería un trabajo muy dispendioso, principalmente porque hasta el momento no sabemos cuáles son las homotopías necesarias. En lugar de construir los complejos directamente, construiremos una maquinaria que construirá los complejos por nosotros. Esta maquinaria es la de los *operads*. Esta maquinaria va a resultar extremadamente útil cuando queramos generalizar a los espacios de lazos iterados, $\Omega^n Y$, para $n \geq 1$.

La definición de operad fue dada por Peter May en [3], precisamente para responder la pregunta que nos concierne en esta sección. Por cuestiones de espacio no podemos incluir acá todas las condiciones de coherencia. Estas pueden ser encontradas en la fuente original, o también en las notas [7]. Para un tratamiento más informal y dirigido a un público más amplio, invitamos al lector a leer el artículo de divulgación [11].

Definición 2.1. *Un* operad $\mathcal{C}$ *consiste de la siguiente información:*

1. *para cada número entero $j \geq 0$, un espacio topológico $\mathcal{C}(j)$, tal que $\mathcal{C}(0) = *$,*
2. *funciones continuas*
$$\gamma : \mathcal{C}(k) \times \mathcal{C}(j_1) \times \mathcal{C}(j_2) \times \cdots \times \mathcal{C}(j_k) \longrightarrow \mathcal{C}(j)$$
donde $j = j_1 + \cdots j_k$,
3. *un elemento neutro $1 \in \mathcal{C}(1)$,*
4. *para todo $j \geq 1$, una acción del grupo simétrico Σ_j sobre el espacio $\mathcal{C}(j)$.*

Estos datos deben satisfacer ciertas relaciones de coherencia y equivariancia [7].

La idea intuitiva es que los espacios $\mathcal{C}(j)$ son parámetros para operaciones j–arias, es decir operaciones de j elementos, y los mapeos γ indican cómo componer operaciones. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.2. Asoc*, el operad de asociatividad. El espacio $Asoc(j)$ es el espacio discreto Σ_j, y el mapeo γ está determinado por las relaciones de equivariancia, y está dado por*

$$(\sigma; \tau_1, \cdots, \tau_k) \mapsto \tau_{\sigma(1)} \oplus \cdots \oplus \tau_{\sigma(k)}$$

Ejemplo 2.3. Conm*, el operad de conmutatividad. Para todo j, $Conm(j) = *$.*

Ejemplo 2.4. *$\mathcal{E}_X$, el operad de endomorfismos. Sea X un espacio puntuado, y $\mathcal{E}_X(j) = Map_*(X^j, X)$. Para $f \in \mathcal{E}_X(k)$, $g_i \in \mathcal{E}_X(j_i)$, $\gamma(f; g_1, \cdots, g_k)$ está dado por la composición*

$$X^j \cong \prod_{i=1}^{k} X^{j_i} \xrightarrow{\prod g_i} X^k \xrightarrow{f} X\,.$$

El elemento neutro corresponde a la identidad en $\mathcal{E}_X(1) = Map_*(X, X)$. La acción de Σ_j sobre $\mathcal{E}_X(j)$ está dada por la acción sobre X^j que permuta las entradas.

Definición 2.5. *Un* morfismo de operads *$\psi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, consiste de una colección de mapeos equivariantes $\psi_j : \mathcal{C}(j) \to \mathcal{C}'(j)$, tales que $\psi_1(1) = 1$ y el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(k) \times \mathcal{C}(j_1) \times \cdots \times \mathcal{C}(j_k) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\Pi\psi"'] & \mathcal{C}(j) \arrow[d, "\psi"] \\
\mathcal{C}'(k) \times \mathcal{C}'(j_1) \times \cdots \times \mathcal{C}'(j_k) \arrow[r, "\gamma'"'] & \mathcal{C}'(j)
\end{tikzcd}$$

Definición 2.6. *Un espacio puntuado X es un* álgebra *sobre el operad $\mathcal{C}$, si existe un morfismo de operads $\theta : \mathcal{C} \to \mathcal{E}_X$.*

Si desempacamos esta definición, obtenemos mapeos $\theta_j : \mathcal{C}(j) \times X^j \to X$ para todo $j \geq 0$ que satisfacen ciertas relaciones de coherencia.

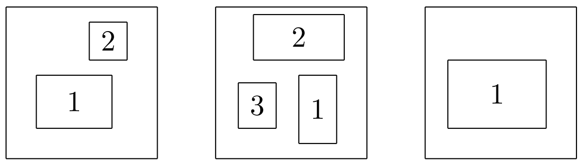
Ejemplos 2.7. *Un espacio es un álgebra sobre Asoc si y sólo si es un semi–grupo topológico. Por otro lado, un espacio es un álgebra sobre Conm si y sólo s es un semi–grupo topológico abeliano.*

Observación 2.8. *Es importante notar que esta maquinaria no contiene ninguna información sobre la existencia de inversos multiplicativos.*

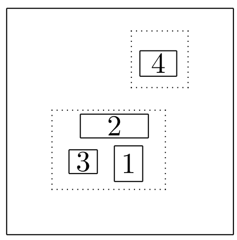
Teorema 2.9 (May [3])**.** *Para todo $n \geq 1$ existen operads $\mathcal{C}_n$ tales que:*

- *para todo espacio puntuado Y, el espacio de lazos iterados $\Omega^n Y$ es un álgebra sobre $\mathcal{C}_n$;*
- *si X es un álgebra sobre $\mathcal{C}_n$ tal que $\pi_0 X$ es un grupo, entonces existe un espacio puntuado Y tal que X es homotópicamente equivalente a $\Omega^n Y$.*

El operad $\mathcal{C}_n$ se conoce como el operad de los n–cubitos (*little n–cubes operad* en inglés). El espacio $\mathcal{C}_n(j)$ es el espacio de configuraciones de j n–cubos marcados encajados es un n–cubo fijo, de tal manera que las caras de los n–cubitos son paralelas a las del gran cubo. La acción de Σ_j está dada por permutaciones de las marcas de los cubos. El mapeo γ consiste en encajar los n–cubos correspondientes a los puntos en $\mathcal{C}_n(j_i)$ en el n–cubo en $\mathcal{C}_n(k)$ con la marca i. Lo ilustramos con un ejemplo para $n = 2$. La siguiente figura representa un punto en $\mathcal{C}_2(2) \times \mathcal{C}_2(3) \times \mathcal{C}_2(1)$:



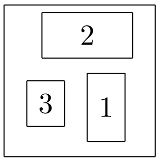
Su imagen es el siguiente punto en $\mathcal{C}_2(4)$. Las líneas punteadas no hacen parte de los datos del punto.



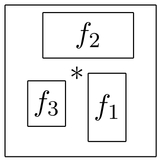
Para todo j, el espacio $\mathcal{C}_n(j)$ es $(n-2)$–conexo, es decir, los grupos de homotopía son 0 para todo $i \leq n-2$. Este hecho refleja la existencia de las altas coherencias de asociatividad y conmutatividad.

Es importante notar que hay un morfismo de operads $\mathcal{C}_n \to \mathcal{C}_{n+1}$, dado por la inclusión de los n–cubos como $(n+1)$–cubos con la última coordenada fija.

La idea de la demostración del teorema es la siguiente. Para todo j, debemos construir mapeos $\theta_j : \mathcal{C}_n(j) \times (\Omega^n Y)^j \to \Omega^n Y$. Recordemos que $\Omega^n Y = Map_*(S^n, Y)$. El mapeo θ_n le asigna a cada configuración de cubos y mapeos $f_i : S^n \to Y$, el mapeo correspondiente a realizar el mapeo f_i en el cubito con marca i, como podemos ver en la figura. Para realizar esta operación debemos recordar que la n–esfera es homeomorfa a un n–cubo con su frontera identificada en un punto.



$, (f_1, f_2, f_3) \longmapsto$



Para probar el converso, usamos la estructura que nos proporciona la acción del operad para construir un espacio B^nX, con un mapeo $X \to \Omega^n B^n X$, el cual es una equivalencia homotópica si y sólo si $\pi_0 X$ es un grupo.

3 Charla III: Espacios de lazos infinitos

Como vimos en la sección anterior, los espacios de lazos iterados $\Omega^n Y$ son H–espacios homotópicamente asociativos y homotópicamente conmutativos, y a medida que aumenta n, el espacio tiene cada vez más homotopías de coherencia. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 3.1. *Un espacio X es un* espacio de lazos infinitos *si existe una sucesión de espacios $X = X_0, X_1, \cdots$, y equivalencias débiles*

$$X_n \xrightarrow{\simeq} \Omega X_{n+1}.$$

Ejemplo 3.2. *Espacios de Eilenberg–MacLane. Dado un grupo abeliano π y un entero positivo n, existe un espacio conexo $K(\pi, n)$, el cual es determinado en forma única, salvo homotopía, por la siguiente condición:*

$$\pi_i(K(\pi, n)) = \begin{cases} 0 & si\ i \neq n \\ \pi & si\ i = n. \end{cases}$$

Este espacio se conoce como espacio de Eilenberg–MacLane para el grupo π. Ya que en general $\pi_{i+1}(X) \cong \pi_i(\Omega X)$, obtenemos equivalencias débiles entre $K(\pi, n)$ y $\Omega K(\pi, n+1)$. Se deduce entonces que todo espacio de Eilenberg–MacLane es un espacio de lazos infinitos, con sucesión dada por $K(\pi, n), K(\pi, n+1), \cdots$.

Ejemplo 3.3. *El espacio clasificante de la K–teoría, $\mathbb{Z} \times BU$. Sea $U(n)$ el grupo unitario en n dimensiones. Existen inclusiones $U(n) \to U(n+1)$, dadas por*

$$A \longmapsto \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

Sea $U = \bigcup_n U(n)$. Este es un grupo topológico, y por lo tanto podemos construir su espacio clasificante, BU. El espacio $\mathbb{Z} \times BU$ se obtiene al tomar el producto de una cantidad numerable de copias de BU, enumeradas por los números enteros.

Como se demuestra en [6, Ch. 24], el espacio $\mathbb{Z} \times BU$ clasifica la K–teoría topológica de un espacio, en el sentido de que para cierta familia de espacios,

$$K(X) \cong [X_+, \mathbb{Z} \times BU],$$

donde $K(X)$ denota las clases de equivalencia de fibrados vectoriales complejos sobre X.

El teorema de periodicidad de Bott (ver [6, Ch. 24 §2]) implica que existe una equivalencia débil $\mathbb{Z} \times BU \simeq \Omega^2(\mathbb{Z} \times BU)$, demostrando entonces que $\mathbb{Z} \times BU$ es un espacio de lazos infinitos.

3.1 Relación con teorías de cohomología

Definición 3.4. *Una* teoría de cohomologa generalizada (reducida) *es una colección de funtores contravariantes*

$$E^n : Top_* \longrightarrow GpAb,$$

definidos para todo entero n, los cuales satisfacen los siguientes axiomas:

- *Exactitud: si $f : A \to X$ es una cofibración, entonces la sucesión*

  $$E^n(X/A) \to E^n(X) \to E^n(A)$$

  es exacta.

- *Suspensión: para todo n existe un isomorfismo natural*

  $$E^n(X) \xrightarrow{\cong} E^{n+1}(\Sigma X),$$

  donde ΣX denota la suspensión $S^1 \times X/(S^1 \times \{*\} \cup \{*\} \times X)$.

- *Aditividad: si $X = \bigvee_i X_i$, entonces $E^*(X) \to \prod E^*(X_i)$ es un isomorfismo.*

- *Equivalencia: si $f : X \to Y$ es una equivalencia débil, entonces el mapeo inducido*
$$f^* : E^*(Y) \to E^*(X)\,,$$
es un isomorfismo.

Observación 3.5. *Los axiomas descritos son exactamente los axiomas con los que se define $\widetilde{H}^*(-;\pi)$ con excepción del axioma de dimensión.*

Ejemplos 3.6. *Como podemos ver en la observación anterior, el ejemplo clásico es la cohomología reducida con coeficientes en un grupo abeliano π. Otros ejemplos clásicos son la K–teoría reducida, y cobordismo.*

Las teorías de cohomología generalizadas son herramientas bastante usadas en topología algebraica, ya que nos dan invariantes algebraicos de los espacios topológicos. Estas teorías de cohomología están íntimamente relacionadas con los espacios de lazos infinitos. Esta relación es fruto del Teorema de Representabilidad de Brown [2].

Dada una teoría de cohomología generalizada E^*, existe una sucesión de espacios X_n tales que para todo espacio Y, $E^n(Y) \cong [Y, X_n]$. Luego, usando el axioma de suspensión de E^*, se puede demostrar que $X_n \sim \Omega X_{n+1}$, obteniendo así un espacio de lazos infinitos $X = X_0$.

Conversamente, si X es un espacio de lazos infinitos, con sucesión $X_0, X_1, \cdots$, se puede definir una teoría de cohomología
$$E^n(Y) = \begin{cases} [Y, X_n] & \text{si } n \geq 0 \\ [\Sigma^{-n}Y, X_0] & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Veamos ahora que la cohomología ordinaria $\widetilde{H}^*(-;\pi)$, está representada por el espacio de lazos infinitos dado por los espacios de Eilenberg–MacLane $K(\pi,0), K(\pi,1), \cdots$. Sea X el espacio de lazos infinitos que la representa. Tenemos entonces que
$$\widetilde{H}^n(S^k;\pi) = [S^k, X_n] = \pi_k(X_n)\,.$$
Entonces
$$\pi_k(X_n) = \begin{cases} \pi & \text{si } k = n; \\ 0 & \text{si } k \neq n. \end{cases}$$
Esto implica que el espacio X_n es homotópicamente equivalente al espacio de Eilenberg–MacLane $K(\pi, n)$.

Nótese que como las componentes de $K(\pi, 0)$ son todas contráctiles, la cohomología en dimensiones negativas es igual a 0.

3.2 Identificación de espacios de lazos infinitos

Ahora nos gustaría responder la siguiente pregunta: ¿Cómo sabemos si un espacio X es un espacio de lazos infinitos?

Para empezar, como $X = X_0 \sim \Omega X_1$, sabemos entonces que X debe ser un espacio A_∞. En general tenemos que $X \sim \Omega^n X_n$, es decir, X es un espacio E_n para todo $n \geq 1$. Entonces podríamos chequear las acciones de los operads $\mathcal{C}_n$ para todo n. En vez de hacer eso, vamos a definir un operad que reúna a todos los operads $\mathcal{C}_n$.

Como dijimos en la sección anterior, existen inclusiones de operads $\mathcal{C}_n \hookrightarrow \mathcal{C}_{n+1}$. Usando estas inclusiones, definimos

$$\mathcal{C}_\infty = \bigcup_n \mathcal{C}_n.$$

Nótese que para todo j, $\mathcal{C}_\infty(j)$ es contráctil y Σ_j actúa libremente. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 3.7. *Un operad $\mathcal{C}$ es un operad E_∞ si $\mathcal{C}(j)$ es contráctil, y la acción de Σ_j sobre $\mathcal{C}(j)$ es libre. Un espacio X es un espacio E_∞ si es un álgebra sobre un operad E_∞.*

Es decir, un operad es E_∞ si es equivalente como operad al operad $\mathcal{C}_\infty$.

Usando la misma idea de la sección anterior, tenemos el siguiente teorema [3].

Teorema 3.8. *Un espacio X es un espacio de lazos infinitos si y sólo si es un espacio E_∞ y $\pi_0 X$ es un grupo.*

3.3 Γ–espacios

Hay otra maquinaria que sirve para construir espacios de lazos infinitos. Esta fue definida por Segal en [9] con el propósito de construir espacios de lazos infinitos a partir de categorías simétricas monoidales.

Sea $\mathcal{F}$ la categoría de conjuntos finitos puntuados, y funciones que preservan el punto base. En particular, los objetos de esta categoría son los conjuntos $\mathbf{n}_+ = \{0, 1, \cdots, n\}$, con $n \geq 0$. En este conjunto, 0 es el punto base.

Para $1 \leq k \leq n$, definimos $i_k : \mathbf{n}_+ \to \mathbf{1}_+$ como:

$$i_k(j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \neq k \\ 1 & \text{si} \quad j = k. \end{cases}$$

Definición 3.9. *Un* Γ–espacio X *es un funtor* $X : \mathcal{F} \to Top_*$. *Decimos que* X *es* especial *si el mapeo*

$$p_n : X(\mathbf{n}_+) \to X(\mathbf{1}_+)^{\times n},$$

que se obtiene usando los mapeos i_k*, es una equivalencia débil para todo* $n \geq 0$.

Las condiciones en esta definición implican que el espacio $X(\mathbf{1}_+)$ tiene una multiplicación que es asociativa y conmutativa salvo todas las homotopías de coherencia:

Teorema 3.10. *[9, Prop. 1.4]*

Sea X *un* Γ*–espacio especial. Entonces* $X(\mathbf{1}_+)$ *es un espacio de lazos infinitos al hacer la compleción de grupo.*

La multiplicación en $X(\mathbf{1}_+)$ se define usando la función $\mu : \mathbf{2}_+ \to \mathbf{1}_+$, definida como $\mu(0) = 0$, $\mu(1) = \mu(2) = 1$.

$$\begin{tikzcd} X(\mathbf{2}_+) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "X(\mu)"'] & X(\mathbf{1}_+) \times X(\mathbf{1}_+) \arrow[dl, dotted] \\ X(\mathbf{1}_+) & \end{tikzcd}$$

Las homotopías de coherencia son resultado de las relaciones entre los morfismos de $\mathcal{F}$. Otra manera de decir esto es que la categoría $\mathcal{F}$ modela todas las posibles coherencias de manera combinatórica.

3.4 Espacios de lazos infinitos asociados a categorías simétricas monoidales

Como dijimos anteriormente, la principal motivación de Segal en [9] era construir espacios de lazos infinitos a partir de categorías simétricas monoidales.

Para esto debemos considerar primero el funtor del espacio clasificante $B : Cat \to Top$. Este es un funtor que asigna a cada categoría $\mathcal{C}$ un espacio $B\mathcal{C}$, que preserva productos, y dada una transformación natural entre funtores F y G, asigna una homotopía entre los mapeos BF y BG. Para más detalles, referimos al lector a [8, §2].

Definición 3.11. *Una* categoría simétrica monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, l, r)$ *consiste de la siguiente informacin:*

- *una categoría* $\mathcal{C}$*;*
- *un funtor* $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$*;*
- *un objeto* I *de* $\mathcal{C}$*, llamado la* unidad*;*
- *isomorfismos naturales de:*

$$\begin{aligned}
&\textit{asociatividad } a : (x \otimes y) \otimes z \to x \otimes (y \otimes z,\\
&\textit{conmutatividad } c : x \otimes y \to y \otimes x,\\
&\textit{unidad izq } \ell : I \otimes y \to y,\\
&\textit{unidad der } r : x \otimes I \to x,
\end{aligned}$$

los cuales deben satisfacer las siguientes condiciones de coherencia:

$$\begin{tikzcd}
x \otimes y \arrow[rr, dash] \arrow[dr, "c"'] & & x \otimes y \\
& x \otimes y \arrow[ur, "c"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(x \otimes I) \otimes y \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "r\otimes id"'] & & x \otimes (I \otimes y) \arrow[dl, "id_x\otimes\ell"] \\
& x \otimes y &
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
& (w \otimes x) \otimes (y \otimes z) \arrow[dr, "a"] & \\
((w \otimes x) \otimes y) \otimes z \arrow[ur, "a"] \arrow[d, "a \otimes id"] & & w \otimes (x \otimes (y \otimes z)) \\
(w \otimes (x \otimes y)) \otimes z \arrow[rr, "a"'] & & w \otimes ((x \otimes y) \otimes z) \arrow[u, "id_a \otimes a"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& x \otimes (y \otimes z) \arrow[r, "c"] & (y \otimes z) \otimes x \arrow[dr, "a"] & \\
(x \otimes y) \otimes z \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, "c \otimes id_x"'] & & & x \otimes (z \otimes y) \\
& (y \otimes x) \otimes z \arrow[r, "a"'] & y \otimes (x \otimes z) \arrow[ur, "id_a \otimes c"'] &
\end{tikzcd}
$$

Ejemplos 3.12. *El principal ejemplo es Fin, la categoría de conjuntos finitos y funciones, con la unión disjunta como producto monoidal. Otros ejemplos incluyen $Vect_k$ y Mod_R, las categorías de espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo k, y módulos finitamente generados sobre un anillo R, respectivamente. En ambos casos el producto monoidal está dado por la suma directa.*

Nótese que como el funtor B preserva productos y asigna homotopías a las transformaciones naturales, dada una categoría simétrica monoidal $\mathcal{C}$, tenemos un producto

$$B\otimes : B\mathcal{C} \times B\mathcal{C} \to B\mathcal{C}\,,$$

el cual es asociativo, conmutativo y unitario, salvo homotopía. Aun más, sabemos que estas homotopías satisfacen ciertas coherencias. Surge entonces la pregunta: ¿tenemos todas las posibles coherencias? En otras palabras, ¿es $B\mathcal{C}$ un espacio E_∞?

La respuesta es afirmativa, y de hecho podemos usar cualquiera de las dos maquinarias (operads y Γ–espacios) para contestarla. En este artículo usaremos los Γ–espacios. Para ver cómo usar operads para contestar esta pregunta, referimos al lector a [4, §4].

La estrategia que vamos a resumir ahora está basada en [9, 5].

Sea $\mathcal{C}$ una categoría simétrica monoidal. Primero construimos una Γ–categora especial, es decir, un funtor $\widehat{\mathcal{C}} : \mathcal{F} \to Cat$, tal que $\widehat{\mathcal{C}}(\mathbf{n}_+)$ es equivalente a $\mathcal{C}^{\times n}$.

Al aplicar el funtor espacio clasificante, obtenemos el Γ–espacio especial $B\widehat{\mathcal{C}}$, con la propiedad que $B\widehat{\mathcal{C}}(\mathbf{1}_+)$ es homotópicamente equivalente a $B\mathcal{C}$.

El Teorema 3.10 implica entonces que $B\mathcal{C}$ es un espacio E_∞, cuya compleción de grupo es un espacio de lazos infinitos.

Ejemplos 3.13. *Cuando $\mathcal{C} = Fin$, la compleción de grupo de $BFin$ es conocido como el espectro esfera, uno de los objetos centrales en topología algebraica.*

Si tomamos la categoría $Vect_{\mathbb{C}}$, la compleción de grupo es $\mathbb{Z} \times BU$, es decir el espacio clasificante de la K–teoría topológica.

Finalmente, si tomamos Mod_R, el espacio de lazos infinitos que obtenemos es el espacio que define la K–teoría algebraica de R.

Referencias

[1] J. F. Adams, *Infinite loop spaces*, Ann. Math. Stud. **90** (Princeton University Press, Princeton, 1978).

[2] E. H. Brown Jr., *Cohomology theories*, Ann. Math. **75**(2), 467 (1962).

[3] J. P. May, *The geometry of iterated loop spaces*, Lect. Notes Math. **271** (Springer, Berlin, 1972).

[4] J. P. May, *E_∞ spaces, group completions, and permutative categories*, in *New Developments in Topology*, Proc. Symp. Algebraic Topology, Oxford 1972, London Math. Soc. Lecture Notes Ser. **11**, 61 (Cambridge University Press, London, 1974).

[5] J. P. May, *The spectra associated to permutative categories*, Topology **17**(3), 225 (1978).

[6] J. P. May, *A Concise Course in Algebraic Topology*, Chicago Lect. Math. (University of Chicago Press, Chicago, 1999).

[7] J. P. May, *Definitions: operads, algebras and modules*, in *Operads: Proceedings of Renaissance Conferences*, Hartford, CT/Luminy, 1995, Contemp. Math. **202**, 1 (Am. Math. Soc., Providence, 1997).

[8] G. Segal, *Classifying spaces and spectral sequences*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **34**, 105 (1968).

[9] G. Segal, *Categories and cohomology theories*, Topology **13**, 293 (1974).

[10] J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H–spaces. I, II*, Trans. Am. Math. Soc. **108**, 275, 293 (Am. Math. Soc., Providence, 1963).

[11] J. Stasheff, *What is ... an operad?*, Not. Am. Math. Soc. **51**(6), 630 (Am. Math. Soc., Providence, 2004).