Hipergráficas simples no mezcladas, complejos simpliciales escalonables y anillos de Stanley–Reisner

Roberto Cruz[1]

Instituto de Matemáticas
Universidad de Antioquia
Medellín

Enrique Reyes[2]

Departamento de Matemáticas
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
CINVESTAV
Ciudad de México

En este artículo daremos una introducción a los complejos simpliciales, los ideales monomiales y los anillos de Stanley–Reisner asociados a hipergráficas simples. En particular, estudiaremos las propiedades de ser: de Cohen–Macaulay, puro, no mezclado, secuencialmente de Cohen–Macaulay y las relaciones entre estas propiedades. Uno de los objetivos del artículo es dar una visión panorámica de los avances que se han obtenido en esta área.

Palabras claves: anillos de Stanley–Reisner, complejos simpliciales escalonables, anillos de Cohen–Macaulay, hipergráficas no mezcladas.

In this article we give an introduction to the simplicial convexes, the monomial ideals and Stanley–Reisner rings associated with clutters. In particular we study the properties: Cohen–macaulay, shellable, pure, unmixed, sequentially Cohen–Macaulay and the relations among these properties. On of the purposes of this article is to give a panoramic view of the progress done in this subject.

Keywords: Stanley–Reisner rings, shellable simplicial complex, Cohen–Macaulay rings, unmixed clutters.

MSC: 13F55, 05C65, 05C75.

[1] `rcruz@matematicas.udea.edu.co`
[2] `ereyes@math.cinvestav.mx`

1 Introducción

En este artículo estudiaremos una parte de lo que últimamente se ha llamado Álgebra Combinatoria. Uno de los objetivos de esta área es hacer un diccionario entre propiedades de objetos algebraicos y propiedades de objetos combinatorios. Nos centraremos en el estudio de complejos simpliciales, de ideales monomiales y de anillos de Stanley–Reisner asociados a hipergráficas simples.

En la sección 2 daremos algunas definiciones básicas sobre hipergráficas simples, tales como: cubrimientos mínimos, conjuntos estables, menores, apareamientos, propiedad de Köning y de empacamiento. En la sección 3 se establecerá la correspondencia entre una hipergráfica simple $\mathcal{C}$ y su ideal monomial $I_{\mathcal{C}}$. Se verá que el número de cubrimiento de $\mathcal{C}$ coincide con la altura de $I_{\mathcal{C}}$ y que la propiedad combinatoria de la hipergráfica de ser no mezclada es equivalente a la propiedad algebraica de su ideal monomial de ser no mezclado. También se dará una caracterización de cuándo una hipergráfica simple es no mezclada bajo la hipótesis de que la hipergráfica tenga un apareamiento perfecto de tipo König.

En la sección 4 estableceremos la correspondencia entre una hipergráfica simple $\mathcal{C}$ y el complejo simplicial de Stanley–Reisner de $I_{\mathcal{C}}$, denotado por $\Delta_{\mathcal{C}}$, que es un complejo simplicial sobre el mismo conjunto de vértices de $\mathcal{C}$ y cuyas caras son los conjuntos estables de la hipergráfica $\mathcal{C}$. En esta sección se presentan las principales caracterizaciones y condiciones para que un complejo simplicial sea escalonable; en particular se analizarán los casos en que $\mathcal{C}$ es totalmente balanceado o cordal, así como los casos en que $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de vértice libre o tiene un apareamiento perfecto de tipo König. En la sección 5 estudiaremos las condiciones para que el anillo de Stanley–Reisner $k[\Delta_{\mathcal{C}}]$ sea de Cohen–Macaulay. Además daremos las siguientes implicaciones

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{C}} \text{ es escalonable puro} \quad &\Rightarrow \quad k[\Delta_{\mathcal{C}}] \text{ es de Cohen–Macaulay} \\ &\Rightarrow \quad \mathcal{C} \text{ es no mezclada}\,. \end{aligned}$$

También se darán algunas condiciones para determinar cuándo las implicaciones recíprocass son ciertas. Finalmente se verá la relación que existe entre ser secuencialmente de Cohen–Macaulay y ser escalonable.

En la sección 6 estudiaremos el caso de gráficas, que son hipergráficas en las cuales cada una de las aristas tiene dos vértices. Un caso importante de las gráficas son las gráficas bipartitas; para este caso daremos algunas caracterizaciones para que el ideal monomial sea no mezclado y para que el anillo de Stanley–Reisner sea de Cohen–Macaulay.

Este artículo es autocontenido en cuanto a las definiciones que se utilizan; para hacer un estudio más profundo se pueden revisar los textos [3, 8, 9, 14, 16].

2 Algunas propiedades de hipergráficas simples

Una hipergráfica $\mathcal{C}$ consta de un conjunto de vértices $V(\mathcal{C}) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ y un conjunto $E(\mathcal{C})$ cuyos elementos son subconjuntos de $V(\mathcal{C})$. A los elementos de $E(\mathcal{C})$ se les llama aristas (de $\mathcal{C}$). Si ninguna de las aristas de $\mathcal{C}$ está contenida en otra decimos que $\mathcal{C}$ es una hipergráfica simple. En este trabajo asumiremos que $\mathcal{C}$ es una hipergráfica simple y que $E(\mathcal{C}) = \{e_1, \cdots, e_m\}$.

Un subconjunto C de $V(\mathcal{C})$ es llamado un cubrimiento por vértices de $\mathcal{C}$ si $e_i \cap C \neq \emptyset$ para toda arista e_i de $\mathcal{C}$. El cubrimiento por vértices C es minimal si no existe un subconjunto propio de C que sea un cubrimiento por vértices de $\mathcal{C}$. La cardinalidad de un cubrimiento por vértices mínimo (con respecto a la cardinalidad) de $\mathcal{C}$ es llamado el número de cubrimiento $\mathcal{C}$ y se denota por $\tau(\mathcal{C})$. Una hipergráfica simple $\mathcal{C}$ se dice no mezclada si todas los cubrimientos por vértices minimales de $\mathcal{C}$, tienen la misma cardinalidad, esto es, toda cubrimiento por vértices minimal es mínimo.

Un subconjunto F de $V(\mathcal{C})$ es llamado un conjunto estable, o independiente, si F no contiene ninguna arista de $\mathcal{C}$. Un conjunto estable F es maximal si no está contenido en otro conjunto estable. Si C es un cubrimiento por vértices de $\mathcal{C}$, entonces $C \cap e_i \neq \emptyset$; para cada arista e_i, esto implica que $V(\mathcal{C}) \setminus C$ no contiene ninguna arista y por lo tanto $V(\mathcal{C}) \setminus C$ es un conjunto estable; no es difícil ver que el recíproco también es cierto. Además, C es un cubrimiento por vértices minimal si y sólo si $V(\mathcal{C}) \setminus C$ es un conjunto estable maximal.

Dada la hipergráfica simple $\mathcal{C}$ y v un vértice de $\mathcal{C}$, denotaremos por $\mathcal{C} \setminus v$ a la hipergráfica simple obtenida al eliminar el vértice v, esto es, la hipergráfica cuyo conjunto de aristas es $\{e \in E(\mathcal{C}) | v \notin e\}$. Por $\mathcal{C}/v$ se denota la hipergráfica simple obtenida al contraer el vértice v. La familia de aristas de esta hipergráfica está formada por los conjuntos minimales de $\{e \setminus \{v\} \,| e \in E\mathcal{C}\}$. Una hipergráfica simple $\mathcal{C}'$ obtenida de $\mathcal{C}$ por la eliminación o contracción sucesiva de vértices es llamada menor de $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}'$ se obtiene solamente eliminando vértices en $\mathcal{C}$, se le llama d–menor, y si se obtiene solamente contrayendo vértices de $\mathcal{C}$ se le llama c–menor. Un vértice v de $\mathcal{C}$ es un vértice libre de $\mathcal{C}$ si v está contenido en exactamente una de las aristas de $\mathcal{C}$. Una hipergráfica simple $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de vértice libre si cada menor de $\mathcal{C}$ tiene un vértice libre.

Por otro lado, un conjunto de aristas disjuntas a pares se llama conjunto independiente de aristas, y un conjunto independiente de aristas se llama apareamiento perfecto si la unión de sus elementos es $V(\mathcal{C})$. La cardinalidad máxima de un conjunto independiente de aristas de $\mathcal{C}$ es llamado el número de independencia de $\mathcal{C}$ y se denota por $\beta(\mathcal{C})$. Una hipergráfica simple $\mathcal{C}$ satisface la propiedad de König si satisface que $\beta(\mathcal{C}) = \tau(\mathcal{C})$, mientras que $\mathcal{C}$ satisface la propiedad de empacamiento si $\mathcal{C}'$ es de König para todo menor $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$.

3 Hipergráficas simples no mezcladas y sus ideales monomiales

Sea $\mathcal{C}$ una hipergráfica simple cuyo conjunto de vértices es $V(\mathcal{C}) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ y sea $R = k[x_1, \cdots, x_n]$ el anillo de polinomios sobre k (un campo). El ideal monomial de $\mathcal{C}$, denotado por $I_{\mathcal{C}}$, es el ideal de R generado por los monomios $\prod_{x_i \in e} x_i = x_e$ tal que $e \in E(\mathcal{C})$. Si P es un ideal primo que contiene a $I_{\mathcal{C}}$ y no existe otro ideal primo contenido propiamente en P que contenga a $I_{\mathcal{C}}$, entonces decimos que P es un ideal primo minimal de $I_{\mathcal{C}}$. Observemos que si P es un primo minimal de $I_{\mathcal{C}}$, entonces P es un ideal generado por los elementos de un cubrimiento minimal de $\mathcal{C}$.

La altura de un ideal primo P en un anillo conmutativo R, es el supremo de las cardinalidades de las cadenas (con el orden de contención) de ideales primos tales que cada uno de sus elementos (de las cadenas) están propiamente contenidas en el siguiente elemento de la cadena. La altura de un ideal I es el ínfimo de las alturas de los ideales primos que contienen a I, y la denotaremos por $ht(I)$. La dimensión de R es el supremo de las alturas de los ideales primos de R. Por otro lado, como la altura de un ideal generado por variables es el número de estas variables, y los primos minimales de $I_{\mathcal{C}}$ están generados por cubrimientos de $\mathcal{C}$, entonces la altura de $I_{\mathcal{C}}$ es el número de cubrimiento de $\mathcal{C}$, esto es, $\tau(\mathcal{C}) =\mathrm{ht}(I_{\mathcal{C}})$.

Sea R un anillo conmutativo. Si $A \subset R$, entonces el ideal generado por A es la intersección de todos los ideales de R que contienen a A (que también es un ideal). Un ideal I de R se llama finitamente generado si existe un conjunto finito que genera a I. R se llama Noetheriano si todo ideal de R es finitamente generado. Un primo asociado de un ideal I sobre R (un anillo Noetheriano) es un ideal primo P, tal que R/I contiene un submódulo sobre R isomorfo a R/P. Además I se llama no mezclado si todos los primos asociados tienen la misma altura. Un ideal monomial libre de cuadrados (a los monomios generadores minimales no los divide ningún cuadrado) es la intersección de todos sus ideales primos minimales, entonces los ideales asociados de este ideal son exactamente sus primos minimales. Como $I_{\mathcal{C}}$ es un ideal monomial libre de cuadrados, entonces tenemos que $\mathcal{C}$ es no mezclada si y sólo si $I_{\mathcal{C}}$ es no mezclado.

Dada la hipergráfica simple $\mathcal{C}$, decimos que x_i es una variable libre de $I_{\mathcal{C}}$ si x_i sólo está presente en uno de los generadores minimales de $I_{\mathcal{C}}$. Notemos que una variable libre de $I_{\mathcal{C}}$ se corresponde con un vértice libre de $\mathcal{C}$.

Sea $R = k[x_1, \cdots, x_n]$ el anillo de polinomios en las variables $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ sobre el campo k y sea I un ideal de R. El ideal I' se denomina menor de I si existe un subconjunto $X' = \{x_{i_1}, \cdots, x_{i_r}, x_{j_1}, \cdots, x_{j_s}\}$ del conjunto de variables X tal que I' es un ideal propio de $R' = k[X \backslash X']$, obtenido a partir de un conjunto generador de I asignando $x_{i_k} = 0$ y $x_{j_\ell} = 1$ para todo k, ℓ. Un menor obtenido asignando a las variables solamente el valor 0 se denomina d–menor y un menor obtenido asignando a las variables solamente el valor 1 se denomina c–menor. Notemos que si $I_{\mathcal{C}}$ es el ideal asociado a la hipergráfica simple $\mathcal{C}$ los menores de $I_{\mathcal{C}}$ obtenidos al asignar $x_i = 0$ y $x_j = 1$ se corresponden con los menores de $\mathcal{C}$ obtenidos al eliminar el vértice x_i de $\mathcal{C}$ y al contraer el vértice x_j de $\mathcal{C}$ respectivamente.

Definición 3.1. *Un apareamiento perfecto de tipo König de $\mathcal{C}$ es un apareamiento perfecto $e_1, \cdots, e_g$ tal que $g = \tau(\mathcal{C})$.*

El siguiente teorema da una caracterización combinatoria de cuándo una hipergráfica simple es no mezclada, bajo la hipótesis de que la hipergáfica tenga un apareamiento perfecto de tipo König.

Teorema 3.2. [11] Sea $\mathcal{C}$ una hipergráfica simple con un apareamiento perfecto de tipo König $e_1, \cdots, e_g$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\mathcal{C}$ es no mezclada;

(b) para dos aristas cualesquiera $e \neq e'$ y para dos vértices cualesquiera diferentes $x \in e$, $y \in e'$, que están contenidos en una misma arista e_i, tenemos que $(e \setminus \{x\}) \cup (e' \setminus \{y\})$ contiene una arista.

En la sección 6 reformularemos el resultado anterior para el caso de una gráfica bipartita.

4 Complejos simpliciales y la propiedad de escalonabilidad

Un complejo simplicial Δ sobre el conjunto de vértices $V(\Delta) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ es una colección de subconjuntos de $V(\Delta)$, de tal forma que si $F \in \Delta$ y $F' \subset F$ entonces $F' \in \Delta$. Cada elemento $F \in \Delta$ se llama cara de Δ. La dimensión de la cara F es $|F| - 1$. Una careta es una cara maximal de Δ (con respecto a la inclusión). Un complejo simplicial Δ es llamado puro si todas las caretas de $\mathcal{C}$ tienen la misma cantidad de elementos.

Dado un complejo simplicial Δ y una cara σ, $\Delta \backslash \sigma$ es el complejo simplicial obtenido de Δ eliminando todas las caras que contienen a σ, $\mathtt{star}_{\Delta}(\sigma)$ es el complejo simplicial cuyas caretas son las caretas de Δ que contienen a σ y el enlace de σ es el complejo simplicial $\mathtt{link}_{\Delta}(\sigma) = \{F \in \Delta | \sigma \cap F = \emptyset, F \cup \sigma \in \Delta\}$.

Definición 4.1. *El complejo de Stanley–Reisner de $\mathcal{C}$, denotado por $\Delta_{\mathcal{C}}$, es el complejo simplicial cuyas caras son los conjuntos estables de $\mathcal{C}$.*

La definición anterior permite dar la siguiente biyección entre los complejos simpliciales y las hipergráficas simples

$$\varphi\colon \text{ hipergráficas simples} \longrightarrow \text{complejos simpliciales}\,,$$

dada por $\varphi(\mathcal{C}) = \Delta_{\mathcal{C}}$ y $\varphi^{-1}(\Delta)$ es la hipergráfica simple cuyas aristas son los subconjuntos minimales de $V(\Delta)$ que no son caras de Δ. Por otro lado, tenemos que σ es una careta de $\Delta_{\mathcal{C}}$ si y sólo si $\mathcal{C} \setminus \sigma$ es un cubrimiento minimal de $\mathcal{C}$; entonces, $\mathcal{C}$ es no mezclada si y sólo si $\Delta_{\mathcal{C}}$ es puro.

Por otro lado, también hay una biyección entre las hipergráficas simples y los ideales generados por monomios libres de cuadrados, a saber,

$$\delta\colon \text{ hipergráficas simples} \longrightarrow \text{ ideales monomiales libres de cuadrados}\,,$$

dado por $\delta(\mathcal{C}) = I_{\mathcal{C}}$ y $\delta^{-1}(I)$ es la hipergráfica simple cuyas aristas son los conjuntos de variables que tiene cada generador mínimo de I. Por lo tanto, tenemos una biyección entre ideales monomiales libres de cuadrado y complejos simpliciales, de tal forma que para cada Δ complejo simplicial le asociamos el ideal monomial (generado por monomios libres de cuadrados) $I_{\varphi^{-1}(\Delta)}$; a este ideal lo denotaremos por I_{Δ}.

Definición 4.2. *Un complejo simplicial es escalonable si el conjunto de las caretas de* Δ *pueden ser ordenadas* $F_1, \cdots, F_s$ *de tal forma que para todo* $1 \leq i < j \leq s$ *existe* $v \in F_j \backslash F_i$ *y* $\ell \in \{1, \cdots, j-1\}$ *con* $F_j \backslash F_\ell = \{v\}$. *En este caso a* $F_1, \cdots, F_s$ *lo llamaremos un escalonamiento de* Δ.

El concepto de escalonabilidad fue introducido originalmente para complejos simpliciales puros. La anterior definición de escalonabilidad para complejos simpliciales no puros fue introducida por Björner y Wachs [1]. Diremos entonces que un complejo es escalonable puro si es escalonable según la anterior definición y además sus caretas tienen la misma cardinalidad. En [15] Van Tuyl y Villarreal relacionan la escalonabilidad de las hipergráficas con la propiedad de vértice libre.

Teorema 4.3. [15] Si la hipergráfica simple $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de vértice libre, entonces $\Delta_{\mathcal{C}}$ es escalonable.

La matriz de incidencia de la hipergráfica simple $\mathcal{C}$, denotada por $A_{\mathcal{C}}$, es la matriz cuyos vectores columna son los vectores característicos de las aristas de $\mathcal{C}$. Un ciclo de $\mathcal{C}$ es una submatriz cuadrada de $A_{\mathcal{C}}$ que tiene exactamente dos 1 en cada columna y dos 1 en cada renglón. Una hipergráfica simple es totalmente balanceada si no tiene ciclos. En [13] Jahan y Zheng mostraron que una hipergráfica simple $\mathcal{C}$ es totalmente balanceada si y sólo si $\mathcal{C}$ satisface la propiedad de vértice libre. Usando este resultado y el teorema anterior obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.4. [15] Si $\mathcal{C}$ es una hipergráfica simple totalmente balanceada, entonces $\Delta_{\mathcal{C}}$ es escalonable.

La presencia de aristas con vértices libres en cada c–menor de una hipergráfica no mezclada con apareamiento perfecto de tipo König implica la escalonabilidad de esta hipergráfica:

Teorema 4.5. [11] Sea $\mathcal{C}$ una hipergráfica simple con apareamiento perfecto de tipo König $e_1, \cdots, e_g$. Si todos los c–menores de $\mathcal{C}$ tienen un vértice libre y $\mathcal{C}$ es no mezclada, entonces $\Delta_{\mathcal{C}}$ es escalonable puro.

En [11] se muestra que si una hipergráfica simple no mezclada sin ciclos de longitud 3 o 4 tiene un apareamiento perfecto de tipo König, entonces cada arista del apareamiento tiene un vértice libre. Una consecuencia de este hecho es la siguiente caracterización para la escalonabilidad de la hipergráficas no mezcladas con apareamiento perfecto de tipo König.

Teorema 4.6. [11] Sea $\mathcal{C}$ una hipergráfica simple no mezclada con apareamiento perfecto de tipo König $e_1 \cdots, e_g$. Si $\mathcal{C}$ no tiene ciclos de longitud 3 o 4, entonces $\Delta_{\mathcal{C}}$ es escalonable puro.

El siguiente resultado de Morey, Reyes y Villarreal [11] caracteriza la estructura de las aristas de una hipergráfica simple no mezclada con un apareamiento perfecto de tipo König que implica la escalonabilidad pura del complejo simplicial asociado a la hipergráfica.

Teorema 4.7. *Sea $\mathcal{C}$ una hipergráfica simple con un apareamiento perfecto de tipo König $e_1, \cdots, e_g$. Si para cualquier par de aristas f_1, f_2 de $\mathcal{C}$ y para cualquier arista e_i del apareamiento perfecto, se tiene que $f_1 \cap e_i \subset f_2 \cap e_i$ o que $f_2 \cap e_i \subset f_1 \cap e_i$, entonces $\Delta_{\mathcal{C}}$ es escalonable puro.*

La descomposición por vértices es una propiedad de los complejos simpliciales que implica la escalonabilidad. Este concepto fue introducido inicialmente para complejos simpliciales puros por Provan y Billera [12] y fue extendido para los complejos no puros por Björner y Wachs [1]. Un vértice x tal que ninguna careta de $\mathtt{link}_\Delta(x)$ es una careta de $\Delta \backslash x$ se denomina vértice de descomposición. Un complejo simplicial es descomponible por vértice si Δ es un simplejo, o existe un vértice de descomposición x tal que $\mathtt{link}_\Delta(x)$ y $\Delta \backslash x$ son descomponibles por vértice. Wachs [18] demostró que si x es un vértice de descomposición de Δ y los complejos $\mathtt{link}_\Delta(x)$ y $\Delta \backslash x$ son escalonables, entonces Δ es escalonable. Esto implica que un complejo simplicial descomponible por vértices es escalonable. Además, si Δ es escalonable entonces $\mathtt{link}_\Delta(\sigma)$ es escalonable para cualquier cara σ de Δ [2].

Woodrofe [19] extendió el concepto de vértice simplicial de una gráfica al caso de hipergráficas simples y definió las hipergráficas simples cordales.

Definición 4.8. *Un vértice x de $\mathcal{C}$ es simplicial si para dos aristas cualesquiera e_1, e_2 de $\mathcal{C}$ que contienen a x existe una tercera arista f tal que $f \subseteq (e_1 \cup e_2) \backslash \{x\}$.*

Definición 4.9. *Una hipergráfica simple es cordal si todo menor de $\mathcal{C}$ tiene un vértice simplicial.*

En [19], se generaliza la definición de cara de descomposición a los complejos simpliciales no puros. Una cara de descomposición de un complejo simplicial Δ es una cara tal que ninguna cara de $\mathtt{link}_\Delta(\sigma)$ es una careta de $\Delta \backslash \sigma$. Notemos que esta definición generaliza el concepto de vértice de descomposición. Esto permite probar que si σ es una cara de descomposición de Δ y los subcomplejos $\Delta \backslash \sigma$ and $\mathtt{link}_\Delta(\sigma)$ son escalonables, entonces Δ es escalonable. Además, si x es un vértice simplicial de una hipergráfica $\mathcal{C}$ y e es una arista de esta hipergráfica que contiene a x, entonces el subconjunto de vértices $\sigma = e \backslash \{x\}$ es una cara de descomposición del complejo simplicial $\Delta_{\mathcal{C}}$ asociado a $\mathcal{C}$. Lo anterior permite dar una caracterización de la escalonabilidad de las hipergráficas cordales.

Teorema 4.10. [19] Si $\mathcal{C}$ es una hipergráfica cordal, entonces $\Delta_{\mathcal{C}}$ es escalonable.

Es fácil comprobar que si $\Delta_{\mathcal{C}}$ es el complejo asociado a $\mathcal{C}$ y $\sigma \subset V(\mathcal{C})$ es un conjunto estable de $\mathcal{C}$, entonces el complejo simplicial asociado al menor $\mathcal{C}/\sigma$ es $\mathtt{link}_{\Delta_{\mathcal{C}}}(\sigma)$. Por otra parte, el complejo simplicial $\Delta_{\mathcal{C}} \backslash \sigma$ está asociado a la hipergráfica simple $\mathcal{C}^{\sigma}$ cuyas aristas son los subconjuntos minimales de $E(\mathcal{C}) \cup \sigma$, es decir, se agrega σ como una nueva arista y se toman los subcojuntos minimales respecto a la inclusión para que la hipergráfica resultante sea simple.

En [4] se establecen condiciones necesarias y suficientes para la escalonabilidad de las hipergráficas simples que contienen al menos un vértice simplicial.

Teorema 4.11. [4] Sea x un vértice simplicial de $\mathcal{C}$. Además, sea $\{e_1 \cdots, e_r\}$ el conjunto de las aristas (de $\mathcal{C}$) que contienen a x, $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}/x$ y $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}/\sigma_i$ donde $\sigma_i = e_i \backslash \{x\}$ para cada $i \in \{1, \cdots, r\}$. Entonces, la hipergráfica simple $\mathcal{C}$ es escalonable si y sólo si $\mathcal{C}_i$ es escalonable para cada $i \in \{0, 1, \cdots, r\}$.

Teorema 4.12. [4] Sea $\mathcal{C}$ una hipergráfica con un vértice simplicial x y sea $\sigma = e \backslash x$ una cara de descomposición donde e es una arista que contiene a x. Entonces, $\mathcal{C}$ es escalonable si y sólo si los hipergráficas $\mathcal{C}^{\sigma}$ y $\mathcal{C}/\sigma$ son escalonables.

5 Anillos de Stanley–Reisner y la propiedad de Cohen–Macaulay

Un anillo conmutativo R se llama local si tiene exactamente un ideal maximal. Si R es un anillo Noetheriano local, una R–sucesión regular es un conjunto $h_1, \cdots, h_s$ de elementos de R tales que $(h_1, \cdots, h_r) \neq R$ y h_i no es un divisor de cero de $R/(h_1, \cdots, h_{i-1})$. La longitud máxima de una R–sucesión regular se llama la profundidad de R y se denota por $\mathrm{depth}(R)$.

Definición 5.1. *Sea R un anillo local Noetheriano. R se dice de Cohen–Macaulay si* $\mathrm{depth}(R) = \dim(R)$*. Si R es un anillo Noetheriano, entonces R se dice de Cohen–Macaulay si para cada p ideal primo de R el anillo local R_p es de Cohen–Macaulay.*

Macaulay demostró que un ideal $I = (q_1, \cdots, q_r)$ de altura r en un anillo de polinomios (sobre un campo) es no mezclado. Además, Cohen lo demostró para anillos locales regulares. Lo anterior y la siguiente proposición son las razones del nombre de anillos de Cohen–Macaulay.

Proposición 5.2. [3] Un anillo Noetheriano R es de Cohen–Macaulay si y sólo si todo ideal I generado por $ht(I)$ elementos es no mezclado.

Definición 5.3. *Sea Δ un complejo simplicial cuyo conjunto de vértices es $V(\Delta) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ y sea k un campo. El anillo de Stanley–Reisner de Δ es la k–álgebra homogenea*

$$k[\Delta] = k[x_1, \cdots, x_n]/I_\Delta \,.$$

El siguiente resultado fue probado por Reisner y se puede ver como una consecuencia de un teorema de Hochster [3]. Este resultado es una interpretación homológica de que $k[\Delta]$ sea de Cohen–Macaulay; en este resultado $\tilde{\mathrm{H}}_i(\Delta, k)$ es la i–ésima homología reducida con valores en k.

Teorema 5.4. [3] Sea Δ un complejo y k un campo. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $k[\Delta]$ es de Cohen–Macaulay.

(b) $\tilde{\mathrm{H}}_i\,(\mathtt{link}_\Delta(F), k) = 0$ para todo $F \in \Delta$ y para todo $i < \dim(\mathtt{link}_\Delta(F))$.

El siguiente teorema relaciona las propiedades de Cohen–Macaulay, escalonabilidad y no mezclado. Una prueba de este resultado se puede ver en [3].

Teorema 5.5. *Sea $\mathcal{C}$ una hipergráfica simple y k un campo. Entonces, tenemos las siguientes implicaciones*

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{C}} \textit{ es escalonable puro } &\Rightarrow\ k[\Delta_{\mathcal{C}}] \textit{ es de Cohen–Macaulay} \\ &\Rightarrow\ \mathcal{C} \textit{ es no mezclada}\,. \end{aligned}$$

Bajo ciertas condiciones las implicaciones recíprocas del teorema anterior son ciertas, como se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 5.6. [11] Sea $\mathcal{C}$ una hipergráfica simple con la propiedad de König y sin ciclos de longitud 3 o 4. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\mathcal{C}$ es no mezclado;

(b) existe un apareamiento perfecto $e_1, \cdots, e_g$, $g = \mathrm{ht}(I_{\mathcal{C}})$, tal que e_i tiene un vértice libre, para todo i, y para dos aristas cualesquiera f_1, f_2 de $\mathcal{C}$ y para cualquier arista e_i del apareamiento perfecto, tenemos que $f_1 \cap e_i \subset f_2 \cap e_i$ o $f_2 \cap e_i \subset f_1 \cap e_i$;

(c) $k[\Delta_{\mathcal{C}}]$ es de Cohen–Macaulay;

(d) $\Delta_{\mathcal{C}}$ es un complejo simplicial escalonable puro.

Como se vió en los resultados anteriores, si $\Delta_{\mathcal{C}}$ es escalonable puro, entonces $k[\Delta_{\mathcal{C}}]$ es de Cohen–Macaulay y si $k[\Delta_{\mathcal{C}}]$ es de Cohen–Macaulay, entonces $\Delta_{\mathcal{C}}$ es puro. Para el caso de escalonabilidad no pura la propiedad que más se acerca es la propiedad de ser secuencialmente de Cohen–Macaulay.

Definición 5.7. *Sea $R = k[x_1, \cdots, x_n]$ un anillo de polinomios. Un módulo de tipo R graduado M se dice secuencialmente de Cohen–Macaulay si existe una filtración finita de módulos de tipo R graduados*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset\subset M_r = M\,,$$

tal que cada M_i/M_{i-1} es de Cohen–Macaulay y además

$$\dim(M_1/M_0) < \dim(M_2/M_1) < \cdots < \dim(M_r/M_{r-1})\,.$$

Teorema 5.8. [8] Sea Δ un complejo simplicial escalonable. Entonces, su anillo de Stanley–Reisner $k[\Delta]$ es secuencialemente de Cohen–Macaulay

6 Caso de gráficas

Una gráfica G es una hipergráfica simple cuyas aristas tienen cardinalidad 2. La gráfica G se llama bipartita si existe particiones $V_1 = \{x_1, \cdots, x_{s_1}\}$ y $V_2 = \{y_1, \cdots, y_{s_2}\}$ del conjunto de vértices de G de tal forma que si $e \in V(G)$, entonces $e \cap V_1 \neq \emptyset$ y $e \cap V_2 \neq \emptyset$. La vecindad de un vértice x es el conjunto $N_G(x) = \{y \in V(G) | \{x, y\} \in E(G)\}$. Usando el teorema 3.2 se obtiene la siguiente caracterización para gráficas bipartitas no mezcladas.

Proposición 6.1. [17] Sea G una gráfica bipartita. Entonces, G es no mezclada si y sólo si existe un apareamiento perfecto $e_1, \cdots, e_g$ tal que para dos aristas cualesquiera $e \neq e'$ y para dos vértices diferentes cualesquiera $x \in e$, $y \in e'$, contenidos en el mismo e_i, tenemos que $(e \setminus \{x\}) \cup (e' \setminus \{y\})$ es una arista.

Las siguientes proposiciones dan estructura a las gráficas cuyos complejos simpliciales son escalonables y relacionan la propiedad de que su anillo de Stanley–Reisner sea de Cohen–Macaulay con la propiedad de que sea secuencialmente de Cohen–Macaulay.

Proposición 6.2. [15] Sea G una gráfica tal que Δ_G es escalonable. Para todo vértice v de G, si $G_v = G \setminus (\{v\} \cap N_G(v)\}$, entonces Δ_{G_v} es escalonable.

Proposición 6.3. [8] $k[\Delta_G]$ es de Cohen–Macaulay si y sólo si $k[\Delta_G]$ es secuencialmente de Cohen–Macaulay y G es no mezclada.

Para el caso de gráficas bipartitas se obtiene el recíproco del teorema 5.8.

Teorema 6.4. [15] Sea G una gráfica bipartita. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $k[\Delta_G]$ es secuencialmente de Cohen–Macaulay;

(b) Δ_G es escalonable;

(c) Existen dos vertices adyacentes x_1 y x_2 tales que $\deg(x_1) = 1$, además para $i = 1, 2$ la subgráfica $G\setminus(\{x_i\}\cap N_G(x_i))$ es escalonable.

Corolario 6.5. [7] Si G es bipartita, entonces $k[\Delta_G]$ es de Cohen–Macaulay si y sólo si Δ_G es escalonable puro.

El siguiente criterio de Herzog y Hibi clasifica las gráficas bipartitas de Cohen–Macaulay.

Teorema 6.6. [10] G es una gráfica bipartita de Cohen–Macaulay si y sólo si $g = |V_1| = |V_2|$ y podemos ordenar los vértices de tal forma que:

(h_0) $\{x_i, y_i\} \in E(G)$ para $i = 1, \cdots, g$;

(h_1) si $\{x_i, y_j\} \in E(G)$, entonces $i \leq j$;

(h_2) si $\{x_i, y_j\}$ y $\{x_j, y_k\}$ están en $E(G)$ y $i < j < k$, entonces $\{x_i, y_k\} \in E(G)$.

Un ciclo es una subgráfica C de G en el cual $|N_C(x)| = 2$ para todo $x \in V(C)$. Entonces, un ciclo de una gráfica G es un ciclo de G como hipergráfica. Una cuerda de un ciclo C es una arista $e = \{x, y\} \in E(G)$ tal que $x, y \in V(C)$ pero $e \notin E(C)$. Otra familia interesante de gráficas son las cordales, que son aquellas en la que los únicos ciclos sin cuerda son los triángulos. Por un resultado de Dirac [6] una gráfica cordal H tiene un vértice x tal que si $a, b \in N_H(x)$, entonces $\{a, b\} \in E(H)$. Notemos que por la definición 4.8 el vértice x es un vértice simplicial de H. Por otro lado, un menor de H es una subgráfica de H que se obtiene eliminando vértices. Entonces, un menor de una gráfica cordal es cordal. De aqui que si H es cordal como gráfica, entonces es cordal como hipergráfica. Por lo tanto, como corolario del teorema 4.10 obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 6.7. [15] Si G es una gráfica cordal entonces Δ_G es escalonable.

Aplicando el concepto de vértice simplicial al caso de gráficas se obtienen las siguientes caracterizaciones para la escalonabilidad de gráficas que contienen vértices simpliciales como corolarios de los teoremas 4.11 y 4.12.

Proposición 6.8. [5] Sea x_1 un vértice simplicial de la gráfica G y sea $N_G(x_1) = \{x_2, \cdots, x_r\}$. Entonces, la gráfica G es escalonable si y sólo si la subgráfica $G_i = G \setminus (x_i \cup N_G(x_i))$ es escalonable para cada $i \in \{1, \cdots, r\}$.

Proposición 6.9. [4] Sea x un vértice simplicial de la gráfica G y sea $y \in N_G(x)$. Entonces, la gráfica G es escalonable si y sólo si las subgráficas $G \setminus (y \cup N_G(y))$ y $G \setminus y$ son escalonables.

Referencias

[1] A. Björner and M. Wachs, *Shellable nonpure complexes and posets. I*, Trans. Am. Math. Soc. **348**, 1299 (1996).

[2] A. Björner and M. Wachs, *Shellable nonpure complexes and posets. II*, Trans. Am. Math. Soc. **349**, 3945 (1996).

[3] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen–Macaulay Rings* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).

[4] I. D. Castrillón y R. Cruz, *Escalonabilidad de grafos e hipergrafos simples que contienen vértices simpliciales*, enviado a publicación (2011).

[5] R. Cruz y M. Estrada, *Vértices simpliciales y escalonabilidad de grafos*, Morfismos **12**(2), 17 (2008).

[6] G. A. Dirac, *On rigid circuit graphs*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **25**(1–2), 71 (1961).

[7] M. Estrada and R. H. Villarreal, *Cohen–Macaulay bipartite graphs*, Arch. Math. **68**, 124 (1997).

[8] I. Gitler and R. H. Villarreal, *Graphs, Rings and Polyhedral*, Texto Nivel Avanzado **35**, Aportaciones Matemáticas (Sociedad Matemática Mexicana, 2010).

[9] J. Herzog and T. Hibi, *Monomial ideals*, Graduate Texts in Mathematics **260** (Springer–Verlag, 2011).

[10] J. Herzog and T. Hibi, *Distributive lattices, bipartite graphs and Alexander duality*, J. Algebraic Combin. **22**, 289 (2005).

[11] S. Morey, E. Reyes and R. H. Villarreal, *Cohen–Macaulay, shellable and unmixed clutters with a perfect matching of König type*, J. Pure Appl. Alg. **212**, 1770 (2008).

[12] J. S. Provan and L. J. Billera, *Decompositions of simplicial complexes related to diameters of convex polyhedra*, Math. Oper. Res. **5**, 576 (1980).

[13] A. S. Jahan and X. Zheng, *Ideals with linear quotients*, J. Combin. Theory A **117**, 104 (2010).

[14] R. P. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, Progress in Mathematics **41** (Birkhäuser, Boston, 1996).

[15] A. Van Tuyl and R. H. Villarreal, *Shellable graphs and sequentially Cohen–Macaulay bipartite graphs*, J. Combin. Theory A **115**, 799 (2007).

[16] R. H. Villarreal, *Monomial Algebras*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics **238** (Marcel Dekker, New York, 2001).

[17] R. H. Villarreal, *Unmixed bipartite graphs*, Rev. Col. Mat. **41**, 393 (2007).

[18] M. L. Wachs, *Obstructions to shellability*, Discrete Comput. Geom. **22**, 95 (1999).

[19] R. Woodroofe, *Chordal and sequentially Cohen–Macaulay clutters*, preprint (2010). `math.CO/0911.4697v2`