NOCIONES DEL INFINITO EN FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA

NOTIONS ABOUT INFINITY IN MATHEMATICS EDUCATION STUDENTS

RONNYS JESÚS VICENT MILLÁN
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR, VENEZUELA
ronnys85@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0003-4108-5998

NELLY AMATISTA LEÓN GÓMEZ
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR, VENEZUELA
nellyleong@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0001-8500-1253

Fecha de recepción: 25 febrero 2018
Fecha de aceptación: 21 mayo 2018

RESUMEN

El estudio de la matemática, su enseñanza y aprendizaje transitan por una noción clave que permea muchos de sus conceptos, y que ha sido de interés en diversas áreas del conocimiento: el infinito. Parece intuitivo implicarlo en contextos incorpóreas, como el amor, Dios, la eternidad y otros. Estas ideas inciden en la concepción de los profesores de matemática, que los lleva a vincular el término con lo inacabado. La investigación se centra en interpretar las representaciones sobre el concepto en estudio de un grupo de bachilleres de la especialidad Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador-Instituto Pedagógico de Maturín "Antonio Lira Alcalá" (UPEL-IPMALA), en tanto que estas ideas circulan paralelamente con el concepto matemático. Primero exponemos la evolución histórica y la noción de infinito desde las ideas de Aristóteles y Cantor; además de ir entrelazando aspectos teóricos-históricos con investigaciones previas. La metodología se concilia desde el paradigma interpretativo, y el estudio es de tipo fenomenológico, que busca describir el significado de las concepciones y experiencias de estos bachilleres en torno a la noción de infinito. Para obtener la información, primero se siguió una pauta de investigación que direccionó interrogantes sobre las representaciones asociadas al infinito; luego se realizó un grupo focal para interactuar con los estudiantes y obtener sus impresiones de primera fuente. Los resultados de ambas sesiones de trabajo se han vinculado, y se destacan los siguientes: a) prevalece la concepción potencial de infinito, b) principalmente relacionan el infinito a lo muy grande, c) hay un amplio margen en identificar lo intangible e incierto con el término, sobre todo en la creación literaria, d) ningún reconocimiento explícito al infinito actual, e) en lo pedagógico se observa que tal concepto pasa desapercibido como estudio formal, lo que pudiera estar ocasionando los errores epistemológicos alrededor del concepto.

PALABRAS CLAVE: Infinito; concepciones; formación; profesor de matemática.

ABSTRACT

The study of mathematics, its teaching and learning go through a key notion that permeates many of its concepts, and that has been of interest in various areas of knowledge: the infinite. It seems intuitive to imply it in incorporeal contexts, such as love, God, eternity and others. These ideas affect the conception of mathematics teachers, which leads them to link the term with the unfinished. The research focuses on interpreting the representations about the concept under study of a group of students of Mathematics education of the Pedagogical Experimental University Libertador-Pedagogical Institute of Maturin "Antonio Lira Alcalá" (UPEL-IPMALA), while these ideas circulate in parallel with the mathematical concept. First we expose the historical evolution and the notion of infinity from the ideas of Aristotle and Cantor; in addition to intertwining theoretical-historical aspects with previous research. The methodology is reconciled from the interpretative paradigm, and the study is of phenomenological type, which seeks to describe the meaning of the conceptions and experiences of these high school students around the notion of infinity. To obtain the information, we first followed a research guideline that addressed questions about the representations associated with infinity; then a focus group was made to interact with the students and get their impressions from the first source. The results of both work sessions have been linked, and the following stand out: a) the potential conception of infinity prevails, b) they mainly relate the infinite to the very big, c) there is a wide margin in identifying the intangible and uncertain with the term, especially in the literary creation, d) no explicit recognition to the current infinity, e) in the pedagogical it is observed that such a concept goes unnoticed as a formal study, which could be causing the epistemological errors around the concept.

KEY WORDS: Infinite; conceptions; training; mathematics teacher.

1. INTRODUCCIÓN

Todo ser humano en alguna oportunidad ha pensado en la idea de infinito; posiblemente en el lenguaje cotidiano hará uso del término para referirse a situaciones que involucren cantidades muy grandes, a procesos que se prolongan mucho en el tiempo, o a cuestiones intangibles, como el amor que pueda sentir por su semejante. Asimismo, en los estudios formales permea en conceptos claves para la matemática y otras disciplinas, por ejemplo en el estudio de la línea recta; más, sin embargo, probablemente los profesores no han dedicado un poco de tiempo para el estudio superficial y, menos aún, riguroso de tal noción, o en todo caso para conocer la concepción que tienen sus estudiantes y despejar algunas dudas; por el contrario estos suelen dar por sobreentendido que quienes lo usan tienen este concepto claro, considerando sólo lo que intuitivamente suponen de la noción.

Algunas investigaciones en Educación Matemática (Garbin y Azcárate, 2002; Garbin, 2005a; Garbin, 2005b; Lestón 2011; Valdivé y Garbin, 2013; Mena-Lorca y otros, 2015) han concluido que este concepto no es tan sencillo de dilucidar y aprehender significativamente y que su aserción intuitiva se aleja del concepto formal en la matemática, incluso para el mismo docente que enseña la disciplina, lo que pudiera estar incidiendo en la enseñanza y aprendizaje en el contexto escolar.

En este sentido, nuestro punto de interés, como profesores formadores de docentes de matemática, es buscar respuestas en torno a la concepción de lo infinito que circunda en los procesos del pensamiento de los futuros docentes de esta disciplina a partir de las siguientes interrogantes: ¿cuál es la noción de infinito que tienen los estudiantes avanzados para profesores de matemática?, ¿cuáles son las principales representaciones de tal noción?, y ¿cómo desdibujar los malentendidos más comunes sobre el infinito intuitivo?; esto bajo el supuesto de que tal noción dentro del mundo de lo físico no esté bien dilucidado, pues algunos constructos matemáticos emparentados al infinito, no siempre tienen una forma de materializarse, por ejemplo, aun hoy no es concluyente que el Universo sea finito o infinito; y es que quizás la misma imposibilidad de experimentar lo infinito lleva al hombre a caer en algunas incoherencias y contradicciones sobre tal noción.

La investigación se centra en una reflexión sobre noción de infinito en el contexto de la formación inicial del docente de matemática como fenómeno de interés en el campo educativo; particularmente porque la concepción cotidiana que los estudiantes han construido al respecto muchas veces choca con las acepciones de esto objeto en matemática; esto sustentado en que, de acuerdo con Ausubel, el aprendizaje significativo va amalgamado a las experiencias de quien aprende; pero, se carece de éstas cuando se trata del infinito, lo que lleva a los educadores en matemática a seguir modelos de enseñanza que, muchas veces, contrario a clarificar, caen en lo que Bachelard (2000, p.15) llama un obstáculo epistemológico, conllevando a interpretaciones erráticas, inconsistencias, y consecuentemente a aprendizajes difusos.

Reconocemos que esta noción aparece desde la infancia, al intentar enseñar a un niño la secuencia de números naturales seguramente éste se percatará en algún momento de la infinitud de los mismos, en su educación (formal o no) se mantendrá principalmente la idea intuitiva (o aristotélica) del infinito potencial, es decir, un proceso sin fin o que puede dividirse infinidad de veces, sin advertir, quizás incluso por parte del mismo docente, la acepción de un infinito actual, percibido como una unidad o una totalidad, cuya idea requerirá más adelante, no solo en la asignatura matemática sino también en otras disciplinas.

Bajo estas premisas, la investigación se enmarca en la formación inicial del profesor de matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL) – Instituto Pedagógico de Maturín "Antonio Lira Alcalá" (IPMALA), donde el estudio formal de dicha noción pasa inadvertido en la mayoría de las asignaturas del componente matemático, conceptos como límite, sucesiones, integrales y otras, han sido enseñados con base en ideas intuitivas y sin considerar el constructo formal de dicha noción. Esto trae como consecuencia que se repita la misma situación con sus propios estudiantes, quienes ya, al final de la carrera continúan usando términos como "muchos", "bastantes" para referirse al infinito, como explicaremos más adelante.

2. Propósito de la Investigación

Nos hemos propuesto en esta investigación interpretar los referentes conceptuales y de representación de un grupo de bachilleres de cursos avanzados de la especialidad matemática de la UPEL-IPMALA, que dé espacios a la reflexión pedagógica y matemática como vía para redireccionar la enseñanza formal del concepto de infinito. Para el logro de tal propósito partiremos admitiendo el carácter sociocultural de la Matemática, que refleja la manera de pensar de una comunidad, científica o no, en una dimensión temporo-espacial

(Cantoral; Reyes-Gasperini y Montiel, 2014, pp. 92-98); entendiendo con esto, que la noción de infinito es un constructo social, que se genera a partir de ciertas inquietudes y situaciones en un contexto determinado. Entonces, buscamos interpelar la noción de infinito como significado que surge del uso culturalmente situado, lo que pondría de relieve el hecho de que el aprendizaje se da a través de la experiencia con el objeto matemático, y se estima que la investigación dé luces al respecto.

3. Referentes Teóricos

3.1. Evolución del concepto de infinito

Al revisar la evolución histórica del concepto de infinito nos percatamos que tuvieron que pasar varios siglos desde su emergencia intuitiva hasta la construcción formal del concepto y su aceptación epistemológica, ello bajo un clima poco favorable, rodeado de perturbaciones, paradojas e incluso enemistades y muertes de algunos pensadores de la antigüedad; y es que quizás la misma imposibilidad de experimentar lo infinito lleva a estas contradicciones.

Fueron los griegos los primeros en llegar a ciertas incoherencias, al intentar hacer un análisis riguroso sobre el concepto; ellos acuñaron la voz “apeirón” para designar al infinito, que significa “sin límite” o “sin fin” (Ortiz, 1994, p.61). Pareciera que cuestiones como el tiempo, el espacio, los números naturales, y otras, permiten advertir al infinito como lo no acabado (infinito potencial, intuitivo o aristotélico); y así, posiblemente, lo asumieron Aristóteles (287-212 a.C.) y los escolásticos, quienes rechazaron el infinito en acto, es decir, como una totalidad, esto quizás por las contradicciones que intuitivamente suponía tal concepto.

Pese a ello, es el mismo Aristóteles quien distinguió entre el infinito potencial (que crece sin fin o lo que puede dividirse infinidad de veces) y el infinito como una totalidad completa (Bombal, 2010, p.428), oponiéndose a este último, incluso dentro de la matemática, aseverando que el infinito solo existe de manera potencial (Aristóteles, 1995, p.93), concepción que se impuso durante muchos siglos, y que retrasó el avance de la matemática como disciplina científica e influyó en las concepciones de otros pensadores del momento. Fueron las ideas de Aristóteles y de Platón las que predominaron durante esa época, y casi todos los escritos matemáticos que se tienen son especulaciones fundamentadas en ese único pensamiento.

Para la Edad Media la noción de infinito tomó connotaciones mayormente filosóficas y teológicas, considerando que solo Dios tiene la potestad de infinito, así “San Agustín creía que sólo Dios y sus pensamientos eran infinitos y, Santo Tomás de Aquino, por su parte, demostraba […] que, aunque Dios era ilimitado él no podía crear cosas absolutamente ilimitadas” (Ortiz, 1994, p.62), fue tal la influencia de las doctrinas religiosas que se condenó a la hoguera a filósofos como Giordano Bruno, por mantener su teoría sobre los múltiples sistemas solares y sobre la infinitud del universo.

Durante los siguientes 200 años se mantuvo la actitud de ignorar o de rechazar totalmente el infinito en acto; los trabajos simultáneos de Leibniz y Newton sobre el cálculo infinitesimal así lo corroboran; también filósofos como Kant (durante el siglo XIX) mantienen la misma postura aristotélica, asimismo matemáticos como Gauss, Cauchy, y otros rechazaron el infinito en acto porque contradecía el axioma euclidiano que indica que "el todo es mayor que las partes".

Finalmente, es Bolzano "el primero en aceptar explícitamente la existencia de infinitos actuales y realizar los primeros intentos para su estudio y manejo" (Bombal, 2010, p.439) y abriendo el camino para que las teorías conjuntistas de Cantor tomaran auge, haciendo de ello una revolución entre los matemáticos. Bolzano, en una obra póstuma introdujo una serie de paradojas que lo habían llevado a formular algunas tesis acerca de la naturaleza de los conjuntos, no obstante, es Cantor quien expone una teoría más completa y bien definida; él "mostró que pueden introducirse en matemática series infinitas y que pueden ejecutarse operaciones con ellas" (Ferrater, 1964, p.956). Cantor parte de la siguiente concepción de conjunto: "…es una colección en un todo de objetos determinados y distintos de nuestra intuición o de nuestro entendimiento, objetos que son llamados los elementos del conjunto" (Fraenkel, 1969, p.48); exponiendo con ello lo que ha sido denominado como infinito actual, para referirse a una colección sin fin, pero acabada y completa.

3.2. Nociones de infinito

Aristóteles (1995, pp.88-91) reconocía que conceptos como magnitud, tiempo, número, universo, pensamiento, se fundamentan en la noción de infinito; como ya hemos dicho fue él quien distinguió entre dos acepciones para el infinito: por un lado el infinito potencial, visto en cuestiones como el tiempo o lo divisible de las magnitudes; este infinito era entendido por Aristóteles como lo exponía Anaximandro y los escolásticos: "sin límite", "sin fin"; y por otro lado, el mismo Aristóteles definió el infinito en acto, visto como una totalidad, completa, acabada (Aristóteles, 1995, pp.93-95); concepción emparentada a la teoría de Cantor quien lo asume como conjuntos formados por una infinidad de elementos concebidos como una unidad o totalidad, es decir, los límites han sido alcanzados. La historia muestra que Aristóteles y los filósofos de la época rechazaron esta última acepción dentro de la matemática, principalmente por las contradicciones que esto suponía, concediéndole esta propiedad solo a Dios.

Al referirse a la noción de infinito se deberá abarcar ambas formas de comprenderlo: lo infinito como lo potencialmente creciente, divisible (concepción defendida por Aristóteles) y lo infinito actual como un conjunto completo o como una unidad compuesta por infinitos elementos (Concepción de Cantor), las cuales permanecen aún sin una reconciliación total. De allí que el estudiar la noción de infinito desde el hecho educativo suponga una revisión filosófica, religiosa y científica que apuntale su abordaje formal en la formación de docentes de Matemática con miras en la comprensión del mundo, del ser humano y de aquello que está más allá de lo que se conoce.

3.3. Intuición y Representaciones Sociales en la Educación Matemática

La noción que se tiene de infinito es alusivo a dos ideas: la representación que nos hacemos del objeto y lo que intuitivamente hemos construidos alrededor de él. Desde el campo específico de la Educación Matemática, uno de los principales expositores sobre intuición es Fischbein (1982). Para él, la matemática ha venido siendo considerada como ciencia "dura", rigurosa y celosa de su carácter netamente demostrativo, en consecuencia han intentado desligarla de lo que es intuitivo, y sostiene que debe existir una estrecha vinculación entre lo intuitivo y el razonamiento matemático dentro de la enseñanza de esta disciplina, y en este sentido critica que se haya dejado de lado el estudio de lo intuitivo como pulsión de la producción del conocimiento; para él, se suele equiparar la expresión "sentido común" con el término "intuición", pues pareciera que el término intuitivo es tan intuitivamente claro que no hay necesidad de discurrir sobre él, lo cual bloquea todo interés psicológico y pedagógico. Para este investigador, lo intuitivo tiene un carácter fundamental en la enseñanza de la matemática, sobre todo si se considera que el alumno no es un simple receptor pasivo, si no que trae una experiencia, y conviene con la concepción de asimilación de Piaget, según la cual los esquemas mentales no son rígidos, sino que a través de algunos procesos de maduración estos se van acomodando a largo plazo haciéndose más significativos para la resolución de problemas; al mismo tiempo hace énfasis en que la teoría piagetiana mira a la intuición como un puente para el niño hasta que ése logre un estado de maduración mayor; más aún considera que las representaciones y estructuras intuitivas son esenciales y necesarias en todo momento de la vida del ser humano y no -como dice la teoría piagetiana- hasta alcanzar las formas analíticas del pensamiento. (Fischbein 1982, pp.9-10).

Por otro lado, la noción de infinito pasa a ser un conocimiento que ha sido edificado socialmente, y que es verdad, en tanto una determinada comunidad así lo considere. El devenir histórico de este concepto pasa por revisar subjetividades tanto individuales como colectivas en el contexto del cuándo y dónde ocurrieron tales hechos. En ese sentido, Moscovici (1979, p.27) acepta que el carácter sociocultural, las ideas y otros aspectos como los afectivos y cognitivos propios del hombre dejan una especie de impronta que constituye subjetividades. Siendo la noción de infinito un conocimiento socialmente elaborado a partir de la experiencia y con apego a ideas primordialmente intuitivas, no puede pasar inadvertido al momento de emitir una representación formal de la misma que ésta se construye en un contexto educativo, bajo ciertas costumbres y modelos de pensamiento imperantes.

3.4. La noción de infinito en la formación del profesor de matemática.

En la introducción de este artículo hemos advertido sobre la importancia que reviste el concepto de infinito en la educación formal, en todos sus niveles; ejemplo evidente es la simple enunciación de la seguidilla de números naturales en la etapa inicial de la educación del niño, que paulatinamente va haciéndose más amplia a medida que avanza de grado escolar, provocando en ellos la inquietud sobre el final de ese proceso y, posiblemente, el maestro se vale del término infinito para enunciar esa característica potencial propia del conjunto de los números naturales.

Lo anterior recrea un escenario común en las aulas de clases, que determina la importancia de una aprehensión adecuada de la noción de infinito para el futuro docente de matemática. Jato Canales (2012, pp.11-21), enuncia algunos contenidos de la educación secundaria obligatoria española y de bachillerato donde se hace explícita o implícitamente la apreciación del concepto de infinito, entre ellos: fracción generatriz, expresiones decimales periódicas, operaciones con fracciones y con decimales, números irracionales, el estudio de gráficas de funciones reales, la recta numérica, progresiones aritméticas y geométricas, conjuntos numéricos infinitos, espacios muéstrales, entre otros.

En cada una de estas nociones, así como en las propias de su formación profesional universitaria (límites, derivadas, series, etcétera) se hace explícita la necesidad de que el docente de la disciplina tenga una concepción clara del tópico y, particularmente, en temas asociados a lo infinitesimal (infinito actual) es meritorio que éste realice una pausa para conocer la concepción que traen sus alumnos y aclarar aquellas que así lo requieran; ya que, como veremos luego las concepciones que traemos de la cotidianidad intervienen en el acto pedagógico de la enseñanza y el aprendizaje de la disciplina.

4. Recorrido Metodológico

Buscamos conocer e interpretar las ideas que sobre la noción de infinito tienen los estudiantes avanzados para profesor en matemática de la UPEL-IPMALA. La interpretación se hará a partir de lo que el alumno manifiesta conocer sobre el infinito, pudiendo o no ser visto desde la concepción formal de este objeto matemático. De allí que se considera el estudio bajo el paradigma interpretativo con una perspectiva fenomenológica, centrada en las concepciones e ideas que exponen los sujetos de estudio, constituidos por un grupo de 19 estudiantes de la especialidad de Matemática de la UPEL-IPMALA, quienes para ese momento estaban cursando el 7mo. Semestre de la carrera, y que representaban una sección de Cálculo de Funciones de Variables Complejas.

Los argumentos del estudio se recogieron en dos momentos. Primero se elaboró una pauta de investigación, que consistió en una seria de preguntas abiertas sobre la noción del infinito vinculada a algunas representaciones comunes en el contexto social, las cuales debían responder con claridad y suficientes argumentos en un tiempo apreciable. Las preguntas se detallan a continuación:

1. Para usted ¿qué es lo finito? y ¿qué es lo infinito? Si es necesario, utilice ejemplos.
2. El tiempo de vida de una persona es ¿finito o infinito?
3. ¿La cantidad de cabellos que una persona tiene en su cabeza se podrá contar o no? ¿y la que tienen todas las cabezas de las personas de todo mundo se podrá contar o no? Explique su respuesta.
4. ¿Con qué términos asociaría la palabra “infinito” y por qué?
5. Escriba dos frases como mínimo en que se utilice la palabra infinito y que no estén relacionadas con la matemática. Explique qué significado para usted tiene allí este término.
6. Buzz Lightyear en Toy History decía: “Al infinito y más allá” ¿qué significado le darías a esa expresión?
7. En su opinión ¿el infinito es muy grande o muy pequeño?, y de acuerdo a su respuesta ¿qué tan grande o tan pequeño es?
8. Alejandro Sanz en la canción “Me iré” dice: “…cuéntame, otra vez, si no es el mismo sol de ayer el que se esconde hoy para ti, para mí, para nadie más se ha inventado el mar se ha inventado el horizonte por llegar donde existe siempre un donde en algún lugar” ¿qué le sugiere este verso?
9. Es común escuchar que antes de morir toda persona ve pasar en ese último instante toda su vida; si esto es así, entonces es interesante lo que Arthur Schnitzler, a través de uno de sus personajes de una novela, nos hace reflexionar: una persona antes de morir

"vuelve a vivir en el último momento toda la vida pasada, a una velocidad inconcebible para los demás. Esta vida recordada debe tener también un último momento, y este último momento su propio último momento y así sucesivamente" ¿qué le sugiere esta idea? ¿qué significa ese hecho para usted?

10. El infinito en matemática se representa con una lemniscata, es decir con el símbolo ∞, ¿por qué cree que se utiliza este símbolo? Y si tuviese que colocarle otro símbolo para representarlo ¿cuál sería y por qué?, ¿con cuál símbolo lo representaría usted? ¿por qué?

En el segundo momento, se realizó un grupo focal con los mismos bachilleres. Primero se discutieron las principales impresiones sobre las preguntas antes planteadas: sus argumentos y sus dudas. Seguidamente, para acercarnos a su noción del infinito como concepto matemático, se propuso discutir en torno a tres inquietudes más, las cuales se exponen a continuación:

1. ¿Cuántos números naturales hay? y ¿cuántos enteros?, ¿cuál de ellos tiene mayor cardinalidad? O ¿son iguales?
2. ¿Puede el infinito ser más infinito de lo que ya es?
3. Considere al conjunto de números naturales $\{1, 2, 3, 4,5,\ldots\}$ y el conjunto de los números naturales pares $\{2, 4, 6, 8, 10,12,\ldots\}$, al comparar la cantidad de elementos entre los dos conjuntos, afirmarías que ¿la cantidad (el número) de elementos del primero es mayor, menor o igual a la (al número) cantidad de elementos del segundo conjunto? Explique su razonamiento.

Durante el grupo focal también se solicitó a los participantes expresar varias fracciones en decimales y discutir sobre la última cifra decimal, para ello se consideró fracciones con decimales periódicos. Asimismo se pidió calcular el valor decimal de $\sqrt{2}$ a través de aproximaciones, e igualmente determinar la última cifra decimal. Una tercera actividad consistió en medir con hilo y reglas geométricas aproximaciones para el diámetro y la longitud de la circunferencia de distintos objetos circulares y hallar la aproximación para el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

Para el análisis de la información recopilada mediante el cuestionario, las respuestas de cada uno fueron transcritas en documento de procesador de texto. Luego se colocaron en un cuadro de doble entrada: cada columna suponía las respuestas a una pregunta y en cada fila se ubicaron las respuestas de un mismo bachiller; esto permitió visualizar las generalidades y particularidades de las respuestas de los entrevistados. Con ello se fueron extrayendo las coincidencias, los errores, las aglutinaciones, las diferencias, entre otros, para el análisis y la interpretación. En cuanto a lo observado y expuesto durante el grupo focal, en primer lugar se hizo el recuento de lo ocurrido, se solicitó a los participantes sus hojas de anotaciones, con ellas se hizo un análisis de las respuestas y de las actividades que se fueron realizando. Finalmente, se hizo un cruce entre las dos técnicas aplicadas, de la cual emergen las categorías que se exponen en el siguiente apartado.

5. Hallazgos

Los siguientes argumentos llevan como línea de acción dar a conocer los referentes conceptuales y principales representaciones y códigos de creencias sobre el objeto matemático infinito de un grupo de bachilleres avanzados en la especialidad matemática de la UPEL-IPMALA. Los resultados nos proporcionaron algunas ideas para la reflexión pedagógica como una vía para redireccionar la formación inicial de estos profesores. Observaremos que las ideas se acercan y se alejan del concepto en diferentes momentos, según el contexto de la pregunta y las creencias sobre el objeto. En el análisis suponemos de partida que los encuestados deben tener una formación avanzada en matemática, y que por lo tanto gozan de suficientes referentes teóricos para tener una concepción aceptablemente sustentada de lo infinito. Los resultados los hemos vinculado desde tres tramas de interés, que surgieron del análisis: la concepción de lo infinito; su vinculación con la creación literaria y, finalmente con la matemática.

5.1. Concepciones y representaciones sobre la idea de lo infinito

Las dos significaciones del infinito nos llevan por caminos aparentemente separados, por un lado la potencialidad del infinito parece ser bastante intuitivo, y por el otro su actualidad es, por el contrario, una "noción contraintuitiva" (Garbin y Azcárate, 2001, p.56); de allí que esta primera sección trataremos de acercarnos a este concepto desde el contraste que pudiera concurrir entre lo finito y lo infinito.

El análisis muestra que la idea de lo finito está bien puntualizada como aquello bien definido y delimitado, matemáticamente cuantificable y geométricamente medible; y de acuerdo con Ferrater (1964, p.946), estas respuestas no se alejan de su significación como lo que termina, tiene fin o es limitado, expresiones todas ellas empleadas para definir lo finito. Igualmente, aparecen en ese contexto algunos ejemplos que permiten ir categorizando las respuestas de análisis; una de las representaciones de lo finito, y que contradictoriamente, también de lo infinito (como veremos luego), es la variable tiempo. En el caso particular de lo finito refieren al "*tiempo de vida de una persona*"; y esto último va hilvanado precisamente a responder una de las preguntas del cuestionario: *El tiempo de vida de una persona es ¿finito o infinito?*; e indudablemente, asumiéndolo desde lo que conocemos, es decir, reconociendo que todo ser humano nace y muere, entonces, consecuentemente la mayoría contestó que el tiempo de vida de una persona es "*finito*".

Las otras respuestas a esta pregunta concurren en una categoría que hemos convenido en llamar: *lo intangible, espiritual e incierto*, vinculados principalmente a creencias, sentimientos y dogmas religiosos; así por ejemplo, un encuestado escribe "*en un futuro, gracias al sacrificio de Jesús tenemos la esperanza de vivir para siempre si somos obedientes a las leyes de Jehová*"; otro participante alude a un versículo de la Biblia que indica que la vida termina con la muerte, y agrega otras creencias, dice: "*Bajo la doctrina bíblica cristiana es finito, ya que la vida termina con la muerte (Génesis 3:19); no obstante bajo otras creencias no bíblicas, la vida no termina con la muerte sino que se transforma en otras formas de vida, es decir, se considera a la vida infinita*", los cuales entran en la categoría de *intangible, espiritual e incierto*; en todo caso desconocemos qué ocurre luego de la muerte; mas, los comentarios descritos inducen a aseverar que para estos encuestados hay tres formas de suponer la vida: primero, que es finita porque termina con la muerte (por lo menos la terrenal), segundo que luego de la muerte pasamos a un estado de "vida eterna" (infinito) inscrito en esperanzas religiosas y tercero asumiendo creencias como la reencarnación del ser humano en otras formas de vida (infinito).

Estos asuntos asociados al tiempo, la vida y otros nos llevan a recorrer caminos marcados por supuestos que se han construido bajo representaciones sociales, lo que incide entre la intuición y la formalidad del concepto. Así, por ejemplo, algunos filósofos sostienen que la infinitud del tiempo apunta hacia la infinitud de la vida, veamos:

> La infinidad del tiempo y de la vida pueden también demostrarse la una por la otra… El tiempo es la forma, la vida es el fondo: el uno no es posible sin el otro. La combinación del tiempo y de la vida resuelve la infinidad de la vida en una infinidad de períodos determinados y finitos. En efecto, la vida como elemento de lo finito, está encerrada entre límites precisos, entre el nacimiento y la muerte. No hay, propiamente hablando, vida eterna. Estos dos términos son contradictorios. La humanidad no acaba su carrera en dos vidas: está determinada a desarrollarse infinitamente en lo infinito del tiempo y del espacio por medio de una sucesión infinita de períodos determinados de vida… (Tiberghien, 1872, pp.169-170)

Estas tesis se han fundado desde los grandes filósofos de la antigüedad, quienes con un pensamiento imaginativo han teorizado las estructuras de las ciencias básicas. Hay que señalar que aún hoy es discutible todas estas teorías; por ejemplo si nos interrogamos ¿qué es el presente?, nos estaríamos sumergiendo en un mar filosófico profundo, pues el pasado ya fue, el futuro será y el momento del "ya", del "ahora" es temporalmente insignificante, tan infinitamente pequeño que es imposible definir en términos temporales conocidos; tesis que además pone de relieve la existencia misma del hombre; así de interesante es el infinito.

Ahora nos interesa dilucidar la noción de infinito; tal idea es desarrollada en oposición de lo finito. Las respuestas son variadas, pero que se pueden concatenar desde unas categorías ya conocidas y otras emergentes: el infinito en su acepción potencial es la concepción más recurrente en las respuestas de los bachilleres; para ellos es aquello "i*nagotable*", "*ilimitado*", "*inacabado*", es decir, un proceso "*sin fin*". Uno de ellos expresa que "*no tiene principio ni final*", respuesta delicada al ser un estudiante de esta especialidad, sobre todo si discurrimos, por ejemplo, sobre el conjunto de los números naturales que si tiene primer elemento y por lo tanto puede considerarse que tiene un inicio a pesar de ser infinito. Del mismo modo, otras respuestas llevan su sendero por la matemática, al considerar opciones como "*incontable*", "*inmedible*", "*no cuantificable*", entre otras, pero siempre dejando de lado la posibilidad de mirar la opción del infinito actual, es decir, prevalece en ellos la concepción intuitiva de infinito, pero no hay apertura, por el momento, a otras características del objeto en cuestión.

Asimismo, en la idea de infinito nuevamente aparece, aunque pocas veces, la variable tiempo; lo refieren como "*algo que nunca se acaba, que dura para siempre*", igualmente surge la expresión "*eterno*", mirado no solo en cuanto a tiempo sino también a creencias, por ejemplo lo "*eterno de Dios*", entrando ello en la categoría de *lo intangible, espiritual e incierto*; otros ejemplos en esta categoría son "*amor*", "*Dios*" "*libertad*", "*esperanza*", etcétera, que son recurrentes en algunos casos. Parece común emplear el término infinito para referirse a cuestiones intangibles. Este tipo de expresiones es tan frecuente que muchas veces no nos detenemos a considerar su significado ontológico o epistemológico, pues hemos convivido con ellos y se nos hace tan natural, tan intuitivo, incluso para quienes tenemos vinculación con el estudio formal de la matemática, o es que ¿es la incertidumbre misma la pulsión para el estudio de este concepto desde los diferentes ámbitos del conocimiento?, ¿hay una constructo teórico en estas ideas de lo intangible, espiritual e incierto que permita vincularlas a la matemática y, por tanto a su enseñanza?

En estas concepciones de lo infinito prevalece las adjetivaciones para describirlo desde sus cualidades, pero son ideas poco reflexionadas matemáticamente, ellas van estrechamente ligadas a lo intuitivo y las representaciones sociales que se han determinado a lo largo del tiempo; no queriendo con ello suponer que tales ideas sean incorrectas, sino que un estudiante de esta especialidad de nivel avanzado debería tener las posibilidades de reflejar un razonamiento más complejo acerca del tema; creemos que esto estaría incidiendo en la forma de enseñanza de la matemática en los niveles escolares de primaria y bachillerato, pero que además incide en su propio rendimiento académico-profesional y de aprendizaje en contenidos fundamentales, donde se hace presente la idea de lo infinito.

Todo ello sugiere sostener que no se ha logrado un desarrollo completo del tema; algunas investigaciones (Tall, 1991 y Dreyfus, 1990, 1991) sostienen que hay un proceso por el cual todo sujeto logra pasar de un Pensamiento Matemático Elemental a un Pensamiento Matemático Avanzado, y desde la perspectiva de esa teoría y en función a las respuestas encontradas, pareciera que los estudiantes no han alcanzado este paso, donde el descubrimiento se convierta en una definición, se cambie el convencimiento por una demostración, es decir, concretar lo intuitivo a lo formal de la matemática, escenarios que también ya han descrito otros investigadores en sus contextos (Garbin y Azcárate, 2002; Garbin, 2005a; Garbin, 2005b; Valdivé y Garbin, 2013)

Por otro lado, la concepción que presentan los encuestados en vinculación con los ejemplos que exponen, contradicen sus propias adjetivaciones; algunos utilizan el "*Universo*", "*las estrellas en el cielo*", "*el mar*", para lo infinito, entre otras que son o bien desconocidos o bien situaciones donde equivale a *lo muy grande*, categoría esta última que suelen equiparar con lo infinito. Por un lado, las investigaciones sobre lo infinito del Universo no son concluyentes, por el contrario se ha demostrado que este está en expansión (Hawking, 2007, pp. 25-44) y por otra lado, la inmensidad, lo muy grande, no es equiparable a lo infinito; aunque parece ser que esta es la concepción que muchos estudiantes tienen sobre lo infinito.

Estas discrepancias son más visibles cuando se cuestiona con las siguientes preguntas: *¿la cantidad de cabellos que una persona tiene en su cabeza se podrá contar o no?, ¿y la que tienen todas las cabezas de las personas de todo mundo se podrá contar o no?* Las respuestas a esta pregunta son equitativas para quienes admiten esta situación como infinito (incontable) y como finito (contable).

Para los que alegan que sí es posible realizar esta tarea, los hemos denominados como *finitistas*, ellos asumen unas razones y/o medios para lograr esa tarea y que podemos resumir así: uso de la estadística como medio de estimación, uso de tecnologías, disposición y disponibilidad de tiempo para realizar esta tarea, y finalmente no deja de aparecer la categoría de *lo intangible, espiritual e incierto*, uno de ellos expresa: "*Marco 10:30 allí dice que todos los cabellos de la cabeza de ustedes están contados*"; la otra opción la hemos denominado como *infinitistas*, ellos también dan sus razones para asegurar que este trabajo de contar todos los cabellos de todas las personas no es viable: la imposibilidad de hacer el trabajo por lo complicado de la situación, por la posibilidad de cometer errores, por ser un conjunto "*muy grande*" (nuevamente asumen lo infinito como lo muy grande), por razones de tiempo (no hay suficiente tiempo de vida para quien va a hacer el trabajo), lo incierto del número exacto de personas en el mundo, y en ese sentido un encuestado indica que "*es incierta la cantidad de personas que existen en el mundo ya que a diario nace alguien*".

Hay que destacar que sus respuestas varían según el contexto y la formulación de las preguntas, pues para una misma situación, algunos encuestados lo registran como finito e infinito simultáneamente. Esto se traduce en que no hay claridad sobre el concepto de infinito matemático, sino que mantienen unas ideas intuitivas fundadas en creencias y desarrolladas desde su principal medio de comunicación, como lo es el lenguaje. Esto lo podemos detallar al analizar los términos o expresiones que utilizan para referirse al infinito, y sus razones: la mayoría hace alusión a "*los números*" asociándolo a lo "*muy grande*"; otros refieren al "*Universo*", del cual ya hemos aclarado la no veracidad de tal idea; algunos otros lo asocian con "*el agua en el mar*", "*la arena de la playa*", etcétera; algunos utilizan palabras que hacen referencia a términos primitivos de la geometría euclidiana, tales como punto, recta, plano y espacio, lo ilimitado, lo continuo, lo eterno, lo inalcanzable y finalmente no deja de estar lo intangible, tales como libertad, fe, esperanza, los sueños, Dios y el amor.

Aquí destacamos como algunos bachilleres admiten, por ejemplo, la infinitud de los elementos de un conjunto numérico y paralelamente conceden a Dios la primacía de lo infinito, ¿no es esta situación parecida a lo ocurrido a Aristóteles, Platón, e incluso el mismo Cantor, entre otros grandes estudiosos de lo infinito?, y en ese hilo de ideas, Valdivé y Garbin (2013, p. 140), dicen "que algunos estudiantes evocan una variedad de esquemas conceptuales previos acerca de esta noción. Esquemas que son semejantes de alguna manera a las ideas que se encuentran en la evolución histórica de la noción" lo que nos induce a alegar la hipótesis de que hay una estrecha vinculación entre la forma en que socialmente se fueron construyendo los objetos matemáticos y la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina; esto sugiere repensarla desde una revisión epistemológica, pedagógica cognitiva y sociocultural del concepto infinito desde su evolución histórica.

Con lo descrito hasta el momento podemos referir dos ideas sobre la concepción del infinito. Primero *lo desconocido*, como es el caso del Universo, respecto al cual algunos estudiantes, a pesar de subrayar la no demostración definitiva de su finitud o su infinitud, lo determinan como lo "*muy grande*" o lo que "*no se sabe que tan grande es*" como sinónimo de infinito; en esta categoría también entra la variable *tiempo*, como hecho no concluyente. Lo segundo es lo *matematizable*; entendemos que al referirse a "*los números*" los bachilleres hacen alusión a los elementos de un determinado conjunto numérico conocido (por ejemplo el Conjunto de los Números Enteros); con ello hacen alusión al infinito potencial, pero ¿hay claridad para ubicar a los conjuntos numéricos infinitos en la conceptualización actual del infinito? Y finalmente, se aprecia *lo intangible, espiritual e incierto*; se mantiene una fuerte creencia de que lo inimaginable, lo que no entendemos, Dios, una deidad, lo eterno y otros similares son constructos teóricos y/o filosóficos para ellos asociados al infinito.

Para culminar, presentamos en el cuadro 1 un resumen de las frases e ideas que los encuestados emiten sobre el infinito, asociadas a las categorías surgidas a partir del análisis:

Cuadro 1. Frases asociadas a las categorías surgidas en el análisis

Macro Categorías	**Categorías**	**Frases o palabras asociadas**
Lo desconocido	Tiempo	Eterno; continuo; inagotable; inacabable.
	Espacio	Extensión; Universo (espacio) (vasto universo); No tiene fin; Lejanía; Inalcanzable; Ni principio, ni final; Inmedible; Elementos naturales (agua, arena del mar, otros); muy grande; camino abierto para continuar.
Lo matematizable	Cantidad o elementos matemáticos	Incontable (no contable); No tiene fin; Números; no cuantificable; Inmedible; El punto, la recta, el plano, el espacio (explica que son conceptos primitivos sin definición formal); grande; incalculable;
Lo intangible, espiritual e incierto	Intangible y espiritual	Amor; Conciencia; El gusto excesivo por algo; Pensamiento; Dios; la ignorancia; Libertad, fe, esperanza; desconocido; eterno; deidad.
	Incierto	Incondicionado; Sin determinación (no termina); No tiene fin; Sin límites (no se limita, ilimitado); Nunca; Siempre; Inalcanzable; No definido; desconocido.

5.2. Representaciones e interpretaciones literarias de lo infinito

Como hemos apuntado con anterioridad, la creación artística y principalmente la literaria se ha valido del desconocimiento y de la intuición de la idea de infinito para asumir una belleza sin igual en sus obras. Como ejemplo destacamos a Borges (1996, p. 255), quien en "El Aleph" nos aproxima a su idea de Infinito Actual en el siguiente fragmento:

"-¿El Aleph?- repetí.

–Sí, el lugar donde están, sin confundirse, todos los lugares del orbe, visto desde todos los ángulos".

De forma sencilla este intelectual nos acerca a este complejo concepto, afirmando, desde uno de sus personajes, que este puede ser descrito solamente desde la potencialidad infinita del lenguaje.

Entonces, ese estado místico, espiritual, incierto que transita en lo infinito es capaz de hacer soñar a espacios inimaginables para los artistas y sus seguidores. Hoy, es muy común observar en redes sociales el uso, muchas veces excesivo, de la representación de lo infinito para indicar cuestiones idealistas. Ese accionar imaginario de las personas en cuanto al infinito interviene en la representación que se crea entorno a esta noción clave para la matemática, empero, a pesar de que entendemos y quizás compartimos estas ideas, también sostenemos que un docente de matemática debe ser capaz de discutir lógicamente un concepto y de analizar las situaciones en contextos matemáticos.

Hemos partido de unas interrogantes que nos proporcionan una representación de la noción de los encuestados, entorno a ideas sobre el infinito extrapoladas a la creación literaria. Solicitamos que nos expresaran *dos frases en que se utilice la palabra infinito y que no estén directamente relacionadas con la matemática y qué significado le otorgan*. Solo pocos lograron responder a la pregunta, algunos solo nombraron palabras ya antes mencionadas, como por ejemplo "*el mar*"; "*Universo*", "*las estrellas*", etcétera. Dentro de las respuestas que destacan está la famosa frase de Albert Einstein "*Dos cosas son infinitas: el Universo y la estupidez humana; y yo no estoy seguro sobre el Universo*"; los alumnos que la sugieren emiten opiniones en relación con la necesidad de educar al hombre, al rescate de los valores sociales, e incluso a situaciones políticas; aquí hemos de destacar que en sus explicaciones hay una cierta tendencia al acto de educar, pero no hacia la matemática, por ejemplo podemos cuestionar ¿cómo es que es la estupidez humana infinita?, ¿es el Universo infinito?, ¿cómo pensar un Universo finito o infinito?, cuestionamientos que quizás hacen reflexionar el tema desde lo matemático.

Las otras fases que sugieren las hemos agrupado según las razones que emiten de la siguiente manera: 1) "*Avanza… con los pies en la tierra y la mirada en el infinito*" (Anónimo) y "*El cielo es el límite*" título de un libro de Wayne W. Dyer; ambas refieren a cuestiones de autoayuda, y así lo entienden quienes sugieren estas frases, uno de ellos afirma: "*avanzar firmemente y seguir hacia adelante sin detenernos; aspirar siempre a más y mejor*"; 2) tenemos "*La maldad del hombre puede llegar a ser infinita*" (frase común) y "*El hombre es maleable casi hasta el infinito*" de Leo Strauss; aquí también cabe la de Albert Einstein que hemos descrito en el párrafo anterior; relacionadas a los valores sociales y a la posibilidad de moldear a un nuevo ser humano, y para ello no cabe frontera; y 3) están: "*El amor es infinito*" (frase común) y "*Que se quede el infinito sin estrellas*" de Bobby Capó, refiriéndose al amor hacia una mujer o al semejante, al amor a una madre, es decir, lo interpretamos como aquello, para lo que tenemos como creencia, que es imposible de concretar en una cantidad finita; cada una de estas opciones de frases dan cabida a dos de las categorías que hemos descrito, *lo intangible, espiritual e incierto* y *lo muy grande*; pareciera entonces que es así como lo miran nuestros bachilleres desde lo literario.

Asimismo, hemos querido, primero interpretar sus significados entorno a la famosa frase de Buzz Lightyear en Toy History: *"Al infinito y más allá"* y luego, exponer lo que les sugiere la siguiente frase de una canción de Alejandro Sanz *"… cuéntame, otra vez, si no es el mismo sol de ayer el que se esconde hoy para ti, para mí, para nadie más se ha inventado el mar se ha inventado el horizonte por llegar donde existe siempre un donde en algún lugar"*. En la primera, casi todas las respuestas se orientan a lo incondicional de la amistad entre ambos personajes, y lo que uno estaría dispuesto a hacer por el otro es, precisamente traspasar las barreras de lo inalcanzable, es decir del infinito y el más allá; además, algunos encuestados asumen la imposibilidad de mirar al infinito como una totalidad, pues "*a pesar que nunca* [Buzz Lightyear] *llegará el infinito, luchará para intentar alcanzarlo y siempre dará más de sí* [mismo] *para llegar incluso a superarlo*", lo que sugiere que para este estudiante los límites del infinito son inalcanzables; otro de ellos utiliza ejemplos con la matemática para situarse en el contexto de la pregunta: "*ir más allá de lo que podemos abarcar, es decir, si el infinito es el límite, sobrepasarlo. Algo de eso hay en los conjuntos de numeración que van más allá del infinito*", idea que determina al infinito primero con posibilidad de límites y luego como potencialidad, al decir que los conjuntos de números "*van más allá del infinito*".

Por otro lado, las respuestas a la pregunta sobre la interpretación que le dan a la canción de Alejandro Sanz sugieren dos asuntos: primero, todo eso que se está dispuesto a hacer por amor a ese semejante, que muchas veces parece estar "inalcanzable" y lo segundo a una dimensión temporo-espacial, es decir aquel ciclo sempiterno que nos muestra un nuevo lugar, un nuevo horizonte y un eterno amanecer; el siguiente comentario lo describe muy bien: "*el paso del tiempo el cual imperturbable, pasa una y otra vez como un infinito, y al horizonte, al observarlo, vasto y continuo, es más notable estando en el mar donde la circunferencia de la tierra le da un toque infinito a la vista, por allá en lo ilimitado debe existir un lugar, y más allá aun*". En definitiva, las respuestas encontradas poco llevan un encaminamiento matemático, sino que se sigue la corriente a situaciones intangibles o a lo muy grande como equivalente de infinito, sin ningún otro tipo de cuestionamientos.

En este devenir literario, otras ideas más complejas se evidencian al solicitarles que reflexionen acerca una afirmación muy común: *"antes de morir toda persona ve pasar en ese último instante, toda su vida"*; situación que el Novelista Arthur Schnitzler nos hace ver a través de un personaje de una de sus novelas, al escribir:

> Leinbach ha descubierto una prueba de que la muerte no existe. Más allá de toda duda, ha declarado, que en todo tipo de muerte, no sólo en la muerte por inmersión, se vuelve a vivir en el último momento toda la vida pasada, a una velocidad inconcebible para los demás. Esta vida recordada debe tener también un último momento, y este último momento su propio último momento y así sucesivamente. Por lo tanto morir era la eternidad. De acuerdo con la teoría de límites uno se aproxima a la muerte, pero nunca la alcanza — Una figura cuestionable, este doctor Leinbach (Ortiz, 1994, p. 64).

Las respuestas llevan principalmente a lo siguiente: para algunos, luego de la muerte hay una existencia desconocida, bien en mente o espiritualmente, pero no físicamente. Expresiones como "*siempre va a existir algo más allá*", "cuando se llega al final es apenas el inicio de una nueva etapa" y "*Siempre existirá algo, que podemos ver pero no tocar*", así lo corroboran. Para otros, lo establecen desde lo temporal, o sea, a esos últimos instantes de vida, lo cual cabe dentro de lo limitado del cuerpo humano, pero que, según sus ideas, en ese proceso existen momentos reiterativos, es decir, pese a que dejaremos de existir, podemos llegar a reflejar en pensamientos, ideas, recuerdos de forma infinita y en instantes pequeños; expresiones como que en ese final de la vida podemos "*recordar todo lo vivido de manera infinita*" o "*en un momento corto, y en un instante, pasando por tu mente infinitas cosas*", así lo determinan. En este punto hay que admitir que sus respuestas van guiadas por presunciones como ya antes hemos analizado, pues ningún ser humano vivo ha experimentado la muerte y regresado para describir lo ocurrido, por lo que sus contestaciones se basan en creencias y no en hechos comprobables.

Entonces, desde nuestro análisis creemos que las interpretaciones nos llevan a un grado superior de entender lo infinito, especialmente lo infinito actual (quizás sin el encuestado advertir en ello), expliquemos esta situación: algunos de ellos expresan esto como improbable o irreal (la situación planteada), en el sentido de que si ello ocurriera una infinidad de veces entonces la persona jamás va a morir, tal como lo presume Arthur Schnitzler; pero sabemos que es una realidad que dejamos de existir en cuerpo vivo, por lo tanto "*se crearía un bucle infinito y sin fin al estilo de un espejo frente a otro*", o sería, como afirma otro bachiller, "*Una paradoja de lo infinito; cada vez que llegas al final de tu vida, en la ilusión del final de tu vida, el mismo vuelve a ver pasar* [toda] *su vida frente a sus ojos, como la velocidad que se reproducen un espejo en otro hacia el infinito y en un instante, cada espejo una vida, pero es solo un espejo ilusorio antes de morir*", situaciones que pueden fácilmente asemejarse a la famosa paradoja de Zenón de Aquiles y la Tortuga.

En razón a ello cuestionamos si ¿el ser humano intuitivamente piensa en la posibilidad de infinitos actuales?; cognitivamente, ¿cómo se logra ese proceso de lo intuitivo a la formalización del infinito?, y en ese hilo de ideas ¿qué aportes nos sugiere la creación literaria y artística en general? Pues, pareciera que un análisis más a detalle sugiere que hay allí caminos por recorrer que inciden en una pedagogía de la Matemática y en las formas de aprendizaje de las personas.

5.3. Representaciones e interpretaciones del infinito en la matemática

Esta sesión final irá hilvanada a los hallazgos encontrados en las actividades ejecutadas durante el grupo focal. En el cuestionario se intervino a los participantes con dos preguntas más: *¿el infinito es muy grande o muy pequeño?, y según la respuesta ¿qué tan grande o tan pequeño es?* y la segunda: *el infinito en matemática se representa con una lemniscata, es decir con el símbolo ∞, ¿por qué cree que se utiliza este símbolo?, y si tuviese que colocarle otro símbolo para representarlo ¿cuál sería y por qué?*, ambas preguntas representaron una apertura a mirar al infinito desde su contexto de formación, tanto en lo matemático como en lo pedagógico.

Para la primera interrogante, los estudiantes en su mayoría refieren a lo "*muy grande*" como característica del infinito, esto va en correspondencia con el análisis de las preguntas previas; asimismo un número menor de los encuestados optan que ambas opciones. Los que sostienen que el infinito es muy grande escogen razones ya asomadas en los resultados previos, una de ellas se debe a la acepción del infinito potencial, particularmente por la caracterización del Conjunto de Números Naturales, donde cada elemento tiene su sucesor; otros expresan la imposibilidad de encontrarle un cardinal al infinito, haciendo un tratamiento igualitario a los conjuntos de infinitos elementos y conjuntos finitos.

Otros de los que aseguran que es "*muy grande*" utilizan medios geométricos para vincular el infinito con lo inmedible, con lo extenso o lo muy largo, quizás relacionado a conceptos como la recta, semirrecta y otros, siempre refiriendo a conjuntos no acotados topológicamente, en algunos casos incluso rompen por completo sus mismas ideas, por ejemplo, al manifestar que necesariamente para que sea infinito no debe existir ni un principio ni un final, pero suele ocurrir que estos mismo bachilleres admiten tanto al Conjunto de los Números Naturales como a un intervalo$[a, b]$ cerrado como conjuntos infinitos. Aquí también aparece la categoría de lo intangible, pero no nos detendremos en ello, pues ya lo hemos hecho visible en los apartados anteriores.

Por otro lado, los bachilleres que comentan que es tanto "*pequeño*" como "*muy grande*" expresan diversas razones. Uno de ellos dice: "*un ejemplo de infinito grande sería el conjunto* **R** *y de infinito pequeño sería los números* [reales] *comprendidos entre dos enteros (***Z***) cualquiera* [entendiéndose como un intervalo real]", evidenciando un obstáculo epistemológico sobre la cardinalidad de conjuntos infinitos, pues ya Cantor ha demostrado que ambos conjuntos tienen el mismo cardinal (a estos se les denomina cardinales transfinitos), y que ha denominado el continuo; posiblemente este estudiante está contrastando la percepción visual-geométrica de un intervalo de números reales con la recta real; sin embargo en él podemos destacar como positivo que al menos tiene una cierta maduración conceptual sobre la actualidad del infinito, que lo lleva a sostener que entre dos números enteros existen infinitos números reales. Aquí nos podemos cuestionar sobre ¿cómo canalizar situaciones de enseñanza y aprendizaje que inviten a la reflexión sobre el concepto de cardinalidad de conjuntos infinitos, y particularmente la gestación de la acepción de infinito actual?, preguntas que, como investigadores, estamos interesados en responder en otras indagaciones.

Lo incierto aparece también en sus respuestas, apelando a lo físico, sobre todo teorías no comprobadas sobre el Universo a los cuales ya nos hemos referidos en los anteriores resultados. Veamos los siguiente dos comentarios: "*ya que no es necesario que sea vasto (como el universo) para considerarlo infinito, lo podemos hacer con los cabellos que hay en nuestra cabeza (que es algo pequeño). No tiene tamaño definido*"; "*si la teoría de múltiples universos es verdadera, lo que a nuestro universo puede parecerle infinito (siendo un universo en la molécula de otro más grande) entonces nuestro inmenso infinito, es para ello insignificante*", determinándolo entonces comparativamente, es decir, cuestiones consideradas pequeñas pero infinitas se contrastan con el Universo como la máxima expresión física de lo infinito, la cual, a su vez, podría volverse ínfima ante un infinito "*más grande*" o "*más extenso*" derivado de la posibilidad teórica no comprobada de múltiples universos.

Si reflexionamos matemáticamente entorno a lo expuesto, hay que rescatar que al tomar un segmento acotado de la recta real, como por ejemplo $[0,1]$, entonces él está constituido por una infinitud de elementos, capaz de sobrepasar los límites de la razón humana, y esa complejidad de pensar en lo infinito se convierte en una mayor riqueza en conocimiento cuando logramos comprender, como lo hizo Cantor, que ese segmento acotado tiene un cardinal transfinito mucho mayor que el de los números naturales, enteros y racionales, y este hecho de comparar un conjunto acotado y otro no, de acuerdo con Waldegg (1996, p. 116) se hace difícil de superar, pues en él interviene el infinito potencial como un obstáculo para comparar los dos conjuntos, "El infinito potencial se hace evidente en el conjunto no-acotado que permite disponer de las posiciones necesarias para continuar un proceso. Al contrario, este infinito permanece oculto en el conjunto acotado, produciendo con ello una parálisis ante el problema", entonces ¿cómo logra un individuo apropiarse adecuadamente de estas ideas?, ¿cómo logró Cantor superar las barreras ideológicas del momento y pensar distinto, para convertir su teoría en la gran revolución de las matemáticas?

Por otro lado, desde la visión de la formación de estos bachilleres dentro de esta especialidad, preocupa que ninguno dirigió su atención a lo infinitesimal en matemática, es decir a lo infinitamente pequeño. Hay que destacar que en el curso de Cálculo Diferencial de esta especialidad se aborda este tema para el estudio de conceptos como límite y derivada de funciones de variables real, y este concepto permanece en otros Cálculos Avanzados de esta misma especialidad, pero tal como afirma Garbín (2005a, p. 72): se induce a suponer que el "conocimiento previo del cálculo diferencial o integral es de ayuda, pero no de una manera significativa o determinante, para establecer y reconocer las conexiones 'oportunas' y 'fundamentales' entre los problemas planteados, así como de potenciar la noción del infinito actual". Más inquietante es que no mencionaran ejemplos de procesos iterativos, como la representación decimal de números racionales e irracionales, así como la relación que existe entre el diámetro del círculo y su radio (número π), o el problema de la diagonal de un cuadrado, entre otros números transcendentales que se enseñan en bachillerato en Venezuela.

En cuanto a la forma de representación del infinito se destaca que la principal razón que suponen ellos para el uso de la lemniscata ∞ es que ella representa un movimiento cíclico y continuo, es decir, siempre visto desde lo potencial; otras interpretaciones lo sugieren, por el contrario como un espacio cerrado y acotado, es decir, "*termina donde empieza*", lo que pudiera relacionarse con lo anterior; y otros lo vinculan al tiempo, como algo que "*siempre tendrá otro y otro momento*".

Cuando se les pide que sugieran otro símbolo para indicar lo infinito, escogen el círculo en su mayoría, las justificaciones que emiten, algunas son: "*ya que no tiene ni principio ni final pero a su vez tiene una forma o tamaño definido y se considera una paradoja, tal como lo es el infinito*", "*porque al igual que la lemniscata no tiene interrupción alguna solo sigue y sigue*", "*porque también es una línea fija continua y sin obstrucciones que sigue y sigue", "tampoco tiene principio ni fin*", "*porque este símbolo se ve que se repite*", todas ellas enlazadas a lo potencial y temporal; un bachiller sugiere el símbolo + por aquello de que siempre hay otro y otro (siguiendo con la idea de potencial) y otros recomienda los tres puntos suspensivos, muy utilizados para indicar la infinitud en conjuntos numéricos expresados por extensión.

Aun así, los datos recopilados sobre el infinito como objeto matemático fueron abarcados a mayor representatividad en el grupo focal, pues este dio posibilidad a la pregunta, la discusión y el razonamiento matemático. En este sentido a continuación se exponen los resultados, que se irán hilando a las ideas ya expuestas según sea el caso:

Nos interesaba que compararan la cardinalidad de algunos conjuntos numéricos. Al hacerlo con conjuntos finitos las respuestas certeras fueron casi inmediatas. Para conjuntos infinitos hemos colocado dos situaciones: comparar al conjunto de Números Naturales y Enteros en cuando a cardinalidad, y luego comparar la cantidad de elementos de los Naturales con uno de sus subconjuntos propios, en este caso hemos seleccionado al conjunto de los números pares. Hay correspondencia individual entre las respuestas que emiten para ambas situaciones. Todos los presentes primero admiten la infinitud de los conjuntos dados, pero hay un silencio casi total en cuanto a si uno tienen mayor cantidad que otro o si por el contrario son igual, lo que indica que hay cierta desconfianza o no hay una claridad total en la concepción de lo infinito, en ese sentido algunas optan simplemente por obviar esa opción, mientras que un grupo pequeño hace algunos comentarios más de tipo reflexivo que procedimental, es decir, en ningún caso se evidenció que el bachiller intentara hacer una comparación entre los conjuntos dados.

Al final la mayoría optó por alegar que la cardinalidad del conjunto de Números Enteros era mayor que la de los Naturales, entre las razones que exhiben, sobresalen las siguientes: "*Bueno aunque ambos son infinitos, los números enteros tienen mayor cardinalidad ya que los números naturales son infinitos por el lado positivo, mientras que los enteros son infinitos por el lado positivo y por el lado negativo*", respuesta que no sostiene un argumento lógico matemático bien fundamentado, más allá de lo intuitivo y quizás lo visual; otro comentario basa su respuesta en lo que oye de sus docentes: "*Alguna vez una profesora mencionó que a pesar de que dos conjuntos sean infinitos, debemos saber que hay infinitos más grandes que otros y este es uno de los casos, por lo tanto aunque ambos conjuntos son infinitos, el conjunto de los números naturales es más pequeño que el conjunto de los números enteros*"; todas estas cuestiones se transportan a la segunda situación planteada, expresando que "*Pasa igual que al comparar los enteros con los naturales, ambos son infinitos, pero uno más pequeño que el otro, puesto que el conjunto de los números pares está contenido en los naturales*", que es un explicación representativa de la mayoría, aseverar que uno está contenido en el otro.

De los presentes, solo dos bachilleres ponen en juicio el asunto de si son o no iguales en cardinalidad; e incluso uno de ellos afirma no haberse puesto como tarea escribir todos los número naturales, con todo, son ellos dos quienes, sin hacer procedimientos, dicen que si ambos son infinitos queda la duda si son de igual cardinalidad, y uno de ellos se pregunta "*¿puede asumirse el término doblemente infinito?*", lo que nos indica que está pensando en el infinito como un número. Asimismo, hay que destacar que sólo un alumno miró la posibilidad de usar la biyección entre ambos conjuntos, planteándolo de forma interrogativa, pese a que al final llegó a la misma conclusión que el resto de sus compañeros, y aquí nos apoyamos con Waldegg (1996, p. 116) cuando dice que "Existe un rechazo a usar el criterio de la biyección para comparar un conjunto con uno de sus subconjuntos propios, aun en el caso de que haya una instrucción al respecto"

Ahora bien, si relacionamos estas preguntas con la siguiente que hemos realizado en el grupo focal, el análisis es particularmente interesante. Al interrogar: ¿puede el infinito ser más infinito de lo que ya es?, en su mayoría, de los que dicen que el infinito de los naturales es más pequeño que el de los enteros (o respuestas análogas con los naturales y los pares), alegan ahora que no es posible que existan infinitos más grandes que otros, mientras que los que dudaron sobre si es o no, también mantienen esa misma opción. Solo tres declaran que sí, de los cuales solo uno da la siguiente explicación: "*porque a través del tiempo las cosas van evolucionando. Además por nosotros ser limitados se nos hace aún más estrecho el infinito por ejemplo el universo*", respuesta que parece estar dentro de las categorías tiempo y lo muy grande; manteniéndose la postura de obviar la lógica.

Más allá de los traspiés que pueden tener en sus respuestas, reflexionamos en que no hay una formalidad en sus ideas, no se observan procedimientos y mucho menos algún tipo de demostración, esto nos lleva a preguntarnos ¿cómo lleva el alumno su proceso de maduración de los conceptos, definiciones y demostraciones en la matemática?, más aún

¿cómo propiciar una fundamentación sólida en estos estudiantes de matemática que le permita cuestionarse y cuestionar a sus docentes?, ¿cómo encaminar la enseñanza de la matemática hacia una construcción social del conocimiento, particularmente en temas relacionados a lo infinito, sin que ello implique un estudio separado sobre el tema?, cuestiones que creemos ameritan un constructo teórico dentro de la Educación Matemática.

Las actividades siguientes consistieron en mirar lo infinito desde procesos iterativos relacionados a algunos números reales y sus aproximaciones. Al solicitar a los participantes expresar varios números racionales dadas en fracciones en sus expresiones decimales y luego los hemos cuestionado sobre la última cifra decimal, por ejemplo en las fracciones 1/3 y 1/7, lo cual incita inmediatamente a un estudiante de matemática a identificar que se tratan de expresiones decimales periódicas e infinitas, en este sentido aparecieron comentarios como que para 1/3 la última cifra decimal es 3, si bien, al cuestionar sobre la posición decimal de ese último 3, las contestaciones merman; más interesante aún fue enfrentar al estudiante a la suma de tres veces la fracción 1/3 en su forma decimal, es decir el valor de la suma 0,3333…+0,3333…+0,3333…=?, ¿será un número menor, mayor o igual a 1?, descartándose rápidamente que sea mayor y afirmándose como respuesta unánime que su valor es menor que 1, situación que paradójicamente (como el infinito) resulta de mayor riqueza matemática cuándo se pide hacer la misma suma en su forma fraccionaria; de acuerdo con Mena-Lorca y otros (2015, pp. 349-350) esta situación entra dentro lo que se ha denominado un obstáculo didáctico, ellos refieren que:

> habitualmente, para determinar cuál de dos números expresados en su versión decimal es menor, se utiliza el orden lexicográfico,… y parece natural, entonces, concluir que 0,999… sea menor que 1,000…, pues la enseñanza no suele detenerse en la falta de unicidad de la expansión decimal de algunos números reales. Adicionalmente, la notación de puntos suspensivos utilizada para señalar expansión decimal periódica es ambigua, ya que se usa también para la de números irracionales y, aun, para señalar una sucesión de números cualquiera.

La situación anterior hace que los alumnos empiecen a cuestionar tales situaciones, a enfrentarse a un choque con lo aprendido, a inquietarse, pero también resulta paradójico que ese enfrentamiento no es consigo mismo, sino con quien tiene enfrente, es decir, pareciera que el alumno no busca sus propias verdades, sino que las solicita de esa persona que supuestamente tiene mayor autoridad en el tema, ¿estamos formando para la criticidad?, o ¿son simples repetidores, imitadores de lo que se les enseña como verdad total?; y es, quizás, el infinito una vía plausible para enfrentarnos a las tradiciones que se nos han concedido por transmisión, y así lo asumió Cantor quien en su ensayo intitulado “Sobre los conjuntos lineales” publicado en 1883, escribe:

> Es tradicional considerar al infinito como lo indefinidamente creciente o bajo la forma, estrechamente ligada a la anterior, de una sucesión convergente, que adquirió durante el siglo XVII. Por el contrario, yo considero al infinito en la forma definida de algo ya consumado, de algo capaz, no sólo de formulación matemática, sino de ser definido por un número. Esta concepción del infinito es opuesta a las tradiciones que durante tanto tiempo me fueron tan queridas, y fue más bien contra mi

> propia voluntad el cómo me vi forzado a aceptar este otro punto de vista. Pero varios años de ensayos y de especulaciones científicas me han conducido a estas conclusiones como a una necesidad lógica, y por esta razón yo creo que no se me podrán presentar objeciones válidas que yo no pueda refutar. (Franco y Ochoviet, 2006, pp. 510-511).

Esta actitud que asumió Cantor en su momento, bajo la presión de compañeros y de las creencias religiosas que imperaban en el momento no le hizo vacilar sobre su teoría, a través de la cual logra revolucionar las matemáticas modernas.

Las otras situaciones de aprendizaje consistieron por un lado, calcular el valor decimal de $\sqrt{2}$ a través de aproximaciones, y determinar la última cifra decimal y finalmente, medir, con hilo y reglas geométricas, aproximaciones para el diámetro y la longitud de distintos objetos circulares de diferentes tamaño, y hallar una aproximación para el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. Estas actividades son bastante conocidas para un estudiante de matemática de los niveles avanzados, por lo que la tarea no es tan complicada en lograr; y, a través de interrogantes, los estudiantes fueron percatándose cómo algunos procesos iterativos determinan una totalidad, una unidad, acercándolos de esta forma a una idea más reflexiva sobre el infinito.

6. Conclusiones

Tener una concepción clara sobre un objeto matemático, como es el infinito, permea en dos cuestiones claves para la Educación Matemática: por un lado conocer los procesos de maduración de los conceptos matemáticos y por el otro dibujar una pedagogía "distinta" que fundamente las ciencias de la educación.

En este sentido creemos que la investigación apuntala, por un lado, a que los procesos de maduración de los conceptos matemáticos dependerán en gran medida de la libertad de pensamiento que los docentes estimulen en sus discípulos, y por el otro lado, que hay una incipiente mezcla entorno al concepto infinito donde prevalecen sus creencias por encima de su desarrollo profesional, y su pensamiento lógico matemático.

En cuanto a lo primero, la investigación parte por convenir que cualquier constructo del pensamiento inicia con la pregunta, con la inquietud, y si no existe ese proceso las competencias no se irán alcanzando. Particularmente, los resultados muestran que no hay en el estudiante una maduración del concepto infinito y de otros objetos matemáticos vinculados a él; lo que le induce a emitir comentarios que se contradicen por sí mismos, no logrando argumentar los conceptos formalmente.

Decía Borges (1928, p.56), en su libro "*El idioma de los Argentinos*":

> Sospecho que la palabra infinito fue alguna vez una insípida equivalencia de inacabado; ahora es una de las perfecciones de Dios en la teología y un discutidero en la metafísica y un énfasis popularizado en las letras y una finísima concepción renovada en las matemáticas.

Extracto que se refleja perfectamente en el grupo de estudiantes intervinientes en el proceso de investigación; más allá de estos supuestos, enfatizamos en que, como lo argumenta Borges, esta noción en la matemática debe representar un concepto bien elaborado, y por lo tanto quienes ejercen la labor de su enseñanza deben tener claridad en esta materia.

Por otro lado, a pesar de que un concepto matemático pueda estar bien expuesto lógicamente, y se haya dado como aprehendido por los estudiantes, aun así hay resistencia en ellos en abordar lo infinito desde la formalidad matemática teórica, pues prevalece lo intuitivo; "las personas pueden seguir pensando lo que un enunciado les sugiere, de manera independiente y aun contradictoria a lo que la prueba matemática establece" (Mena-Lorca y otros, 2015, p. 350); entonces es, como ya hemos razonado, un predominar de sus creencias por encima de lo que la lógica les muestra.

Waldegg (1996, p.116), expresa: "Las nociones intuitivas son un obstáculo para aceptar los conceptos formales, aunque no todos los estudiantes comparten las mismas intuiciones locales. Algunos responden muy parecido ante una situación propuesta, pero, cambiando la situación, no reaccionan de manera similar". Si no hay una claridad conceptual respecto al infinito ¿cómo logra un alumno apropiarse significativamente de conceptos como límite, sucesiones, y otros?, ¿de dónde parten los docentes de matemática para una adecuada programación didáctica sobre estos conceptos?, parece que solo lo suponen desde las ideas intuitivas.

Además, creemos que los estudiantes están derivando hacia lo infinito cuestiones que solo son propios del ámbito de lo matemáticamente finito, quizás precisamente porque no ha habido un estudio formal del infinito. La cardinalidad se estudia para conjuntos finitos, en términos de que dos conjuntos tienen la misma cardinalidad si poseen la misma cantidad de elementos. Entonces, quizás los estudiantes manejan un concepto en el ámbito de lo finito y lo aplican al infinito sin cuestionarse si esto sigue siendo válido allí. ¿Por qué no lo cuestionan?, quizás porque no tienen autonomía en su proceso de aprendizaje.

En resumen destacamos tres aspectos: a) la concepción sobre lo infinito viene determinada desde los contextos sociales y no desde el campo profesional específico, asociando el término a cuestiones intangibles e inciertas; b) lo literario es más aprehensible para los estudiantes, quizás porque está estrechamente ligado a su propia concepción sobre el objeto matemático estudiado y c) posiblemente la falta de autonomía en el proceso de aprendizaje convierte al alumno en un repetidor de sus propios maestros, imposibilitándolo para cuestionar lo que se le enseña o por lo menos para asirse de un concepto por convencimiento propio.

Referencias

Aristóteles (1995). *Física*. Barcelona, España: Editorial Gredos, S.A.

Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Argos.

Bombal Gordon, F. (2010). Un paseo por el infinito. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 104 (2) [en línea], recuperado de http://www.rac.es/ficheros/doc/00984.pdf

Borges; J.L. (1928). *El idioma de los argentinos*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Neperus.

Borges; J.L. (1996). *El Aleph*. Buenos Aires, Argentina: Emecé Editores, SA.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3) [en Línea], recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/2740/274032530006.pdf

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. En Nesher, P. & Kilpatrick, J. (Eds.), *Mathematics and Cognition*, 113-134. Cambridge: Cambridge University Press.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En David Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, (volumen 1, pp. 3-21). Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Ferrater Mora, J. (1964). *Diccionario de filosofía*. Buenos Aires: Editorial Sudamericana.

Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof. For the Learning of Mathematics, 3(2) [en línea], recuperado de https://www.jstor.org/journal/forlearningmath

Fraenkel, A. (1969). Teoría abstracta de conjuntos. *Memoria Académica*, N° 2, [en línea], recuperado en http://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/art_revistas/pr.1132/pr.1132.pdf

Franco, G. y Ochoviet, C. (2006). Dos concepciones acerca del infinito. El infinito actual y el infinito potencial. En Martínez, Gustavo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 509-513). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. [En línea], recuperado en: http://funes.uniandes.edu.co/5592/

Garbin, S. y Azcárate, C. (2001). El concepto de Infinito Actual. Una investigación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de bachillerato. *SUMA: Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, N°38, pp.53-68

Garbin, S. y Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: Acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Revista Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 20(1), [en línea], recuperado en http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/21786/21620

Garbin, S. (2005a). Ideas del infinito, percepciones y conexiones en distintos contextos: el caso de estudiantes con conocimientos previos de cálculo. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 23(1), [en línea], recuperado en http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/22005

Garbin, S. (2005b). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(2), [en línea], recuperado en http://www.redalyc.org/pdf/335/33580205.pdf

Hawking, S. (2007). *La Teoría del Todo*. Colombia: Editorial Debate.

Jato Canales, S. (2012). *El infinito en las matemáticas de la Enseñanza Secundaria.* Trabajo fin de Máster inédito. Universidad de Cantabria. [Trabajo en línea]. Recuperado en https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/1724/Sergio%20Jato%20Canales.pdf?sequence=1

Lestón, P. (2011). *El infinito en el aula de matemática. Un estudio de sus representaciones sociales desde la socioepistemología.* Tesis doctoral inédita. Instituto Politécnico Nacional. [Tesis en línea]. Recuperado en http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/Leston_2011.pdf

Mena-Lorca, A.; Mena-Lorca, J.; Montoya-Delgadillo, E.; Morales, A y Parraguez, M. (2015). El obstáculo epistemológico del infinito actual: Persistencia, resistencia y categorías de análisis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(3), [en Línea], recuperado en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33543068003

Moscovici, S. (1979). *El psicoanálisis, su imagen y su público*. Buenos Aires, Argentina: Huemul S.A.

Ortiz; J. R. (1994). El concepto de infinito. *Boletín Asociación Matemática Venezolana*, Vol. I, N° 2, 59 – 81.

Tall, D. (1991) The psychology of advanced mathematical thinking. En Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, (pp. 3-21). Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Tiberghien, G. (1872). *Teoría de lo Infinito. Disertación*. Tesis doctoral inédita, Universidad de Brusela – Facultad de filosofía y letras. Traducción de G. Lizarraga. Madrid: España.

Valdivé, C. y Garbin, S. (2013) ¿Cómo piensan los estudiantes el infinitesimal antes de iniciar un curso de análisis matemático? *Paradigma*, XXXIV (1), [en Línea], recuperado en http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512013000100008

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 1(1), 107 – 122.

Ronnys Jesús Vicent Millán. Profesor en Matemática; Magíster en Educación Matemática; cursando estudios Doctorales en la UPEL. Organizador, ponente, tallerista y conferencista en diversas jornadas. Miembro del PEII desde 2014. Jurado de trabajos de maestrías, de ascenso y de concurso de oposición. Árbitro en diversas jornadas y en revistas a nivel nacional e internacional. Tutor de trabajos de grado para la Maestría en Educación Matemática. Profesor en la Categoría Agregado del Departamento de Matemática (Dedicación Exclusiva) de la UPEL-Maturín. Coordinador del Programa de Matemática. Miembro de la Asociación Venezolana de Educación Matemática y actualmente Secretario de la Junta Directiva Nacional para el período 2016-2019. Publicación de varios artículos en revistas indizadas y arbitradas nacionales e internaciones así como en memorias de eventos; entre ellos: "Vinculación entre lo afectivo y lo cognitivo en la enseñanza y aprendizaje de la matemática"; "Saberes Geométricos en Trabajos de Oficios de Comunidades Rurales"; "El

caleidoscopio en la enseñanza de la geometría"; "Reflexiones de la práctica profesional docente del estudiante de matemática: visión desde la formación"; "Aportes para la revisión de los textos de Matemática de la Colección Bicentenario" y "Los textos de Matemática de la Colección Bicentenario: una revisión con pertinencia social y didáctica"

Nelly Amatista León Gómez. Profesora en Matemática; Master en Estadística Aplicada (Universidad de Pittsburgh) y Magíster en Educación, Mención Administración de la Educación Superior (UPEL-Maturín). Profesora Titular Jubilada, actualmente facilitando cursos de Pregrado y Postgrado. Presidente fundadora de la Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT). Coordinadora del programa de Formación de Profesores Instructores de Matemática. Miembro fundador del Núcleo de Investigación en Educación Matemática. Miembro del Comité Internacional del CIAEM. Representante por Venezuela ante el Comité Internacional de REDUMATE. Miembro de Comité Editorial de la Revista Educación Matemática de ASOVEMAT. Publicación de más de 20 Artículos en Revistas y Memorias de Eventos; entre las últimas publicaciones están: "Metodologías que se utilizan en la investigación en Educación Matemática: Caso UPEL-IPM"; "Formación Inicial y Continua del Docente de Matemática (Informe Venezuela)"; "Planificación de la matemática escolar como elemento clave en la formación del docente"; "Qué enseñar sobre un tema de la matemática escolar y cómo enseñarlo". Participación como ponente y conferencista a nivel nacional e internacional. Miembro del Comité Científico del I y II Congreso de educación Matemática de América Central y el Caribe (CEMACYC). Miembro fundadora de la REDUMAT (Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe. Miembro del Comité Internacional de REDUMATE.