ALEXANDRIA

ALEXANDRIA

Revista de Educação em Ciência e Tecnologia

Engenharia Didática para o Ensino de Variável Complexa: Visualização de Conceitos Relacionados ao Processo Matemático de Integração

Didactical Engineering for the Teaching of Complex Variable: Visualizing the Concepts Related to the Mathematical Integration Process

Francisco Regis Vieira Alves[a]

a Departamento de Matemática e Física, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza Brasil – fregis@ifce.edu.br

Palavras-chave:
Engenharia didática. Visualização e ensino. Integração de funções. Variável complexa. Tecnologia.

Resumo: O presente trabalho apresenta uma proposta, de cunho teórico e descritivo, para uma Engenharia Didática – ED, para um contexto do ensino de certos assuntos específicos da Análise Complexa. Dessa forma, dando ênfase às duas fases sistemáticas iniciais, nomeadamente conhecidas como análise preliminar e análise *a priori*, o trabalho tende a acentuar a concepção, estruturação e descrição de duas situações didáticas de ensino, afetadas pelos pressupostos da Teoria das Situações Didáticas – TSD. Desse modo, ao assumir um caráter imprescindível da habilidade de visualização, consubstanciando uma ação do aprendiz na perquirição de propriedades relacionadas com o processo de integração na variável complexa, o escrito indica, ainda, determinados aspectos que devem ser explorados com o *software GeoGebra*, com o escopo de evidenciar outras propriedades e significações do símbolo $\int_{\gamma} f(z)dz$ que extrapolam o sentido matemático logicizante.

Keywords:
Didactical engineering. Visualization and teaching. Integration of functions. Complex variable. Technology.

Abstract: This paper presents a theorical and a descriptive proposal for a Didactical Engineering – DE, in the context of teaching of a certain specific subject in Complex Analysis. Thus, emphasizing the two initial systematic phases, namely known as preliminary and a priori analysis, it tends to accentuate a design a conception, estructuration and description of two didactical situations for the teaching, affected by the assumptions of the Theory of Didactical Situatibons – TSD. Thus, to take as essential character of the ability of visualization, consolidating an apprentice action in searching of some properties related to the process of integration in the complex variable, the works also indicates certain aspects that should be explored with the GeoGebra software with the scope of enphasize some properties and significations of the symbol $\int_{\gamma} f(z)dz$ that go beyond the mathematical and logical sense.

Introdução

De modo indubitável, presenciamos nas últimas décadas, uma contribuição sem precedentes de um *design* de investigação, originário da vertente francesa em Didática de Matemática (e tradição francófona) que, a partir da demarcação de um campo epistemológico específico e da análise e estudo das relações de práticas que dele emergem, atingiu um *status* e reconhecimento internacional de metodologia de pesquisa e, desde a década de 70, tem proporcionado um progresso evolutivo, cumulativo dos conhecimentos metodológicos e didáticos condicionados, epistemologicamente, por teorias matemáticas específicas.

Desse modo, tendo em vista a identificação da escassez de trabalhos sobre o ensino da teoria das funções na variável complexa, propomos uma Engenharia Didática – ED, com um tema relacionado ao processo matemático de integração de funções na variável complexa (ALVES, 2017). No rol de possíveis justificativas sobre a relevância de sua discussão e repercussão, assinalamos o caráter indefectível de práticas acadêmicas anacrônicas que persistem em tornar hegemônico o caráter algebrizante e formal de certos conteúdos no *locus* acadêmico, nomeadamente os conteúdos de Análise Complexa – AC (ALVES, 2017; ALVES; MARINHO, 2017; ALVES, 2013; ÁVILA, 1987; MARINHO, 2017).

Por outro lado, por intermédio de uma perspectiva de abordagem metodológica influenciada por alguns autores de compêndios especializados e investigações sobre a matéria assinalaremos, nas seções subsequentes, o papel da percepção e da visualização (ALVES, 2012), no sentido de proporcionar aos estudantes de um curso de graduação, um cenário de aprendizagem que não negligencia a tecnologia atual e que permite ao *expert*, vislumbrar determinados momentos dialéticos na mediação e no real funcionamento da sala de aula.

Ademais, tendo em vista a descrição das fases iniciais de uma ED, conhecida na literatura como análise preliminar e análise *a priori*, abordaremos e descreveremos duas situações-didáticas que evidenciam o caráter dual de conceitos matemáticos específicos no âmbito dos estudos da AC. De modo prosaico, a perspectiva epistemológica que passaremos a discutir, permite a significação de conceitos clássicos em AC, do ponto de vista matemático, bem como do ponto de vista físico interpretativo (POLYA; LATTA, 1974)

De forma imediata, assumindo alguma familiaridade do leitor com determinados pressupostos de uma ED, bem como suas exigências e considerável sistematização, no próximo segmento discutiremos, com brevidade, os elementos que concorreram para a sua evolução e conquista de um espaço acadêmico. Logo em seguida, após demarcar nosso campo de interesse epistemológico, descreveremos os elementos teóricos que constituem o fio condutor para nossa ED que restringir-se-á, no presente caso, ao contexto puramente teórico.

Sobre a Engenharia Didática (Clássica) (ED)

Recordamos que “o término de uma Engenharia Didática designa um conjunto de sequências de classes de situações concebidas, organizadas e articuladas no tempo, de maneira coerente por um professor-engenheiro, com o fim de realizar um projeto de aprendizagem para uma população determinada de alunos” (DOUADY, 1995b, p. 62). “No ponto de partida de um processo de uma Engenharia Didática, estamos localizando um conteúdo ou problema concreto para ser ensinado e aprendido e geralmente um problema didático relacionado a ele” (BARQUERO; BOSCH, 2015, p. 251).

Reconhecemos, entretanto, uma profusão de trabalhos (ALVES, 2011) que permitiu a consolidação e a demarcação de um campo de estudos aprofundados, bem como a evolução de um *design* de investigação científica (MARGOLINAS; DRIJVERS, 2015), que se apoiou numa metáfora que remete a um planejamento sistemático de um engenheiro, tendo em vista a concepção e ajuste de um projeto preciso. Desse modo, a terminologia Engenharia Didática – ED foi usada para designar um *modus operandi* de investigação ou ainda como “uma metodologia para a análise de situações didáticas” (ROBINET, 1983, p. 2).

Margolinas (2004, p. 3) menciona que “um campo de estudo não se constrói sem uma história”. E, deste modo, Margolinas (2004, p. 3) fornece dois elementos que concorreram em sua gênese, a saber: os de natureza histórica e outros de natureza teórica, para a constituição da Didática da Matemática. A Didática da Matemática francófona se apresentou historicamente nos anos 60, num contexto de crise e influência do pensamento bourbakiano. Como de costume, “o surgimento deste campo se mostrou em oposição a certas correntes de pensamento e de pesquisa e em concordância com outras”. (MARGOLINAS, 2004, p. 3).

Margolinas (2004, p. 4) esclarece que “a proximidade natural da Didática da Matemática com a Matemática tem sem dúvida uma vinculação com um papel e função de natureza epistemológica e metodológica” e, dessa forma, tanto a ED, bem como outras perspectivas de teorização de determinados fenômenos precisos da realidade como, por exemplo, a Teoria das Situações Didáticas – TSD, detém o potencial de permitir a identificação de elementos invariantes ou assume lugar especial, na medida em que nos atemos aos fenômenos de ensino e da aprendizagem em Matemática.

De acordo com extensa literatura (ARTIGUE, 1984, 1989; 1995; HADDAD, 2012; LABORDE, 1997; ROBINET, 1983), identificamos as clássicas etapas previstas por uma Engenharia: (1) análises preliminares; (2) análise *a priori*; (3) experimentação; (4) análise *a posteriori* e validação. Adotaremos a perspectiva de Almouloud (2007) com o intuito de distinguir na etapa da análise *a priori*, o momento de descrição e concepção (e discussão teórica) de situações didáticas para o ensino de determinadas noções, intimamente relacionadas com o processo de integração de funções na variável complexa. Na figura 1 seguinte, divisamos um esquema mnemônico proposto por Barchero e Bosch (2015) no sentido de situação os pressupostos didáticos e científicos envolvidos no uso do *design* de investigação que conhecemos como Engenharia Didática (ED) e as fases correspondentes indicadas.

Barchero e Bosch (2015) explicam a primeira fase da seguinte forma:

> A primeira fase, denominada análise preliminar, inclui principalmente um questionamento epistemológico do conteúdo matemático em jogo e da necessidade de introduzi-lo na escola, e um estudo das condições e restrições oferecidas pelas instituições onde o ensino e o processo de aprendizagem deve acontecer. Este é um primeiro passo essencial em que as hipóteses de pesquisa são formuladas e o conteúdo matemático a ser ensinado e aprendido é questionado, geralmente considerando diferentes tipos de fenômenos didáticos hipotéticos envolvidos. É também nesta fase que os resultados de pesquisas anteriores podem ser reinvestidos. (BARQUERO; BOSCH, 2015, p. 251).

Logo em seguida, Barchero e Bosch (2015) explicam a segunda fase de uma ED:

> A segunda fase diz respeito ao projeto e análise *a priori*. Esta fase corresponde para a declaração de como o conteúdo em jogo é considerado ou modelado dentro pesquisa didática. Um nível matemático e didático pode ser distinguido aqui, primeiro "definir" ou "caracterizar" o conteúdo (análise matemática), e depois propor como fazê-lo emergir de questões problemáticas dentro de uma seqüência de situações concretas (análise didática). Nos quadros teóricos aqui considerados, estas análises são realizadas em termos de situações matemáticas e didáticas (TDS) ou praxeologias matemáticas e didáticas (ATD). (BARQUERO; BOSCH, 2015, p. 251).

No que concerne à etapa de experimentação, assumiremos uma posição concorde com Perrin-Glorian e Belleman (2016, p. 25), acrescentando as seguintes terminologias: realização, observação e coleta de dados. Assim, constatamos que "a realização é feita sob a responsabilidade do professor que lidera a aula. Os pesquisadores observam e coletam dados. Observação e coleta de dados depende naturalmente da questão de pesquisa e do tamanho da Engenharia Didática" (PERRIN-GLORIAN; BELLEMAN, 2016, p. 25). Aqui, assinalar-se-á uma atenção com a variável de pesquisa temporal, posto que, nos estudos em Engenharia Didática Clássica, ocorreu um desenvolvimento de engenharias extensas e prolongadas, em consonância com os problemas investigativos suscitados e perquiridos, bem como, em consonância com as hipóteses da engenharia ou as hipóteses didáticas consideradas.

Finalmente, a análise *a posteriori* e a validação (interna e externa) (LABORDE, 1999) da Engenharia. Perrin-Glorian e Belleman (2016) explicam aspectos sobre a última fase:

> Na análise *a posteriori*, se torna necessário distinguir das observações, o que se releva do contingente e o que se releva do necessário. A teoria e as hipóteses da pesquisa conduziram na organização de uma situação ou de situações, isto é, um meio e uma sequência de questões atinentes a este meio (*milieu*) e que a análise *a priori* permite prever que os conhecimentos novos visados podem ser produzidos pelos estudantes a partir dos antigos conhecimentos e sua interpretação das retroações do meio que correspondem às suas ações sobre o meio (*milieu*) (BARQUERO; BOSCH, 2015, p. 251).

Diante do cenário anterior, a análise *a posteriori* permite prever se o meio, se o cenário demarcado para o desenvolvimento das sequências, permitiu a determinação e determinação de informações representativas e não secundárias para a investigação. “O confronto da análise *a priori* com a análise *a posteriori* permite retornar à situação ao mesmo tempo (mudar o ambiente ou as condições de interação do aluno com o meio) e na teoria (revisão das hipóteses, refinamento de certos conceitos teóricos)” (PERRIN-GLORIAN; BELLEMAN, 2016, p. 27). Abaixo divisamos sua organização sistemática para a pesquisa.

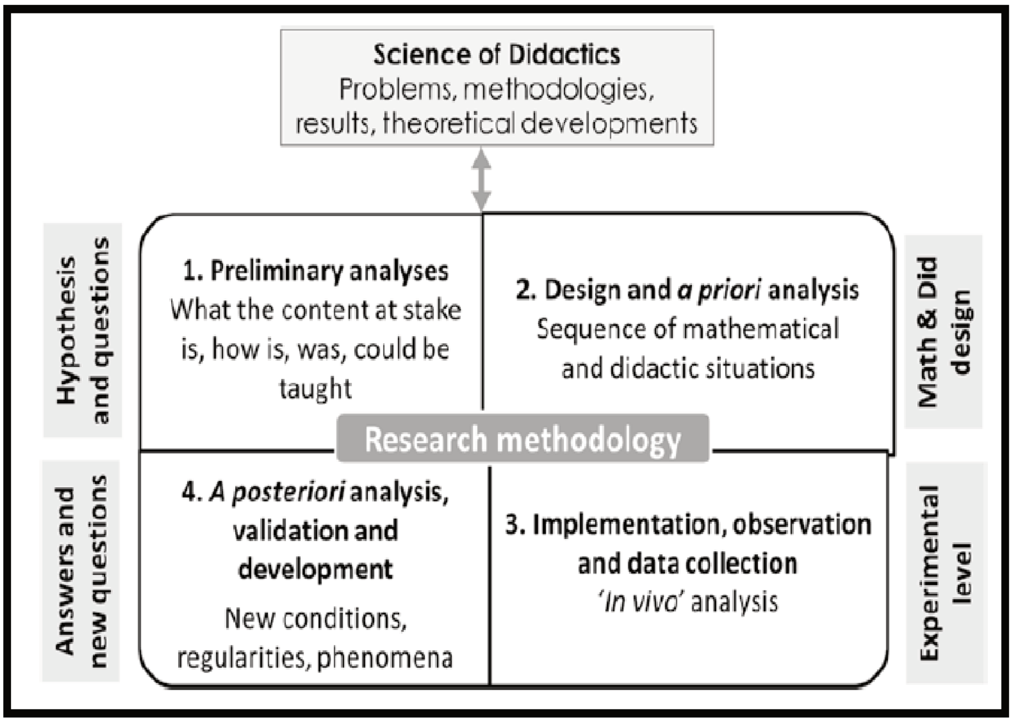

Figura 1 – Barquero e Bosch (2015, p. 252) descrevem as fases de uma Engenharia Didática (ED)
Fonte: Barquero e Bosch (2015)

Ademais, tendo em vista o caráter estruturante da teoria e matematizado das situações que buscamos estruturar, prevemos a presença do professor na participação do debate coletivo que deve ser instalado, a partir das relações entre a tríade (alunos – professor – conhecimento) (DOUADY, 1995a). No próximo segmento, passaremos a identificar/demarcar nosso campo epistemológico de interesse e, de modo especial, evidenciaremos o processo de integração.

Sobre o processo de integração na variável complexa

Reconhecidamente, o processo de integração de funções na variável complexa representa a generalização de certos elementos que costumeiramente deparamos na teoria das funções de uma variável real (BOTTAZZINI, 1986). Shokranian (2011, p. 143) esclarece nossa ilação que revela um ponto de vista matemático ampliado quando observa:

> Na teoria das funções reais, originalmente, a integração foi usada para calcular a área de uma figura geométrica ou o volume de um sólido. Diferentemente, na variável complexa, a teoria da integração é uma ferramenta para estudar funções analíticas, tais como os Teoremas de Cauchy e outros que mostraremos. Por outro lado, uma das aplicações fundamentais das integrais das funções complexas é também o cálculo das integrais definidas de uma variável real [...] (SHOKRANIAN, 2011, p. 143)

Shokranian (2011) faz referência de modo direto ao processo de integração de funções na variável complexa e, com origem no excerto acima, podemos conjecturar a possibilidade de surgimento de certos entraves, quando nos atemos ao ensino e a aprendizagem desse conteúdo no *locus* acadêmico. Por outro lado, em alguns de nossos trabalhos, temos propugnado o caráter imprescindível da habilidade cognitiva que nominamos por visualização e a percepção de determinadas propriedades matemáticas (ALVES, 2016).

Com efeito, assumimos posição concorde com Medvedev (1991), Needham (2000), Wegert (2012) e, sobretudo, com a perspectiva de Polya e Latta (1974). Esses últimos autores desenvolvem uma abordagem geométrica, com apelo a determinados elementos e fenômenos físicos, relativamente ao processo de integração de funções na variável complexa, manifestando uma interpretação diferenciada para a seguinte simbologia $\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} f(\mathrm{x}+\mathrm{i}\mathrm{y})dz$, aonde f é uma função na variável complexa e γ designa uma curva ou um caminho descrito por $\gamma:[\mathrm{a},\mathrm{b}]\to \mathrm{C}$, $a,b \in IR$. Observamos, ainda, que γ descreve uma parametrização da curva (MEDVEDEV, 1991).

Por outro lado, a partir de uma intenção metodológica que entendemos ser diferenciada (ALVES, 2018), para a abordagem de AC, Polya e Latta (1974) fazem agregar significados físicos para o processo matemático de integração. Nesse sentido, com o escopo de descrever uma interpretação física para funções do tipo $f(z) = f(\mathrm{x}+\mathrm{i}\mathrm{y})$ estabelecem:

> Vamos focar nossa atenção num ponto em um rio largo, fluindo de forma constante. Muitas partículas passam por tal ponto, sempre partículas diferentes passam, porém, todas passam com a mesma velocidade se o fluido for realmente estável. Todavia, uma certa velocidade pertence a tal ponto, representada por um vetor possuindo uma magnitude definida e direção. De modo geral, a cada ponto da corrente fazemos corresponder um vetor, representando a velocidade do fluxo no ponto. O fluxo constante de um rio nos sugere um importante conceito de campo de vetores. (POLYA; LATTA, 1974, p. 61)

O expediente metafórico dos autores acima evolui, com o cuidado matemático necessário, com o escopo que pensamos ser o mais importante e vinculado ao nosso assunto, na direção de uma interpretação física para uma integral de linha, para funções de variável complexa. Com efeito, com arrimo do apelo mnemônico que vislumbramos na Figura 2, compreendemos o esforço metodológico dos autores no sentido de uma transposição didática (CHEVALLARD, 1991), de cunho intuitivo e interpretativo para a noção de integral.

$$\boxed{\int_C w\, dz = \text{work} + i\ \text{flux}}$$

Figura 2 – Polya e Latta (1974, p. 146) propugnam uma significação física para a noção de integral de linha como a contribuição do fluxo e do trabalho
Fonte: Polya e Latta (1974)

Não obstante, antes de atingirmos o patamar de discussão envolvendo o significado matemático pretendido na Figura 2 acima, precisamos compreender de que forma uma função analítica, na variável complexa, produz um campo vetorial, com divergência nula e se mostra irrotacional, ou seja, vale que: $div(\overline{w})=0$ e $\text{rot}(\overline{w})=(0,0,0)=\vec{0}$. Para tanto, Polya e Latta (1974, p. 143) aconselham em considerar "um vetor $\overline{w}=u+iv$ associado a cada ponto (x,y) de um domínio bidimensional. Neste campo, desenhamos uma curva C com ponto inicial a e ponto final b". Pouco mais adiante, os autores mencionam que o vetor $\overline{w}=u+iv$ pode ser considerado com uma força, ou uma densidade atual num fluido ou fluxo bidimensional.

Os autores advertem que cada interpretação do campo vetorial produz uma interpretação própria da curva C. De fato, quando consideramos $\overline{w}=u+iv$ como uma força, o expediente da abordagem de Polya e Latta (1974, p. 143) consiste em pensar a curva C como um caminho, ao longo do qual uma partícula material se desloca. A direção de tal movimento, representado por um vetor tangente unitário à curva C, indicado por $e^{i\tau}$, em que $'\tau'$ é o ângulo entre a tangente e o eixo positivo das abcissas. (Figura 3, ao lado direito)

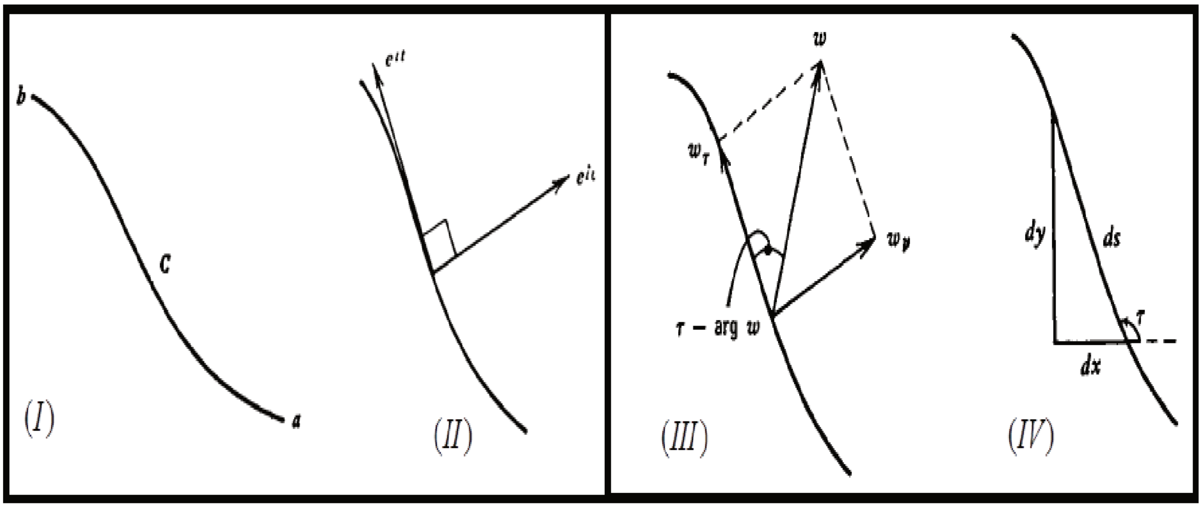

Figura 3 – Polya e Latta (1974, p. 143) produzem uma significação dual para um vetor $\overline{w}$ afim de descrever o processo de integração
Fonte: Polya e Latta (1974)

Por outro lado, podemos interpretar o vetor $\overline{w}=u+iv$ como "a densidade atual, então é natural considerar C como uma fronteira relativamente a qual um ponto material se move. Para tal movimento, o vetor normal unitário à curva será $e^{i\nu}$, é importante" (Idem, 1974, p. 143). Nesse caso, então, o ângulo $'\nu'$ é o ângulo entre a normal e o eixo positivo das abcissas. Logo em seguida, com origem na Figura 3 - I, Polya e Latta assinalam a seguinte relação $e^{i\tau}=i\cdot e^{i\nu}$ oriunda das escolhas anteriores.

Ademais, obtemos $e^{i\tau}=\cos\tau+\text{i}\cdot\text{sen}\,\tau=i\cdot(\cos\nu+\text{i}\cdot\text{sen}\,\nu)=((-sen\nu)+i\cos\nu)=i\cdot e^{i\nu}$ e, assim, vale $\cos\tau=-sen\nu$ e $\text{sen}\,\tau=\cos\nu$ (*). No passo seguinte, passam a considerar as projeções de $\overline{w} = u + iv$ nas direções tangente e normal à curva C que chamam de w_τ e w_ν, respectivamente. Ora, são números reais, e são úteis no cálculo/determinação de várias quantidades físicas. Nesse cenário, Polya e Latta (1974, p. 144) comentam, inicialmente, uma interpretação física para a noção de integração:

> Considerando o vetor $\overline{w}$ como uma força, podemos computar o trabalho realizado pelo transporte de uma partícula material ao longo de C de a até b. Dada, então, ds para ser a diferencial do arco de C no ponto z. A contribuição deste elemento de arco para o trabalho realizado é $w_\tau ds$, isto é, a projeção da força vezes a distância, assim, o trabalho total é dado por $\int_C w_\tau ds$. (POLYA; LATTA, 1974, p. 144)

Reparemos, no excerto anterior, que a consideração passada do símbolo $\int_C$ confirma que os autores incluíram, no raciocínio anterior, a contribuição de todos os elementos de arco da curva C, sob um viés de interpretação mediante a noção de trabalho. E, logo em seguida, indicam outra forma de significar e interpretar os mesmos elementos do tipo "$w_\tau ds$". Com efeito, "consideraremos $\overline{w}$ como a densidade atual". Por tal expediente, passam a levar em consideração uma quantidade de matéria atravessando os elementos de linha ds, por unidade de tempo em $w_\nu ds$ ou, a componente normal vezes o comprimento de linha cruzado" (POLYA e LATTA, 1974, p. 144). De modo similar ao caso visto, a quantidade total de matéria atravessando C por unidade de tempo, o fluxo ao longo de C, é então indicado por $\int_C w_\nu ds$.

Ora, de acordo ainda com a Figura 3 – II (indicada acima), os autores escrevem $w_\tau = R \cdot \overline{w} \cdot e^{-i\tau} = |w| \cdot \cos(\tau - \arg \overline{w}) = \mathrm{u} \cdot \cos\tau + \mathrm{v} \cdot \mathrm{sen}\,\tau$. E, de modo semelhante, indicam ainda $w_\nu = R \cdot \overline{w} \cdot e^{-i\nu} = |w| \cdot \cos(\nu - \arg \overline{w}) = \mathrm{u} \cdot \cos\nu + \mathrm{v} \cdot \mathrm{sen}\,\nu$. Por outro lado, reparemos que $\int_C w_\tau ds = \int_C (\mathrm{u} \cdot \cos\tau + \mathrm{v} \cdot \mathrm{sen}\,\tau) ds$ e $\int_C w_\nu ds = \int_C (\mathrm{u} \cdot \cos\nu + \mathrm{v} \cdot \mathrm{sen}\,\nu) ds$.

Ora, com origem na Figura 2 – (IV), extraímos as seguintes relações: $\frac{dx}{ds} = \cos\tau$ e $\frac{dy}{ds} = \cos\tau$ (ver as Figuras 3 – III e 3 – IV).

Com origem nas relações (*), vemos ainda $\begin{cases} \cos\tau \cdot ds = dx \\ \cos\nu \cdot \mathrm{ds} = \mathrm{dy} \end{cases}$ e $\begin{cases} sen\tau \cdot ds = dy \\ sen\nu \cdot \mathrm{ds} = -\mathrm{dx} \end{cases}$ (**). Em seguida, incorporando as relações (**) nas expressões que correspondem $\int_C w_\tau ds$ e $\int_C w_\nu ds$, estabelecem ainda que: $\int_C w_\tau ds = \int_C udx + vdy$ e $\int_C w_\nu ds = \int_C udy - vdx$.

Por fim, recordando que vale a relação $dx+idy=ds$ e que $\left(\underbrace{\int_C w_\tau ds}_{TRABALHO} + i\cdot \underbrace{\int_C w_\nu ds}_{FLUXO}\right) = \int_C (u-iv)(dx+idy) = \int_C wdz$. Por fim Polya e Latta (1974, p. 146) acentuam a relevância do seguinte feito: temos encontrado uma interpretação física para uma integral de linha complexa.

Podemos reinterpretá-la por uma via sugestiva, e não essencialmente ortodoxa, da seguinte forma mnemônica indicada $\underbrace{\int_C wdz}_{INTEGRAL\text{ DE LINHA}} = (TRABALHO) + i\cdot(FLUXO)$ (ver Figura 1).

Antes de concluir, ao consultarmos alguns livros de AC e investigações (LINS NETO, 1996; BRADEN, 1985; CONWAY, 1978; FLANIGAN, 1972; GLUCOFF, 1993; GONG, 2001; GROHOLZ, 2013; PEREZ, 2012; SANTOS, 1998; SOARES, 2014), cujas publicações se mostram relativamente recentes e atuais, podemos considerar uma função derivável $f(z)=u(\mathrm{z})+\mathrm{iv}(\mathrm{z})=\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{y})+\mathrm{iv}(\mathrm{x},\mathrm{y})$, isto é, dado um ponto $z_0 \in Dom(f(z))$, existe uma vizinhança $\mathrm{A}(z_0,r)\subset A(aberto)$, de modo que existe $f'(z_0)$, para todo $\forall z\in \mathrm{A}(z_0,r)$.

Ora, com origem em argumentos clássicos da teoria, podemos garantir as relações de compatibilidade de Cauchy-Riemann (SHOKRANIAN, 2011), descritas $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y), & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)\end{cases}$ ou, equivalentemente, teremos: $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)=0, \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)+\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}$ e tomando $\overline{w}=\big(u(x,y),-v(x,y)\big)$.

Mas, do CVV, sabemos que a divergência (campo escalar) e o rotacional (campo vetorial) obtidos de um campo vetorial bidimensional são definidos, respectivamente, por $div(\overline{w})=\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)$ e $\mathrm{rot}(\overline{w})=\left(0,0,\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)+\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right)$.

Isto é, se no ponto $\mathrm{z}_0=(x_0,y_0)$ valem as condições de Cauchy-Riemann, teremos dessa forma que $div(\overline{w})=0$ e $\mathrm{rot}(\overline{w})=\big(0,0,0\big)=\vec{0}$.

Para concluir a presente seção, assinalamos ainda a interpretação intuitiva propugnada por Polya e Latta (1974, p. 146), quando grafam, de modo pouco ortodoxo, o seguinte símbolo $[\int_C] wdz = [\int_C] w_\tau dz + i\cdot [\int_C] w_\nu dz = Trabalho + iFluxo$.

Por fim, os autores fornecem uma interpretação intuitiva de um teorema clássico em AC, descritos pelos compêndios especializados por Teorema de Cauchy e, ressignificado da seguinte forma comentada por Polya e Latta (1974):

> Agora, assumimos que a função w é analítica através de um domínio $D \subset C_{plano}$, incluindo seu bordo definido a partir de uma curva C. Então, como vimos na seção 3.5, o campo vetorial $\overline{w}$ terá a divergência nula e irrotacional. Desde que é irrotacional, o trabalho realizado ao longo da curva C desaparece. E como sua divergência é nula, o fluxo total ao longo da fronteira da curva desaparece. Isto é, ambas as partes do lado direito desaparecem e se anula o lado direito. Temos obtido, assim, uma forma intuitiva da demonstração do Teorema de Cauchy. (POLYA; LATTA, 1974, p. 146).

Para concluir a presente seção, cujo conteúdo se insere na etapa clássica e que marca o início de uma ED, chamada de análises preliminares, envolvendo a análise epistemológica do conteúdo visado, indicaremos uma última figura, que envolve uma discussão comparativa dos dois processos de integração, no caso da variável real (3 – I) e da variável complexa (3 – II). No caso do processo ao lado direito da figura abaixo, Polya e Latta (1974, p. 148) se evidencia pela "existência de um limite menos intuitivo", quando comparado com o primeiro caso, bem como o significado geométrico envolvido.

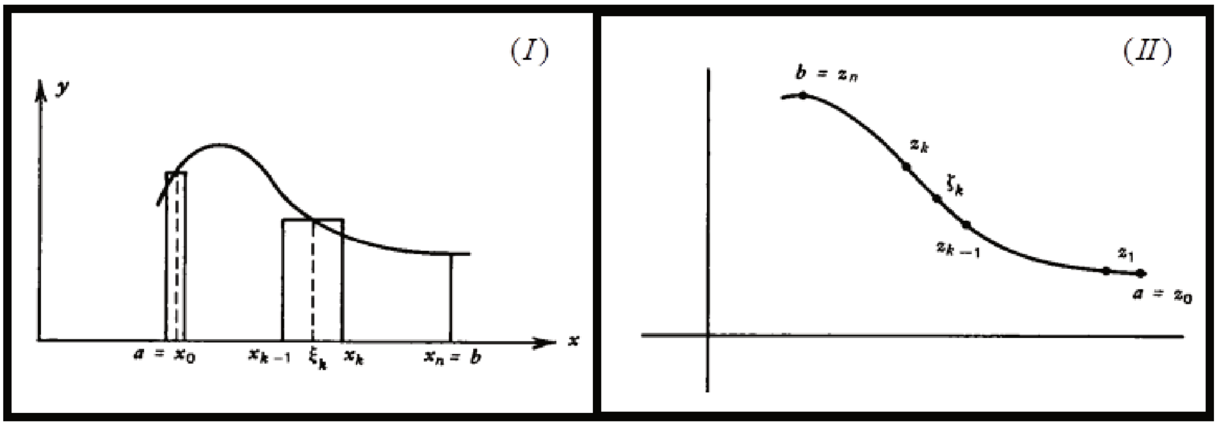

Figura 4 – Discussão comparativa do processo de integração na variável real - I e na variável complexa – II abordada por Polya e Latta (1974)
Fonte: Polya e Latta (1974)

Análises preliminares

Margolinas (2004) explica que em uma instituição didática, a intenção de ensinar é manifestada pelos seus atores. Uma situação didática reúne estes atores em torno da intenção. Temos, todavia, dois problemas centrais pontuados por ela, a saber: (i) da relação entre saber e a origem da intenção de ensinar e a construção de uma situação didática; (ii) e da reconstrução das condições de construção de um conhecimento matemático.

Por outro lado, apontamos as implicações para ambos os itens indicados no parágrafo anterior. Com efeito, Brousseau (1986) fornece a indicação de elementos essenciais a *práxis* do professor, ao mencionar que é necessário "poder comparar, não apenas os resultados, mas também as condições nas quais eles foram obtidos e de modo que tais condições sejam reprodutíveis". (BROUSSEAU, 1986, p. 3). Outrossim, o pesquisador francês esclarece a possibilidade de "reprodução" no ensino de Matemática, quando acrescenta ainda que:

> Esta reprodutibilidade implica uma descrição, não ingênua, de todas as condições observadas, mas seletivas e que repousam sobre uma escolha pertinentes às variações possíveis de efeitos reconhecidos. A reprodutibilidade repousa, então, na compreensão dos fenômenos fundamentais, isto é, do tecido de relações atestadas, constituindo a teoria e permitindo se escolher as condições de ensino, de explicar seus efeitos e de prevê-los. (BROUSSEAU, 1986, p. 3).

Para concluir a presente seção, recordamos que, de modo sistemático, conforme Artigue (1995a), nesta etapa consideramos: uma análise epistemológica dos conteúdos visados no ensino (indicada na seção anterior); análise dos entraves no campo de ensino em que pretendemos realizar uma ação didática; exame das concepções e conhecimentos prévios dos alunos e, por fim, análise do ensino atual (inspeção dos compêndios especializados) e seus efeitos. Por fim, todos os elementos anteriores levam em consideração os objetivos desta investigação que indicamos na seção precedente.

Ora, tendo em vista os limites de trabalho atual e nosso escopo de investigação, não realizaremos o exame das concepções prévias dos estudantes, bem como, não nos aprofundaremos numa inspeção das abordagens dos compêndios sobre o tema de nosso interesse. Por outro lado, a partir de uma apreciação de alguns estudos empíricos investigativos na área, podemos depreender que, em sua grande maioria, as investigações no âmbito do ensino de AC, se detêm ao ensino de conceitos introdutórios. Outrossim, registramos o expediente empregado por autores estrangeiros com o intuito de evidenciar o papel primordial da visualização para o entendimento do *corpus* teórico matemático que constitui o *habitat* de nossa atenção (KRANTZ, 1990; POLYA; LATTA, 1974; WEGERT, 2012). Na seção subsequente introduzimos a discussão de noções não discutidas na literatura, diante da exploração didática da visualização para o ensino de AC (ALVES, 2016).

Análise *a priori*

Para efeito de maior sistematização, assumiremos que uma situação-problema envolve "a escolha de questões abertas e/ou fechadas numa situação matematizada ou menos matematizada, vinculada a um campo de problemas colocados em um ou vários domínios de saber" (ALMOULOUD, 2007, p. 174). Outrossim, nas duas situações-problema que abordaremos na presente seção, assumiremos os pressupostos e a sistemática prevista pela ED. Ademais, tendo em vista a consideração de uma perspectiva de influência de caráter metodológico, assinalaremos a dialética dos momentos de ação, formulação, validação (BROUSSEAU, 1986) e a fase de institucionalização (ALMOULOUD, 2007).

Recordamos, ainda, que no momento das análises preliminares, a previsibilidade das variáveis micro-didáticas (responsáveis por uma organização local da ED), devem ser definidas. Assim, apoiando-nos as concepções de Artigue (1995), acentuamos: a dimensão epistemológica associada às características do saber em jogo; a dimensão cognitiva, associada às características cognitivas do público alvo; a dimensão didática, associada às características do funcionamento do sistema de ensino. Todavia, desconsideraremos uma análise institucional, posto que nossa discussão envolve um planejamento para uma eventual experimentação em sala de aula.

Antes de concluir, acentuamos que o planejamento e escolha das variáveis micro-didáticas condicionam a organização da sequência estruturada visando o ensino. Não obstante, as variáveis macro-didáticas, concernentes à organização da ED, são condicionadas ainda pelo conteúdo didático (ARTIGUE, 1995). Por fim, um elemento que não podemos perder de vista diz respeito ao controle do significado produzido a partir das interações entre a tríade clássica, indicada por especialistas franceses por aluno-professor-saber matemático (DOUADY, 1995b; LABORDE, 1997).

Tendo em vista as limitações do presente texto, de modo resumido, podemos apontar que a etapa de análise *a priori* permanece fundamentada a partir do estabelecimento de um conjunto de hipótese de investigação. Isso posto, indicamos: (1) a exploração da tecnologia permite a mobilização de conhecimentos estimulados pela visualização e percepção de propriedades atinentes ao processo de integração e sua interpretação geométrica; (2) uma mediação didática apoiada no *software* se mostra afetada/modificada (ARTIGUE, 2013); (3) o uso do *software* permite tornar menos hegemônico o trato eminentemente analítico, formal e logicizante da teoria matemática. Não perseguiremos respondê-las ao decurso das próximas seções, entretanto, são passiveis de adaptações tendo em vista uma experimentação em sala.

Concepção e construção de situações didáticas

Vale recordar que na discriminação e escolha das hipóteses, o engenheiro-professor decide um lapso temporal envolvendo o entendimento de determinado fenômeno de ensino ou de aprendizagem. Em nosso caso, quando nos debruçamos nas três hipóteses aqui formuladas, notamos que parte delas possui uma caraterística de adequação, segundo preconiza Artigue (1995, p. 49), entretanto, outras envolvem e exigem a proposição de outras investigações que ultrapassam os limites de nossa discussão, não obstante, com as características aqui apresentadas, nosso projeto de engenharia deverá levar em consideração “os registros dos estudos de caso, nos quais, a validação é essencialmente interna” (HADDAD, 2012, p. 19).

Situação-problema I: Considerando a função polinomial $F(z) = z^2 + 4$, verificar: (i) sua parte real e imaginária; (ii) a partir da expressão $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, descrever o campo vetorial indicado por $\overline{w(x, y)} = \left(u(x, y), -v(x, y)\right)$ (*campo vetorial de Polya*); (iii) avaliar o comportamento da divergência e do rotacional; (iv) localizar suas raízes com origem nos itens anteriores e decidir o comportamento da integral $\int_C F(z)dz$, aonde C é uma circunferência que envolve as raízes da função $F(z) = z^2 + 4$.

Comentários: Com origem na perspectiva de Polya e Latta (1974), os estudantes são colocados em contato com um cenário que busca promover a visualização, como elemento inicial e estimulador de um debate local. Ademais, os alunos devem relacionar as informações sobre a dispersão ou divergência dos vetores do campo num ponto, bem como, a taxa de circulação do volume de um fluido de escoamento bidimensional (rotacional).

Situação de ação. Assumimos como pressuposto de que “a constituição do sentido, tal como entendemos, implica numa interação constante dos alunos com situações problemáticas, interações dialéticas (caso o sujeito antecipe, finalize suas ações) [...]” (BROUSSEAU, 1998, p. 117). Assim, de modo preliminar, os alunos manifestam uma ação em situação, na condição em que a situação problema manifeste um sentido e desperta o interesse dos mesmos.

Assim, na Figura 4, apresentamos a descrição das curvas de nível associadas às funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$, no espaço IR^2. Por outro lado, com arrimo do *software* GeoGebra, definimos também as superfícies $z = u(x, y)$ e $z = v(x, y)$, descritas no espaço IR^3. Tal cenário de aprendizagem já impulsiona a transição dimensional $IR^2 \Rightarrow IR^3$. Ainda, com o *software*, proporcionamos o vislumbre, por parte dos estudantes, o conjunto interseção definidas pelas curvas de nível e também, pelas duas superfícies. Na Figura 5, os estudantes devem identificar dois pontos (na cor rosa), que constituem, precisamente, as raízes da função polinomial $F(z) = z^2 + 4$.

Suas raízes são localizadas no plano, na medida em que observem as relações e soluções das equações $F(z) = z^2 + 4 = u(x, \mathrm{y}) + \mathrm{iv(x, y)} = 0 + \mathrm{i}0$. Ou seja, ao lado direito, relativamente aos pontos de intersecção das superfícies (Figura 5, ao lado direito), devem interessar aos estudantes àqueles que anulam as partes real e imaginárias, isto é, podem verificar que $|F(z)|^2 = |u(x, \mathrm{y}) + \mathrm{iv(x, y)}| = (u(x, \mathrm{y}))^2 + (\mathrm{v(x, y)})^2 = 0 + i0$.

Situação de formulação. Almouloud (2007, p. 38) esclarece que, neste momento, a troca de informações e mensagens entre os estudantes é imprescindível. Ademais, o resultado do debate e da dialética “permite criar um modelo explícito que pode ser formulado com sinais e regras comuns”.

Dessa forma, afim de uniformizar as mensagens e conjecturas formuladas, a partir da exploração da construção dinâmica que o professor fornece aos estudantes, do ponto de vista notacional, os alunos devem inferir $F(z) = (x^2 - y^2 + 4) + i(-2xy) = \mathrm{u(x, y)} + \mathrm{iv(x, y)}$.

Portanto, segundo a definição, o campo vetorial deve ser indicado por $\overline{w(x,y)} = \left(x^2 - y^2 + 4, -2\,\mathrm{xy}\right)$.

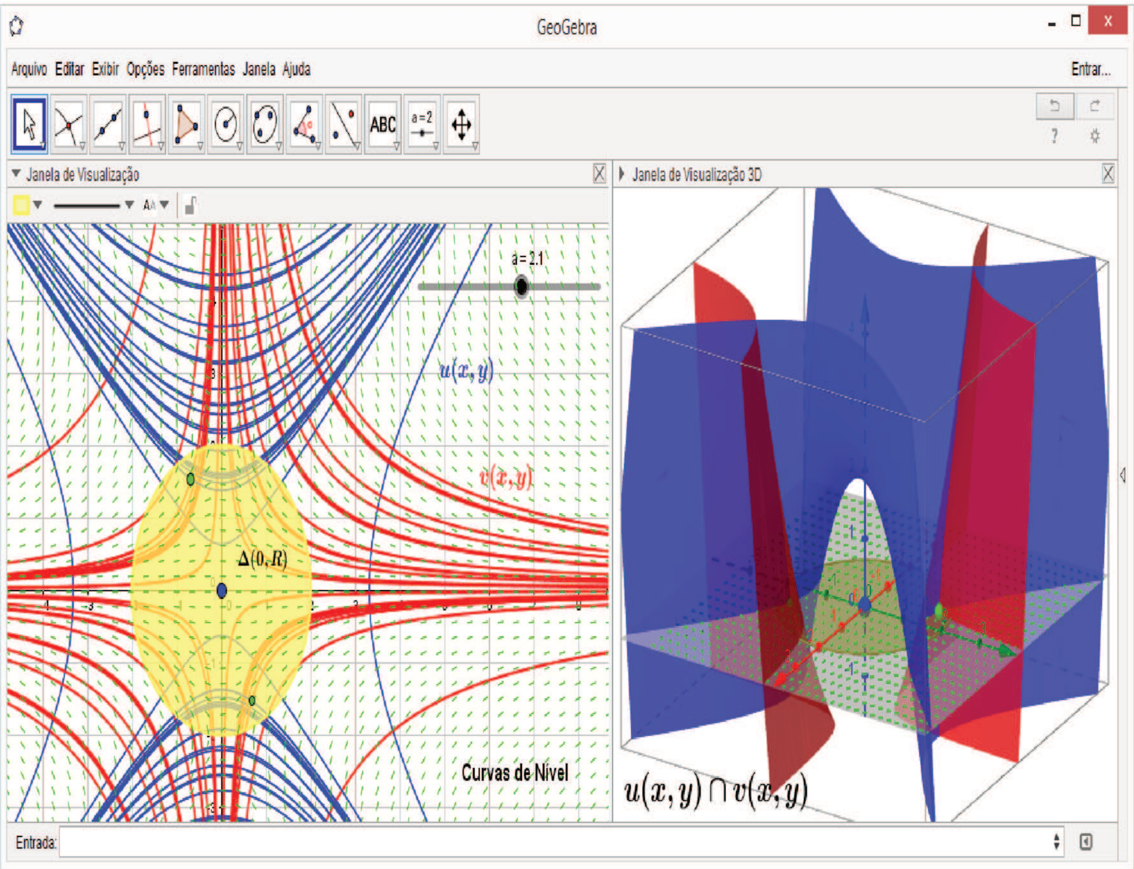

Figura 5 – Visualização das curvas de nível associadas às partes real e imaginárias da função e sua representação no espaço (como superfícies), com auxílio do *software Geogebra*.
Fonte: Elaboração do autor

Na figura 5, os estudantes podem visualizar um campo de direções (na cor verde). E, com origem nas definições, devem lidar com o campo escalar $div(\overline{w}) = 2x - 2x = 0$ e o campo vetorial $\mathrm{rot}(\overline{w}) = (0,0,2\mathrm{x} - 2\mathrm{x}) = (0,0,0)$. Com origem nessas informações, o professor busca extrair as possíveis interpretações físicas para os significados de cada comportamento, todavia, a representação gráfica do *Geogebra* na descrição do campo de direções relacionados ao campo $\overline{w(x,y)} = \left(x^2 - y^2 + 4, -2\,\mathrm{xy}\right)$ não permite a verificação, por exemplo, da variação da magnitude dos vetores nas vizinhanças de cada raiz.

Situação de validação. Diferentemente da etapa anterior, se mostra necessário "provar o que foi afirmado na fase anterior" (ARTIGUE, 1984, p. 7-8). E, ainda, Almouloud (2007, p. 39) explica que "é a etapa na qual o aprendiz deve mostrar a validade do modelo por ele criado, submetendo a mensagem matemática (modelo de situação) ao julgamento de um interlocutor".

Por fim, com origem na seguinte formulação simbólica $\oint_C w dz = \oint_C w_\tau dz + i \cdot \oint_C w_\nu dz = Trabalho + iFluxo$, indicada na seção anterior, os alunos devem inferir que $\oint_C (z^2 + 4)dz = Trabalho + iFluxo = 0 + i0 = 0$.

Situação de institucionalização. Almouloud (2007, p. 40) esclarece que "uma vez construído e validado, o novo conhecimento vai fazer parte do patrimônio da classe embora não tenha ainda o estatuto de saber social". Com tal ponto de vista, o professor poderá valorizar o papel da visualização tendo em vista a aquisição de uma cultura matemática e o delineamento de hábitos intelectuais aplicáveis em outras situações.

Do ponto de vista formal, a função anterior é uma função polinomial do segundo grau, e, pelo Teorema Fundamental da Álgebra (SHOKRANIAN, 2011), deve possuir duas raízes no plano complexo. Ademais, é sempre analítica e, pelo teorema de Cauchy, que mencionamos na seção anterior, sua integral é sempre nula, numa curva suave C. Vejamos uma situação um pouco mais complicada.

Situação-problema II: Considerando a função polinomial $F(z) = z^4 + 2z^2 + 8z + 5$, verificar: (i) sua parte real e imaginária; (ii) a partir da expressão $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, descrever o campo vetorial indicado por $\overline{w(x, y)} = \left(u(x, y), -v(x, y)\right)$(*campo vetorial de Polya*); (iii) localizar suas raízes com origem nos itens anteriores e comportamento da integral $\int_C F(z)dz$, aonde C é uma circunferência que envolve as raízes da função $F(z) = z^4 + 2z^2 + 8z + 5$.

Comentários: Diferentemente da situação anterior, a decomposição da função $F(z) = z^4 + 2z^2 + 8z + 5$ pode ser obtida com recurso ao *software CAS Maple*. Com arrimo da Figura 6, os estudantes devem identificar, ao lado esquerdo, a existência de suas quatro raízes no plano complexo. Por fim, devem comparar o comportamento da integral $\int_C F(z)dz$ numa vizinhança envolvendo todas as raízes da função polinomial.

Situação de ação. O professor repete o procedimento da situação anterior, estimulando o entendimento da transição dimensional $IR^2 \Rightarrow IR^3$. Nas figuras 5 e 6, visualizamos uma vizinhança $\Delta(0, R)$ que, aparentemente, contém todas as raízes. O professor conduz os estudantes na percepção das propriedades necessárias para a discriminação das raízes.

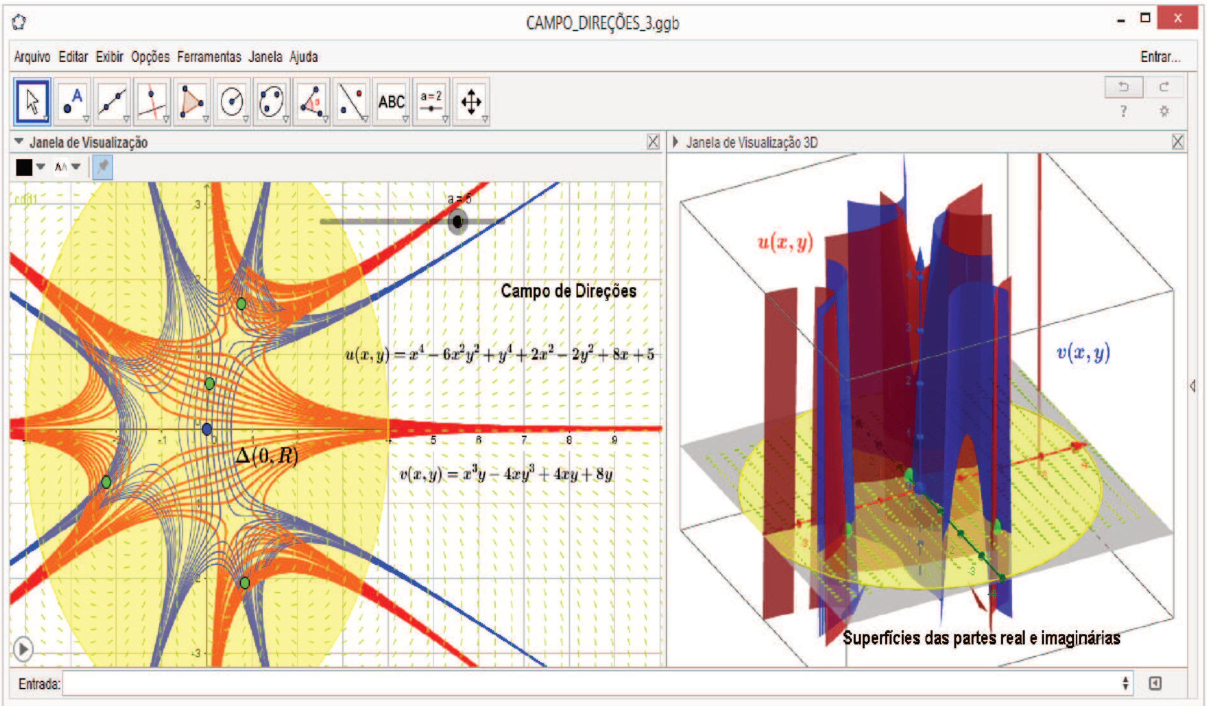

Figura 6 – Visualização das curvas de nível associadas às partes real e imaginárias da função e sua representação no espaço (como superfícies), com auxílio do *software Geogebra*.
Fonte: Elaboração do autor.

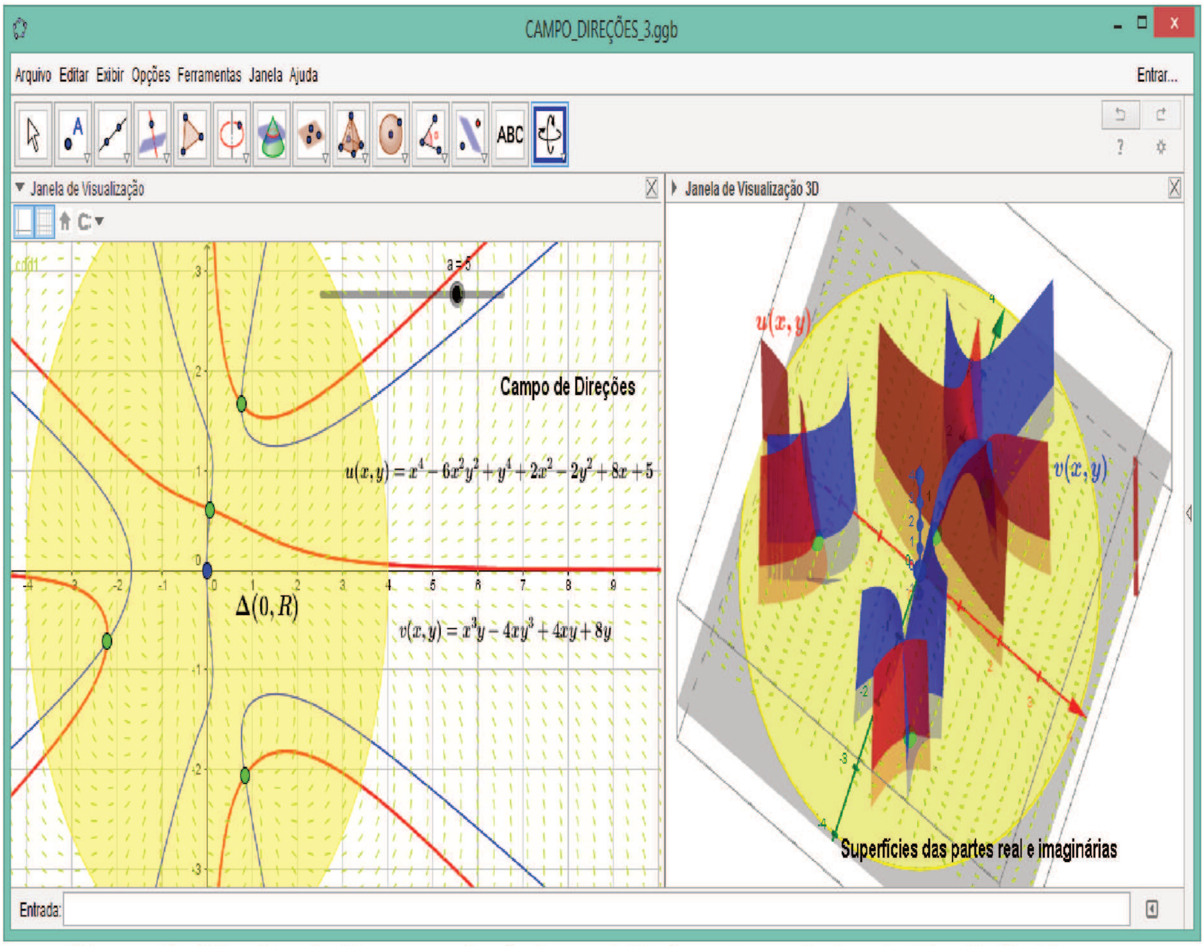

Figura 7 – Visualização das curvas de nível associadas às partes real e imaginárias da função e sua representação no espaço (como superfícies), com auxílio do *software Geogebra*.
Fonte: Elaboração do autor

Situação de formulação. Com origem na descrição analítica $F(z) = z^4 + 2z^2 + 8z + 5 = u(x, y) + \mathrm{iv}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, os estudantes devem lidar com as seguintes expressões $u(x, y) = \mathrm{x}^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 2x^2 - 2y^2 + 8x + 5$ e $\mathrm{v}(x, y) = 4x^3y - 4xy^3 + 4xy + 8y$. Reparemos que, com arrimo do comando **CampoDeDireções[<f(x, y)>]** e a definição das funções de duas variáveis, ao lado direito, conseguimos determinar sua interseção com as funções do *software*.

Ainda nas figuras 6 e 7, os estudantes devem notar a existência de quatro pontos (na cor verde), obtidos com a interseção (planar) das curvas de nível indicadas $\mathrm{u}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{x}^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 2x^2 - 2y^2 + 8x + 5 = 0$ e $\mathrm{v}(x, y) = 4x^3y - 4xy^3 + 4xy + 8y = 0$. Tal condição deve proporcionar o estudo do comportamento dos valores das raízes.

Situação de validação. Como demandado no enunciado, os estudantes precisam determinar ainda $div(\overline{w}) = (4x^3 - 12xy^2 + 4x + 8) - (4x^3 - 12xy^2 + 4x + 8) = 0$ e $\mathrm{rot}(\overline{w}) = (0, 0, 4\mathrm{x}^3 - 12\,\mathrm{xy}^2 + 4x + 8) = (0, 0, 0)$. Por outro lado, com auxílio do teorema de Greeen, poderão inferir que $\oint_C udx + vdy = \iint_C \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy = \iint_C rot\left(\overline{w}\right) dxdy = \iint_C 0dxdy = 0$. Nesta fase, os dados produzidos pelo grupo de estudantes deverá ser confrontado com o modelo matemático formal.

Situação de institucionalização. Ora, o conhecimento matemático que o *expert* deverá convencionar ou fixar (ARTIGUE, 1984, p. 8), seguindo os rituais acadêmicos, indicando o estatuto cognitivo de um novo saber, rico em relações conceituais. Nesse caso, a cultura matemática a ser incorporada e definida pelo professor envolve a produção de significados físicos ao processo de integração na variável complexa, a partir de uma perspectiva metodológica se aproxima do expediente adotado por Polya e Latta (1974). Observamos, todavia, que o papel oficial assumido pelo conhecimento matemático mobilizados nas situações didáticas foi amparado pelo modelo computacional e, a partir da interação com o mesmo, a habilidade de visualização não assumiu papel secundário.

Antes de concluir, porém, observamos uma importante distinção explicada no trecho que segue sobre a importância da noção de institucionalização:

> A necessidade de institucionalização foi formulada em 1980, assim como a existência de um contrato didático implícito; a situação didática é observada desde 1982, como uma situação a-didática imersa em um contrato didático e, ao mesmo tempo em que surge a noção de devolução. Todavia, a teoria das situações se desenvolveu, preliminarmente, em torno da caracterização de situações a-didaticas em situações quase isoladas do professor, o que constitui que a Engenharia Didática, no seu começo, era centrada sobre os aspectos matemáticos (epistemológicos) e cognitivos, não explicitados no papel do professor, ao momento de mobilização das sequências em classe. (PERRIN-GLORIAN; BELLEMAIN, 2016, p. 13)

Elementos para uma análise *a posteriori*

Almouloud (2007, p. 177) comenta que possíveis correções e ajustes locais não podem ser negligenciados numa aplicação empírica. Dessa forma, indicaremos apenas alguns elementos que carecem de vigilância num caso de eventual experimentação. Para tanto, recordamos que “a análise *a posteriori* de uma sessão é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribui para a melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições de transmissão do saber em jogo”.

Não podemos perder de vista ainda as considerações de Laborde (1997, p. 103) ao mencionar que a validação da ED consiste em “comparar os resultados de duas modelizações diferentes para o mesmo objeto”. Nesse caso, sugerimos a confrontação dos dados originados numa mediação que desconsidera a tecnologia atual e, explora, de modo hegemônico, o caráter formal e matematizado de situações problemas da mesma categoria que discutimos ao longo das seções anteriores. Devem ser considerados, ainda, variáveis micro-didáticas quando lidamos com o aumento do grau da função polinomial e, nesse caso, as manipulações de formulação devem exigir, cada vez mais, o uso, em caráter de complementaridade, de outro *software* (ALVES, 2014b; 2014c; 2014d).

De fato, na Figura 8, visualizamos a localização de oito zeros, correspondentes às raízes de uma função polinomial que, podemos depreender de grau no máximo oito. Por outro lado, quando passarmos a propor atividades estruturadas aos estudantes com outras funções na variável complexa, cujos graus sejam mais elevados, a determinação das partes real e imaginária da função, bem como a determinação dos campos vetoriais associados, cujo procedimento de determinação foi indicado há pouco, devem incorrer em cálculos algorítmicos matemáticos fastidiosos.

Ademais, na Figura 9, exploramos as potencialidades do *software CAS Maple*, no sentido de proporcionar maiores minúcias sobre o comportamento do campo nas vizinhanças das raízes. Por fim, no caso de uma eventual experimentação, a sintaxe implementada para o uso de ambos os *softwares* não apresenta extremamente complexidade. Podemos acentuar que em nossos trabalhos apresentamos vários exemplos de exploração, em caráter de complementaridade, o *software GeoGebra* e o *CAS Maple*, no sentido de proporcionar um cenário de visualização e interpretação geométrica de importantes noções da AC (ALVES, 2016). Acrescentamos, para exemplificar, uma última construção com o *software GeoGebra* na Figura 10. Ao lado direito divisamos uma espécie de “cratera” ou “montanha”, cujo indicativo geométrico, do ponto de vista matemático, representa a existência de uma singularidade. Neste caso, os procedimentos que empregamos nas duas situações anteriores, do ponto de vista do emprego da integral $\int_C F(z)dz$ não podem ser aplicados em uma vizinhança do plano complexo, bem próxima ao comportamento inesperado e que, do ponto de vista geométrico, se verifica.

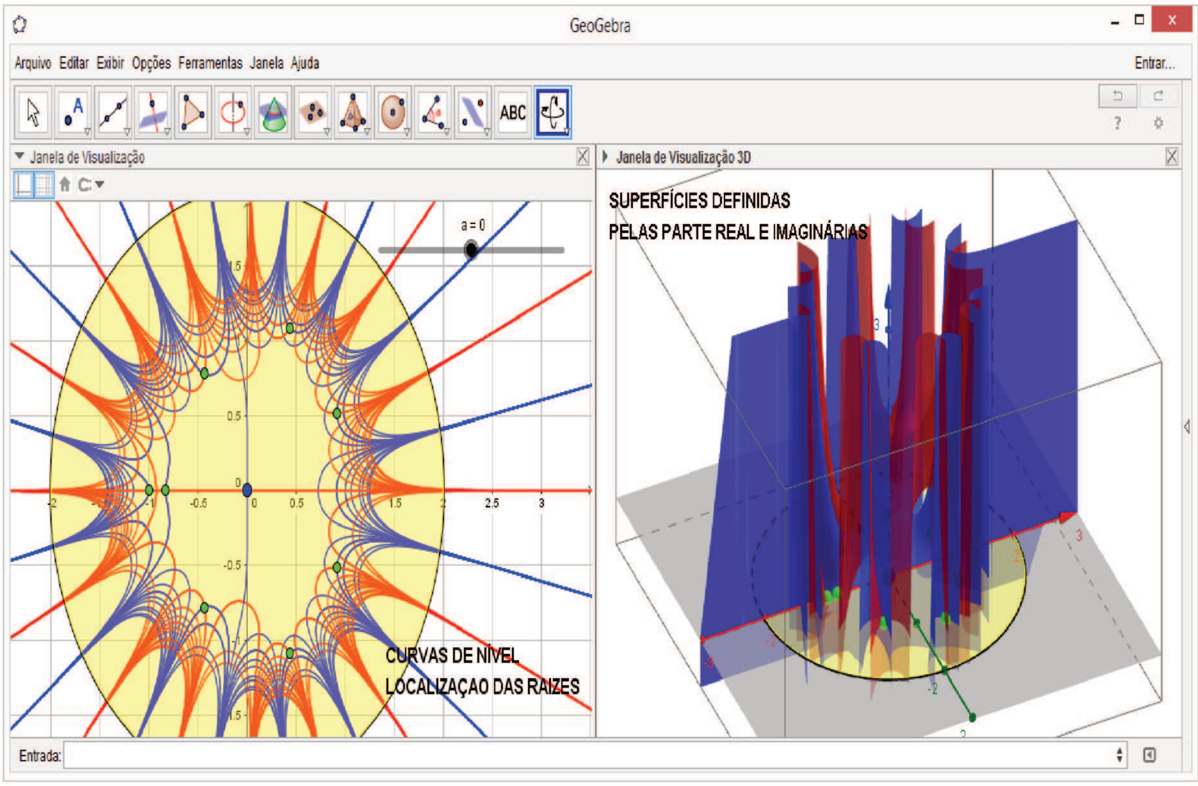

Figura 8 – Visualização e identificações de relações conceituais estabelecidas no contexto de transição do espaço $IR^2 \Rightarrow IR^3$.
Fonte: Elaboração do autor

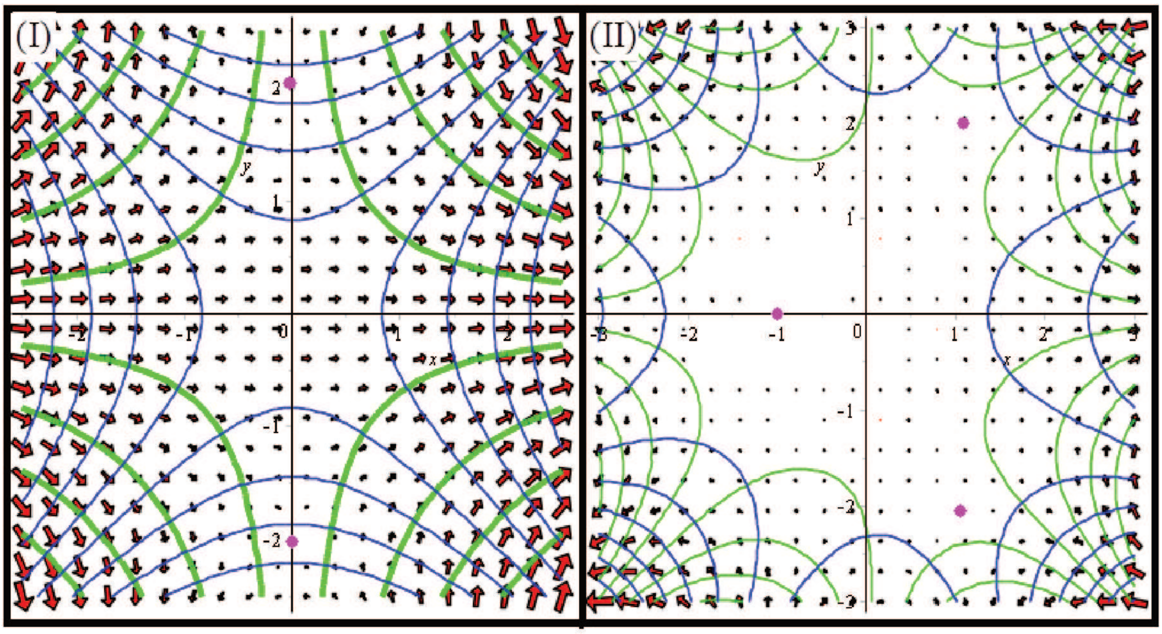

Figura 9 – Com o CAS Maple os alunos devem visualizar e compreender o comportamento do campo de Polya nas vizinhanças de cada raiz das equações discutidas.
Fonte: Elaboração do autor

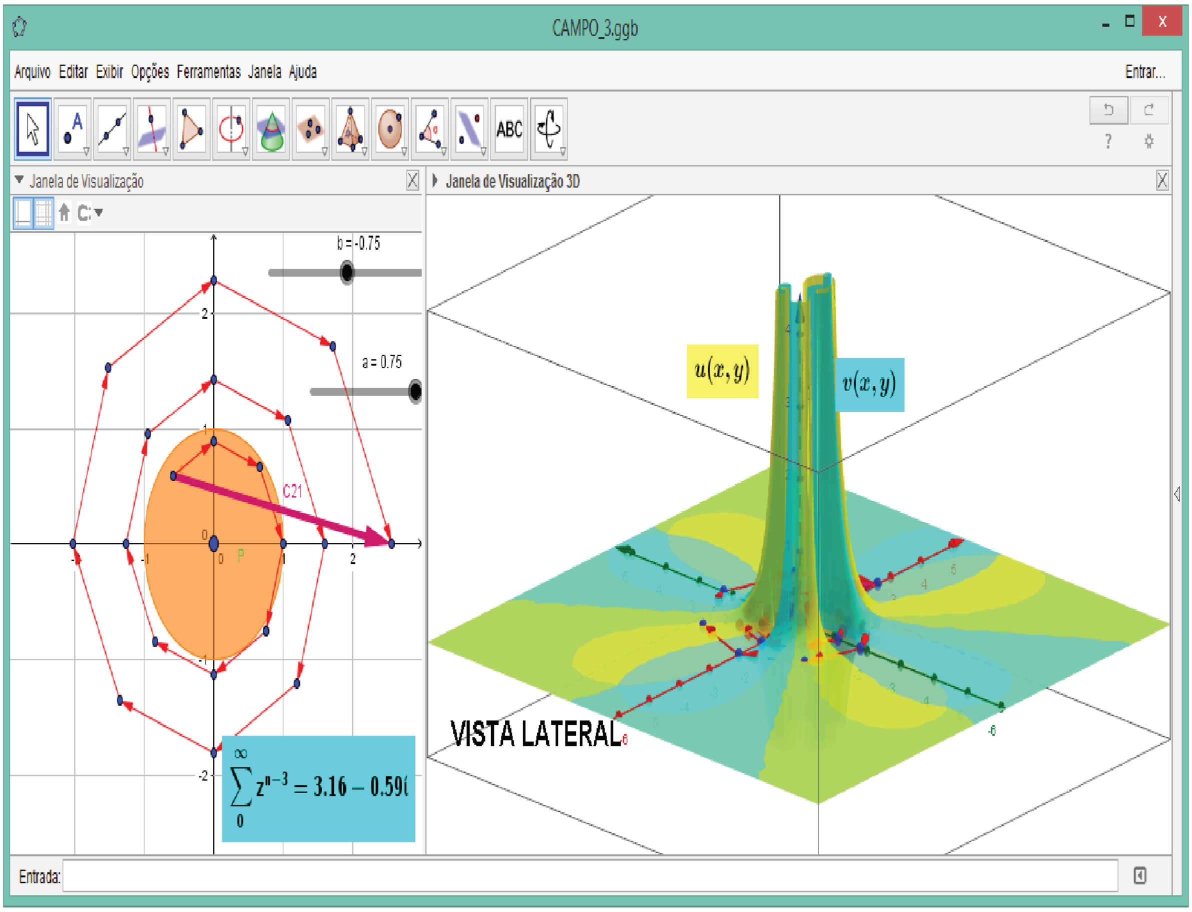

Figura 10 – Visualização do comportamento de uma função na variável complexa e a existência de uma singularidade em forma de "vulcão".
Fonte: Elaboração do autor

Antes de concluir, acentuamos que Perez (2012), seguindo a perspectiva de Gluchoff (1993), aconselha em notar que, em torno das raízes (Figura 9, na cor rosa), os vetores tendem a efetuar uma volta completa e, ademais, as magnitudes relacionadas aos comprimentos dos mesmos tendem a decrescer consideravelmente. Tal comportamento qualitativo pode ser incorporado ao patrimônio geral dos estudantes, na medida em que, não negligenciamos o papel da visualização para o apoio e evolução dos conhecimentos.

Considerações finais

Nas seções anteriores, abordamos uma discussão e descrição dos elementos que consideramos ser os mais proeminentes e imprescindíveis tendo em vista uma transposição didática (CHEVALLARD, 1991) que visa modelar situações didáticas que proporcionam um cenário de aprendizagem envolvendo elementos que estimulam/promovem a visualização de propriedades matemáticas (ALVES, 2011) relacionadas, de modo particular com o histórico processo de integração de funções na variável complexa (HAIRER; WANNER, 2008).

Dessa forma, por intermédio de uma mediação que não desconsidera a tecnologia atual, com arrimo do *software GeoGebra*, discutimos duas situações-didáticas, profundamente matematizadas e condicionadas por uma teoria de base e que, sob a perspectiva da TSD, temos capacidade de distinguir os momentos dialéticos de ação, formulação, validação e institucionalização. E, por intermédio de um expediente que fornece aos estudantes um cenário de aprendizagem (ver figuras 4, 5 e 6) que estimula a ação dos estudantes, por intermédio da visualização e exploração de propriedades gráfico-geométricas, temos a possibilidade de estimular um tirocínio que pode apoiar um entendimento de cunho mais abstrato, atinente a determinados teoremas clássicos em AC.

Outrossim, advertimos uma confusão constante na adoção de quadro teóricos que consubstanciam o desenvolvimento de investigações da área que abordamos. Nesse sentido, não podemos confundir/comparar um *design* de investigação que busca explicar/compreender, desde o início, fenômenos de ensino e de aprendizagem, intrinsecamente condicionados pelo campo epistêmico do saber científico matemático, com um quadro de pesquisa (categorias de investigação) e investigação "exportados" de outras áreas de conhecimento que, em sua origem, são amalgamados por práticas, concepções e relações que não se originam das interações características do triângulo didático clássico: professor – aluno - saber matemático. Nesse sentido, e Engenharia Didática, do ponto de vista da teoria e da prática aplicada ao funcionamento da sala de aula, apresenta um potencial natural de se fazer aderir aos reais problemas de funcionamento de uma aula de Matemática. Não obstante, não podemos descrever nenhuma ilação a respeito de teorias ou pressupostos metodológicos derivados de outras práticas distintas e apartadas dos fenômenos de ensino e de aprendizagem em Matemática.

Recordamos, por exemplo, que "um curioso aspecto da Análise Matemática dos anos em torno de 1800, correspondeu ao uso da variável complexa para avaliar determinadas integrais definidas" (GRAY, 2010, p. 59). De modo semelhante, propugnamos uma espécie de transição ou "passagem" semelhante, na medida em que, os cenários de aprendizagem apoiados pelo uso do *software*, promovem a transição para uma interpretação gráfico-geométrica e, do ponto de vista das propriedades físicas discutidas por Polya e Latta (1974) e que se mostram desconsideradas por outros autores e, ainda, quando lidamos com teorias abstratas, como no caso da variável complexa, determinadas integrais especiais (ÁVILA, 1987), podem ser interpretadas com o uso da tecnologia atual.

No que concerne às variáveis micro-didáticas, apregoamos que o estímulo do entendimento de propriedades físicas (como o rotacional e a divergência do campo) possibilita uma via alternativa para o entendimento da abstrata e geral noção da integral de linha ou processo de integração sobre um caminho no plano complexo. Em nossa mediação, temos apregoado a exploração, em caráter de complementaridade, do *CAS Maple* e do *software Geogebra*, posto que, alguns cálculos algébricos elevados (das funções polinomiais), podem conduzir a algumas limitações do *Geogebra*.

Por conseguinte, com a exploração moderada da tecnologia, podemos evitar o emprego precipitado e hegemônico do rigor matemático, uma vez que, “torna-se difícil de acreditar que o rigor tenha encontrado na matemática de maneira repentina, tendo se estabelecido de uma hora para a outra com o padrão definitivo” (SCHUBRING; ROQUE, 2016, p. xi).

Antes de concluirmos, temos assinalado em nossos trabalhos os inúmeros problemas e entraves enfrentados pelos estudantes, desde seu contato com a teoria das funções em uma variável real, passando pelo estudo da teoria das funções em várias variáveis (ALVES, 2014a; 2014b; 2014c, 2014d, 2015; ALVES; BORGES NETO, 2011; ALVES; BORGES NETO; ALVES DIAS, 2012) e, finalmente, como o primeiro contato com as funções na variável complexa.

Na Figura 11, exibimos, do ponto de vista notacional, um processo de transição que envolve o estudo acadêmico compulsório de tópicos específicos no *locus* acadêmico, todavia, ainda se observa determinado grau de escassez de pesquisas endereçadas aos inúmeros problemas derivados do seu ensino e de sua aprendizagem (ALVES e MARINHO, 2017). Na Figura 10, exemplificamos o caso do processo de integração.

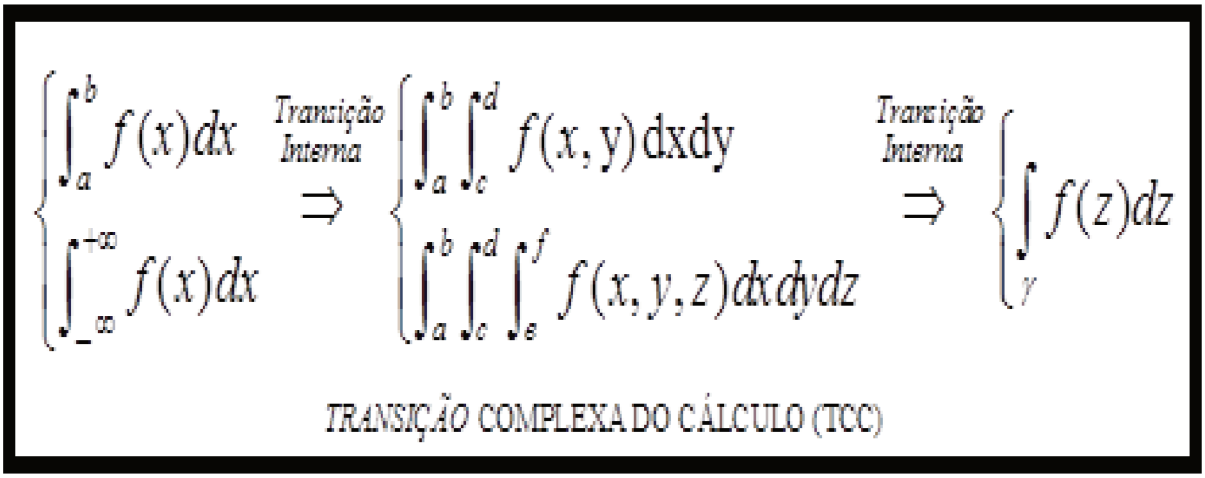

Figura 11 – Descrição do processo de Transição Interna do Cálculo e Transição Complexa do Cálculo (TCC)
Fonte: Elaboração do autor

Por fim, apesar de formuladas e indicadas nas décadas passadas, inúmeras questões preocupantes e entraves apontados pelos investigadores da vertente francesa ainda preservam sua atualidade e vigor científico que os chancela a verificação de implicações no ensino de assuntos matemáticos avançados abstratos, cujo conhecimento didático e metodológico ainda carece de incrementos.

Além disso, a identificação de uma vigilância acadêmica no âmbito do ensino acadêmico, como buscamos discutir ao decorrer do escrito atual, incide no sentido de evitar que as recomendações de especialistas da vertente aqui discutida ao decurso do trabalho, permaneçam numa situação de oblívio total.

Referências

ALMOULOUD, A. S. *Fundamentos da Didática da Matemática*. São Paulo: Editora UFPR, 2007.

ALVES, F. R. V. *Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias intuitivas do Cálculo a Várias Variáveis* (tese de doutorado). Fortaleza: Universidade Federal do Ceará – UFC, 2011, 339f. Disponível em: < https://ifce.academia.edu/RegisFrancisco>. Acessado em: 02/03/2018.

ALVES, F. R. V. Viewing the roots of polynomial functions in complex variable: the use of GeoGebra and the CAS Maple. *Acta Didactica Naposcencia*. v. 6, n. 4, p. 1-25, 2013. Disponível em: <https://ifce.academia.edu/RegisFrancisco>. Acessado em: 02/03/2018.

ALVES, F. R. V. Engenharia Didática para o Teorema da Função Implícita: análise preliminares e a priori. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, v. 7, n. 3, p. 148-168, 2014a. Disponível em: < https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/1554>. Acessado em: 02/03/2018.

ALVES, F. R. V. Técnica Computacional para o Ensino de Matemática Computational Technique for Teaching Mathematics – CT^2M . *EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, v. 5, n. 2, p. 1-9, 2014b. Disponível em: <https://ifce.academia.edu/RegisFrancisco>. Acessado em: 02/03/2018.

ALVES, F. R. V. Aplicações no Ensino de Variável Complexa: uma discussão sobre o uso dos softwares Geogebra e CAS Maple. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, v. 3, n. 2, p. 1-15, 2014c.

ALVES, F. R. V. Visualizing the behavior of infinite series and complex power series with the GeoGebra. *GeoGebra International Journal of Romania*. v. 4, n. 1, p. 1-10, 2014d.

ALVES, F.. R. V. Visualização de Teoremas em Análise Complexa: exemplos no contexto da Transição Complexa do Cálculo TCC. *Revista Sinergia - IFSP*, v. 16, n. 1, p. 65-76, 2015.

ALVES, F. R. V. Transição complexa do Cálculo (TCC): engenharia didática para a noção de sequências, séries e séries de potências. *Revista Educação Matemática em Revista – RS*, v. 1, n. 17, p. 83- 97, 2016.

ALVES, F. R. V. Engenharia Didática com o tema integração de funções na variável complexa: análises preliminares e *a priori* e modelização de situações. *Revista Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista*. v. 7, n. 1, p. 25-40, 2017.

ALVES, F.. R. V. The Professional Didactics (PD) and Didatic of Science (DS) in Brazil: some implication for the professionalization os Science teacher. *Acta Didactica Naposcencia*. v. 11, n. 2, p. 105-120, 2018. Disponivel em: < http://padi.psiedu.ubbcluj.ro/adn/article_11_2_9.pdf >. Acessado em: 02/03/2018

ALVES, F. R. V.; MARINHO, M. R. M. Engenharia Didática no contexto da Transição Complexa do Cálculo (TCC): o caso da série de Laurent. *Revista Electronica de Investigación en Educación en Ciencias* (en línea). v. 12, n. 12, p. 63-89, 2017. Disponivel em: < http://ppct.caicyt.gov.ar/reiec >. Acessado em: 02/05/2018

ALVES, F. R. V.; BORGES NETO, H. Transição interna do cálculo em uma variável para o cálculo a várias variáveis: uma análise de livros. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 13, n. 3, p. 598-625, 2011.

ALVES, Francisco. R. V; BORGES NETO, H.; ALVES DIAS, M. Implicações e aplicações da Teoria das Representações Semióticas no ensino do Cálculo. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, v. 5, n. 1, p. 54-84, 2012.

ARTIGUE, M. Modélisation et Reproductibilité en Didactiques de Mathématiques. *Les Cahiers Rouge des Didactiques des Mathematiques*, v. 8, n. 1, p. 1-38, 1984.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactiques. In: BRUN, J. (org.). *Didactiques de Mathématiques*. Jun, Reims, France. 1996. p. 243-264.

ARTIGUE, M. Épistémologie et Didactiques. *Recherche en Didactiques des Mathématiques*, v. 10, n. 2, p. 241-286, 1989.

ARTIGUE, M. Qué se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nível Universitário? *Boletín de La Asociatíon Venezolana*, v. X, n. 2, p. 117-134, 2003.

ARTIGUE, M. Didactical design in Mathematics Education. In: WINSLOW, C. (Org.). *NORMA08*, Copenhaguen: Sense Publishers, Denmark, 2009. p. 7-16.

ARTIGUE, M. L´éducation mathématiques comme champ de recherché et champ de pratique: resultats et défis. *EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, v. 3, n. 3, p. 1-18, 2012.

ARTIGUE, M. L´impact curriculaire des Technologies sur L´Éducation Mathématiques. *EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, v. 4, n. 1, p. 1-15, 2013.

ÁVILA, G. O cálculo das integrais de Fresnel. *Revista Universitária*, n. 5, p. 77-81, 1987.

BARQUERO, B.; BOSCH, M. Didactic Engineering as a Research Methodology: From Fundamental Situations to Study and Research Paths. In: WATSON, A.; OHTANI, M. *Task design in Mathematics Education*. ICMI study 22, New York: Springer, 2015. p. 249-270.

BOTTAZINNI, U. *The Higher Calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*. New York: Springer-Verlag, 1986.

BRADEN, B. Picturing Functions of a Complex Variable. *The College Mathematics Journal,* v. 16, n.1, p. 63-72, 1985.

BROUSSEAU, G. *Perspective pour la didactique des mathématiques: vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Paris: La Pensée Sauvage, 1994.

BROUSSEAU, G. Les différents rôles du maître**.** *Bulletin de l'A.M.Q. Montréal.*, p.14-24, 1988.

BROUSSEAU, G. Fondements et methodes de la Didactiques des Mathématiques. *Recherche en Didactiques des Mathématiques*. v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. BROUSSEAU, G. (org.). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble La Pensée Sauvage, 1998. p. 115-160.

CECÍLIA, S. F.; BERNADEZ, N. C. Introdução às funções de uma variável complexa. Rio de Janeiro: SBM, 2008.

CHEVALLARD. Y. *La Transposition Didactique*. Paris: La Pensée Sauvage Édition. 1991.

CONWAY, J. B. *Functions of One Complex Variable*. Second Edition. New York: Springer Verlag, 1978.

DOUADY, R. La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. In: GOMEZ, P. (Org.) *Ingenieria Didactica en Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 1995a. p. 1-7.

DOUADY, R. Nacimiento y desarrollo de la didáctica de las matemáticas en Francia: rol de los IREM. In: GOMEZ, P. (Org.) *Ingenieria Didactica en Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 1995b. p. 61-97.

DOUADY, R. Géométrie, graphiques, fonctions au collège**.** *Revista Eletrónica de investigación en educación e ciencias*. n. 1, p. 1-7, 2008.

FLANIGAN, F. J. *Complex Variables: harmonic and analytic functions*. California: San Diego State University, 1972.

GONG, S. *Concise Complex Analysis*. New Jersey: World Scientific, 2001.

GLUCHOFF, A. D. *Complex Power Series-A Vector Field Visualization*. Mathematics *Magazine*, v. 66, n. 33, p. 189-191, 1993.

GRAY, J. *The Real and the Complex: a History of Analysis in the 19th Century*, New York: Springer Verlag, 2010.

GROSHOLTZ, E.. R. Teaching the Complex Numbers: what history and philosophy of mathematics suggest. *Journal of Humanistic Mathematics*. v. 3, n. 1, p. 63-73, 2013.

HADDAD, S. *L´enseignement de L´intégrale en classe terminale de l´enseignement tunisien*. (these de doctorat). Paris: Université Paris VII. 2012.

HAIRER, E.; WANNER, G. *Analysis by Its History*. New York: Springer, 2008.

LABORDE, C. Affronter la complexité des situations didátiques d´apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. *DIDASKALI***A**, v. 10, n. 1, p. 97-112, 1997.

LINS NETO, A. *Funções de uma variável complexa*. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

KRANTZ, S. G. *Complex Analysis: the geometric view*. New York: American Mathematical Society, 1990.

MARGOLINAS, C. Dévolution et intitutionnalisation: deux aspects antagonistes du rôles du maître. In: COMITI, C.; BESSOT, M. P. *Didactiques des disciplines scientifiques et formation des enseignants*. 1995. p. 342-347, MARGOLINAS, C. Essai de généologie en Didactique des Mathématiques. *Revue Suisse des Sciences de l´Education*. v. 27, n. 3. p. 1-29, 2004.

MARGOLINAS, C.; DRIJVERS, P. Didactical engineering in France; an insider's and an outsider's view on its foundations, its practice and its impact. *ZDM Mathematics Education*, v. 47, n. 1, p. 893-903. 2015. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-015-0698-z

MARINHO. M. R. M. *Categorias intuitivas no ensino da série de Laurent: um contributo da Engenharia Didática*. (Dissertação de mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). IFCE: Fortaleza/CE, 2017, 117f. Disponível em: http://pgecm.fortaleza.ifce.edu.br/dissertacoes-2017/

MEDVEDEV, F., A. *Scenes from the History of real functions*. Birkhäuser Verlag: Berlim, 1991.

NEEDHAM, T. *Visual Complex Analysis*. Oxford: Oxford University Press, 2000.

POLYA, G.; LATTA, G. *Complex Variables*. Nova York: John Willey and Sons, 1974.

PERRIN-GLORIAN, M.; BELLEMAIN, P. M. B. L'ingenierie didactique entre recherche et ressource pour l'enseignement et la formation des maitres. In: ANAIS DO I SIMPÓSIO LATINO-AMERICANO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA - *LADIMA*., 2016. Disponivel em: http://ladima.tuseon.com.br/uploads/file_manager/source/d7322ed717dedf1eb4e6e52a37ea7bcd/oficinas/CONFER%C3%8ANCIA%203%20-%20FRANC%C3%8AS.pdf

PEREZ, A.. M. *Visualizing Complex Solutions of Polynomials*. (Master of Arts). Austin: University of Texas, 2012.

ROBINET, J. De L´ingenierie Didactiques. *Les Cahiers Blancs*. v. 1, n. 1, p. 1-11, 1983.

SANTOS. L. C. *Funções complexas de uma variável complexa: uma abordagem via software Mathematica*. (Dissertação de mestrado). Campinas: Universidade de Campinas, 1998.

SCHUBRING, G.; ROQUE, T. *Curso de Análise de Cauchy: uma edição comentada*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

SHOKRANIAN, S. *Uma introdução à Variável Complexa*, São Paulo: Ed. Moderna, 2011.

SOARES, M. G. *Cálculo em uma Variável Complexa*. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

WEGERT, E. *Visual Complex Functions*: an introduction with the phase portrait. New York: Birkhäuser, 2012.

SOBRE O AUTOR

FRANCISCO REGIS VIEIRA ALVES. Licenciado em Matemática, Bacharel em Matemática, Mestre em Matemática, Mestre em Educação, Doutor em Educação - UFC. Docente permanente do Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática ENCIMA/UFC, Docente Permanente do Mestrado em Educação Profissional e Tecnológica – PROEPT. Coordenador do Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática – PGECM/IFCE.
Página pessoal: https://ifce.academia.edu/RegisFrancisco/Journal-Articles

Recebido: 04 de junho de 2017.

Revisado: 03 de maio de 2018.

Aceito: 24 de julho de 2018.