O metódo de aproximação de Arquimedes com o uso do GeoGebra: uma abordagem histórica e didática

The Archimedes' method of approach with the use of GeoGebra: an historical and didactic approach

LOUISE DOS SANTOS LIMA[1]

Resumo

Este artigo relata a experiência e os resultados de uma oficina de atividades no Projeto Pró-Talento: a UFRJ Despertando Vocações Científicas do Programa Novos Talentos da CAPES, no Instituto de Matemática da UFRJ, com alunos do 3° ano do Ensino Médio da rede estadual de Escolas Públicas. Objetivando alcançar uma abordagem didática diferente e especial, que sane as dúvidas existentes, consolide o conhecimento e que motive o aluno, busca-se uma abordagem histórica e didática sobre a aproximação do número Pi pelo método de Arquimedes, através da tecnologia educacional – software GeoGebra, introduzindo o percurso histórico, ao mesmo tempo em que as aulas são dinamizadas.

Palavras-chave*: Método de Arquimedes; Geometria dinâmica; Aproximação do Pi.*

Abstract

This article reports the experience and the results of an activity in workshop in a project Projeto Pró-Talento: a UFRJ Despertando Vocações Científicas do Programa Novos Talentos da CAPES, in the Mathematical Institute of the UFRJ, with students of the 3rd year of high school of the state Public Schools. Aiming to achieve a different and special didactic approach that sane existing doubts, consolidate knowledge and motivate the student, looking up a historical and didactic approach on the approximation of Pi by the Archimedes´ method by educational technology - Geogebra software, introducing the historical background, while the classes are streamlined.

Keywords: *Archimedes method; dynamic geometry; Pi Approximation.*

Introdução

O Instituto de Matemática, IM, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, participa de ações junto a escolas da Educação Básica. Uma destas ações é o Programa Novos Talentos da CAPES, que objetiva motivar os alunos para o ingresso na universidade e aguçar o interesse pelo estudo em ciências. Sendo assim, a UFRJ submeteu sua proposta à CAPES, no Programa Novos Talentos, com o Projeto Pró-

[1] Doutoranda em Ciências da Educação na Universidade do Porto, Portugal. louisefalconnyery@hotmail.com

Talento: a UFRJ Despertando Vocações Científicas, projeto vinculado à Pró-Reitoria de Extensão.

1. Aproximações para Pi: considerações históricas

Algumas aproximações foram feitas pelos chineses. Entre elas, a de Liu Hui que estabeleceu um intervalo para π provavelmente em 264 a.C, segundo Beckmann (1970). Esta aproximação merece destaque, pois utilizou um método que dali a alguns anos seria aperfeiçoado por Arquimedes que mostraremos mais adiante. Aqui, Liu Hiu usou um polígono e o inscreveu e circunscreveu em uma mesma circunferência. Daí, concluiu que o comprimento da circunferência estaria compreendida entre o perímetro dos dois polígonos, determinando, assim, um intervalo que compreendesse o valor do π.

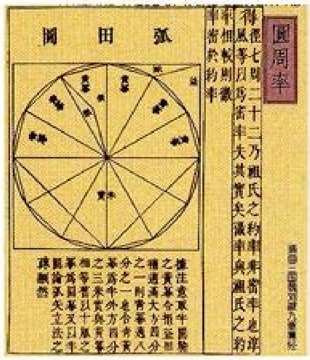

FIGURA 1: Método de Liu Hui
FONTE: Pinterest [2]

Liu Hui determinou:

Para um polígono de 192 lados: 3,141024 < π < 3,142704

Para um polígono de 3072 lados: π = 3; 14159

Neste aspecto, vale observar que para uma polígono de 3072 lados é determinado um valor para π e não uma aproximação. De fato, neste período ainda não era sabido que π é um número irracional[3]. Para contextualizar, primeiramente uma hipótese para descoberta da incomensurabilidade de segmentos é atribuída a Aristóteles, no final do século IV a.C., através da razão entre a diagonal de um quadrado e um de seus lados. Vale lembrar que Platão também tratou da incomensurabilidade de segmentos com foco

[2] Disponível em: <https://pt.pinterest.com/pin/318770479853690453/?from_navigate=true> Acesso em jun. 2016.
[3] Um número irracional é aquele que não pode ser expresso como uma fração *a*/*b*, em que *a* é um número inteiro e *b* é um inteiro não nulo.

semelhante ao de Aristóteles. A demonstração de que π é um número irracional só ocorreu no século XVIII por Lambert. Mais tarde, em 1882, Lindemann provou que π não é somente irracional, mas transcendente[4].

Séculos depois, no século 5, Pai e filho - Tsu Chung-Chih e Tsu Keng-Chih encontraram um novo intervalo: $3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$. Não há muitos dados históricos sobre os estudos dos chineses, mas o importante, neste caso, é o desenvolvimento de um método.

No velho testamento, na descrição do Templo de Salomão, cerca de 900 a.C., podemos ver uma aproximação hebraica para o π, já que no templo foi construída uma circunferência com 30 côvados de comprimento e 10 côvados de diâmetro, como podemos ler no Velho Testamento (1 Reis, 7:23): “Fez mais o mar de fundição, de dez côvados de uma borda até a outra, redondo ao redor, e de cinco côvados de alto; e um cordão de trinta côvados o cingia ao redor.". Assim, observamos que $\pi \cong \frac{30\ côvados}{10\ côvados}$, ou seja $\pi \cong 3$. De certo não há provas que garantam que era determinada uma aproximação ou um valor para π e, por isso, aqui, optamos por utilizar uma aproximação.

Em sua obra As medidas do círculo, Arquimedes desenvolveu um método para calcular o comprimento de uma circunferência. Para isso, utilizou polígonos inscritos e circunscritos e, após calcular seus perímetros, definiu um intervalo que compreendesse o comprimento da circunferência e, consequentemente, o valor de π.

Descreveremos seu método como consta em sua obra “Sobre as medidas do círculo”, conhecido como o método clássico do cálculo de π. Numa circunferência de raio r inscreve-se um triângulo equilátero. Em seguida, dividimos a cada um dos três arcos da circunferência em duas partes iguais, unimos estes pontos e, assim, obtemos um hexágono regular de perímetro igual a 6r. Com sucessivas divisões de arcos ao meio construímos a partir do hexágono regular um dodecágono regular. Em seguida, polígonos regulares de 24 lados, de 48 lados e, finalmente, de 96 lados.

Aqui Arquimedes fez uma pausa. Considerou que o comprimento da circunferência ainda será maior que o perímetro do polígono de 96 lados, pois, entre cada dois vértices sucessivos, a medida do lado do polígono é menor que a medida do arco da

[4] Um número transcendente (ou transcendental) é um número real ou complexo que não é raiz de nenhuma equação polinomial a coeficientes racionais.

circunferência correspondente a esse lado. Tanto mais verdadeira será essa afirmação para a soma de todos os lados.

Passa a calcular, então, o perímetro desse polígono, concluindo que é maior que $3\,\frac{10}{71}$d, onde d representa o diâmetro da circunferência e, com mais forte razão, o comprimento da circunferência será maior que $3\,\frac{10}{71}$d, ou seja, maior que 3,14084507d.

Abaixo, mostramos a sequência de inscrição de polígonos na circunferência pelo método de Arquimedes utilizando o software livre de geometria dinâmica: GeoGebra.

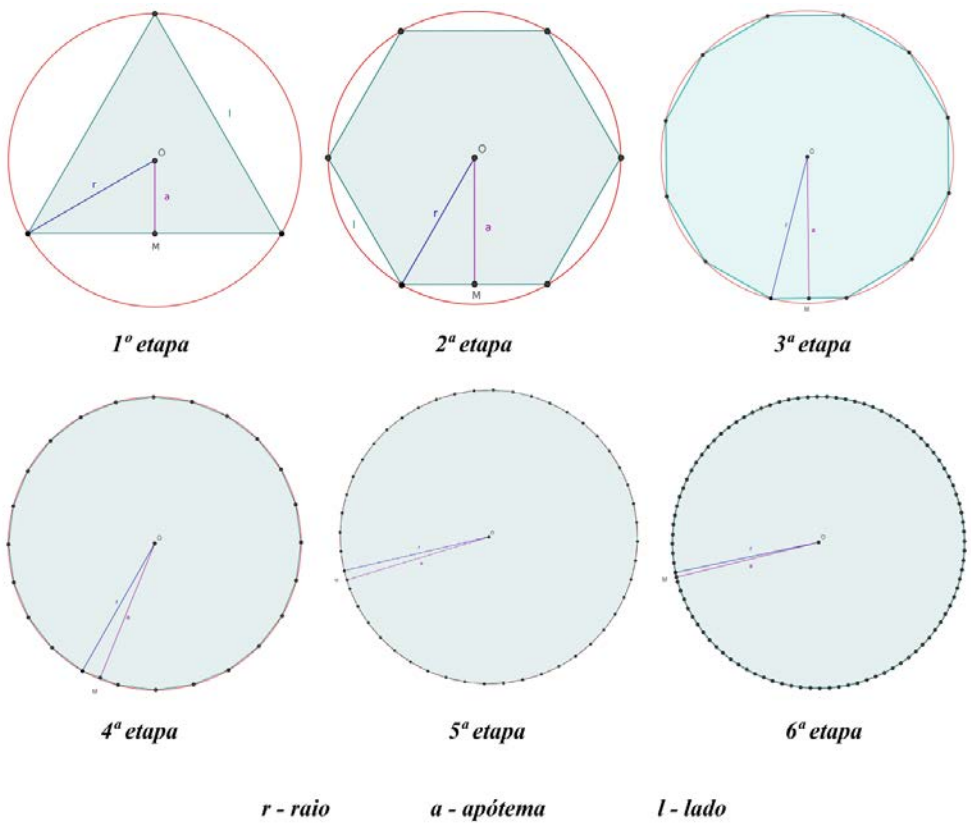

FIGURA 2: Inscrição de polígonos seguindo o Método de Arquimedes com o auxílio do GeoGebra
FONTE: Autora

Em seguida, Arquimedes circunscreve de maneira semelhante à circunferência uma sequência de polígonos, prosseguindo, também aqui, até o de 96 lados. Cada um desses polígonos tem perímetro menor que o da circunferência. O cálculo numérico conduz ao seguinte resultado: o polígono regular de 96 lados circunscrito à circunferência de diâmetro d é menor que $3\frac{1}{7}$ d, ou seja, menor que 3,142857143d. Utilizando ainda o GeoGebra, ilustraremos a seguir a continuação do Método de Arquimedes.

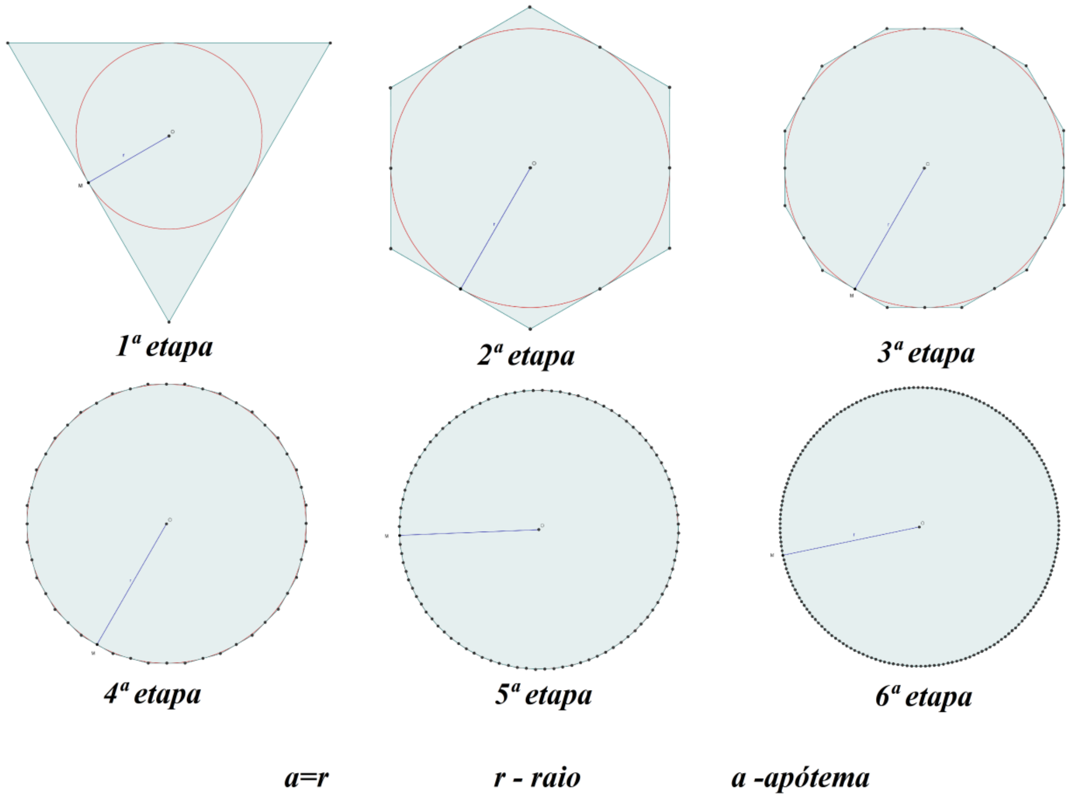

FIGURA 3: Circunscrição de polígonos seguindo o Método de Arquimedes com o auxílio do GeoGebra
FONTE: Autora

Resulta que, dado C – Comprimento da Circunferência:

$$3\frac{10}{71}\text{d} < \text{C} < 3\frac{1}{7}\text{d}$$

Mas, por definição, $\pi = \frac{C}{d}$, Daí:

$$\frac{3\frac{10}{71}\text{d}}{d} < \frac{C}{d} < \frac{3\frac{1}{7}\text{d}}{d}$$

$$3\frac{10}{71} < \text{C} < 3\frac{1}{7}$$

Uma excelente aproximação!

2. Geometria Dinâmica como ferramenta didática

Considerando um ambiente escolar estruturado com o aparato necessário para a utilização de tecnologia, há que sublinhar a imprescindibilidade do preparo do professor para utilizar estas ferramentas. Além do aparato físico, é necessário que o professor saiba manusear o computador e busque ferramentas que auxiliem em suas propostas pedagógicas. Nesse sentido, segundo Santarosa & Gravina (1998):

> Não são de interesse as ferramentas que guardam características de métodos de ensino que privilegiam simplesmente a transmissão de conhecimento e em que a 'medida' de aquisição deste conhecimento é dada pela habilidade do aluno em memorizá-lo e reproduzi-lo.

Ao levar o aluno a construir conceitos matemáticos com o auxílio do computador, de forma lúdica, o professor se torna o principal agente mediador entre a ferramenta e o aluno, planejando os métodos e momentos adequados para isto. É importante que haja a reflexão docente sobre a própria prática para que o mesmo construa novas formas de trabalho. O professor, no entanto, não está marginalizado neste cenário que surge, uma vez que a tecnologia se configura como ferramenta e recurso didático em que o docente se apoia para oferecer novas oportunidades de aprendizagem aos alunos. Reiteramos que para o professor acessar essa nova tecnologia, além de contar com o apoio e estrutura da escola, precisa de condições para que se aproprie da utilização gradativa dos referidos recursos informatizados.

O trabalho com softwares educacionais favorece aa construção do conhecimento e desenvolvimento da aprendizagem dos seus alunos. Sendo assim, não basta introduzir o computador, é preciso repensar a metodologia de trabalho. Nesse contexto, os softwares educacionais deverão estar relacionados ao planejamento, cabendo ao professor conhecer sua turma para preparar sua aula utilizando as ferramentas mais adequadas. A utilização do computador está relacionado às intenções docentes, sendo necessário traçar metas viáveis para o desenvolvimento dos conteúdos pretendidos e as condições de trabalho de que dispõe.

A Geometria Dinâmica conduz os alunos a terem uma leitura e exploração geométrica dos desenhos através do computador. O GeoGebra é um software de Geometria Dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único sistema. Na próxima seção apresentaremos um relato de experiência que contempla a utilização do GeoGebra como ferramenta didática.

3. Metodologia

Registramos nossa experiência, tendo como foco o Método de Arquimedes para aproximação do Pi, em uma abordagem histórica com alunos do Ensino Médio.

No Projeto Pró-Talento: a UFRJ Despertando Vocações Científicas, projeto vinculado à Pró-Reitoria de Extensão aplicamos atividades referentes ao capítulo 4 da monografia da autora, intitulada Pi: Uma abordagem histórica e didática. A oficina transcorreu por um período de 5 horas, no Laboratório de Informática da Graduação - LIG, no IM/UFRJ. Os sujeitos da experiência são 17 jovens alunos do 3° ano do Ensino Médio de escolas públicas do Rio de Janeiro, com faixa etária variando entre 16 e 19 anos.

Baseados no referencial histórico apresentado e considerando o Método de Arquimedes, seguimos as etapas de aplicação da pesquisa indicadas a seguir.

1. Os alunos foram levados ao auditório para a realização de uma aula expositiva prévia pela Professora Doutora Maria Darci Godinho da Silva, com o objetivo de pontuar conceitos e demonstrações necessárias para a construção dos polígonos. (Duração de 120 minutos).
2. Aplicação de uma atividade cujo instrumento diagnóstico foi um bloco de anotações para os dados obtidos a partir da reprodução do Método de Arquimedes com o suporte do software GeoGebra. (180 minutos). Esta aplicação decorreu da seguinte maneira:
    a. Os principais conceitos apresentados na aula expositiva foram construídos com a utilização do software GeoGebra pelos alunos, sendo a construção de um deles inicialmente exposta para a turma, objetivando a familiarização com as ferramentas do software.
    b. Incentivamos a criação de duplas para o manuseio do software GeoGebra.
    c. Entregamos blocos de atividades que guiavam os alunos nas atividades a serem realizadas.

d. Houve nossa mediação e o compartilhamento dos resultados entre as duplas.

O estudo possui uma abordagem qualitativa por não ter como propósito desvendar as relações causa-efeitos do fenômeno educativo da aprendizagem matemática, mas pretender procurar interpretar e compreender. Utilizamos como método a observação participante (Bogdan & Taylor, 1975; Spradley, 1980), tendo sido os dados gerados coletados, organizados, classificados e submetidos à análise de conteúdo (Morgado, 2012; Bardin, 2009).

4. Relato da experiência

Selecionamos a atividade, que consta no Capítulo 4 da Monografia de Lima (2012) para aplicarmos na Oficina dos Novos Talentos. Esta atividade descreve o processo, utilizado por Arquimedes, para derteminar uma aproximação para o número π. Em um primeiro momento, os alunos se reuniram em auditório do Bloco C do Centro de Tecnologia da UFRJ para assistirem à aula expositiva sobre os conceitos necessários, digamos, pré-requisitos, para a construção de polígonos regulares, inscritos e circunscritos, utilizando o GeoGebra. Para tanto, foram necessários conhecimentos como a construção da mediatriz, segmentos tangentes, congruência de triângulos, entre outros.

Os alunos questionaram e fizeram anotações sobre a exposição. Observamos que muitos deles possuíam certa defasagem conceitual inerente a conteúdos que são discutidos, em geral, no 8° ano do Ensino Fundamental, o que é muito preocupante, tendo em vista que são alunos do 3° ano do Ensino Médio. Um aluno tinha dúvidas sobre a relação entre diâmetro e raio, pois acreditava que o diâmetro era o raio ao quadrado. Percebemos que esta e outras dúvidas foram esclarecidas com o uso do software GeoGebra. Dos 17 alunos apenas 3 mostraram dominar os pré-requisitos, enquanto o restante parecia apenas ter uma vaga lembrança acerca do assunto, confirmada no momento seguinte, quando os alunos passaram para a etapa de construção dos polígonos com o auxílio do software.

Em seguida, após um breve intervalo, seguimos para o LIG - Laboratório de Informática da Graduação, do IM/UFRJ, para trabalharmos a atividade com a ajuda do computador e do software de geometria dinâmica GeoGebra. Não houve dificuldades em manusear o software já que o mesmo é autoexplicativo. De qualquer forma, inicialmente, construímos um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência qualquer e, com justificativas expostas no primeiro momento, construímos o hexágono regular inscrito nesta mesma circunferência. Após isso, pedimos que os alunos trabalhassem sozinhos. Acompanhamos todas as construções até o polígono inscrito que possuía 96 lados.

Figura 4: Alunos no LIG

Enquanto isso, no bloco de atividades, pedimos que os dados acerca dos polígonos inscritos na circunferência fossem registrados, como indica figura abaixo.

Polígonos inscritos		
$n =$ nº de lados	$2p =$ perímetro	$A =$ área
$n = 3$	32,53	50,9
$n = 6$	37,56	101,8
$n = 12$	38,88	117,58
$n = 24$	39,22	121,69
$n = 48$	39,3	122,74
$n = 96$	39,32	123,01

Tabela 1: Polígonos inscritos na circunferência

Figura 5: Tabela preenchida pelo aluno A

Neste momento, tivemos algumas dificuldades que foram geradas pelo GeoGebra. Por exemplo, se o raio escolhido fosse muito pequeno, a área e o perímetro de dois polígonos inscritos nesta mesma circunferência, com quantidades de lados diferentes, eram iguais. Isso se deve ao fato do GeoGebra possuir aproximações com apenas 2 casas decimais. A figura abaixo mostra a tabela preenchida por um aluno que observou este fato.

Polígonos inscritos		
n =nº de lados	$2p$ =perímetro	A =área
$n = 3$	6,3	1,91
$n = 6$	7,27	3,81
$n = 12$	7,53	4,4
$n = 24$	7,59	4,56
$n = 48$	7,61	4,6
$n = 96$	7,61	4,61

Tabela 1: Polígonos inscritos na circunferência

Figura 6: Tabela com perímetros iguais para polígonos diferentes

Em seguida, apresentamos aos alunos, com o auxílio do DataShow, a construção de um triângulo equilátero circunscrito e pedimos que, a partir daí, utilizando a mesma circunferência, aquela onde foram construídos os polígonos regulares inscritos, eles construíssem o polígono regular circunscrito com 96 lados e anotassem os dados obtidos para este polígono, como informa tabela abaixo.

Polígono circunscrito		
n =nº de lados	$2p$ =perímetro	A =área
$n = 96$	39,34	123,14

Tabela 2: Polígono de 96 lados circunscrito

Figura 7: Tabela preenchida pelo mesmo aluno A

Ressaltamos que Arquimedes não mencionou o cálculo com área, mas decidimos trabalhar este assunto, que foi exposto na aula inicial, pois acreditamos que é pertinente, e possibilita a articulação do conhecimento. O GeoGebra possui ferramentas que já calculam o perímetro e a área de um determinado polígono, assim como o comprimento da circunferência e área do círculo, dispensando cálculos.

Com as duas tabelas preenchidas, pedimos que eles determinassem o comprimento da circunferência, através de uma ferramenta disponibilizada pelo GeoGebra, e preenchessem uma terceira tabela, onde poderiam comparar o perímetro do polígono regular inscrito com 96 lados, o comprimento da circunferência e o perímetro do polígono regular circunscrito com 96 lados, como segue na imagem abaixo.

Figura geométrica	$2p$ =perímetro
polígono inscrito com 96 lados	39,32
circunferência criada	39,33
polígono circunscrito com 96 lados	39,34

Tabela 3: Tabela de perímetros

Figura 8: Tabela preenchida pelo mesmo aluno A

Após o preenchimento das tabelas, os alunos foram incentivados a responder o questionário que estava presente no bloco de atividades. Avaliando estes blocos percebemos que alguns alunos conseguiram compreender a definição do número π, porém necessitavam de um melhor entendimento das manipulações algébricas que faziam, conforme nos mostram as respostas que seguem.

Responda as perguntas abaixo:

1. Sabendo que π é, por definição, a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, dê um intervalo que possua o número π.

① $\pi = \dfrac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{diâmetro}} = \dfrac{2\pi R}{2R}$

$\pi \cdot \text{diâmetro} = \text{comprimento da circunferência}$

$\pi = \dfrac{18,84}{6}$

$\cancel{\pi = \dfrac{12}{4.6} = 2,608}$

Figura 9: Resposta dada pelo aluno B para a pergunta 1

2. Qual foi o objetivo de Arquimedes ao inscrever e circunscrever polígonos regulares na circunferência?

③ Para tornar polígonos perfeitamente regular

Figura 10: Resposta dada pelo aluno B para a pergunta 2

Embora o aluno B tenha compreendido o conceito do número π, o mesmo não conseguiu responder corretamente o objetivo da atividade.

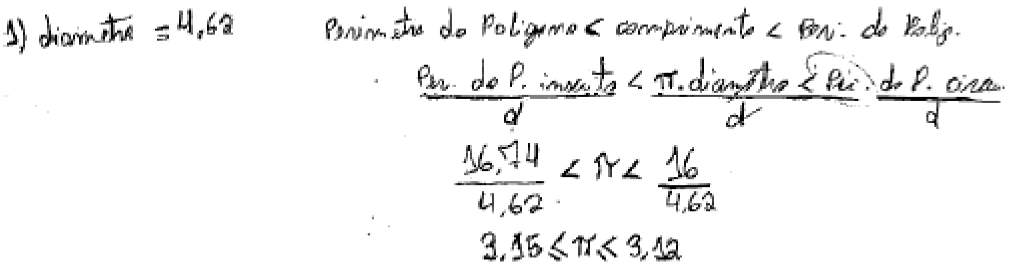

Figura 11: Resposta dada pelo aluno C para a pergunta 1

Conforme podemos observar, o aluno C conseguiu desenvolver a questão, mas não observou a desigualdade, não sendo crítico para analisar a impossibilidade do intervalo atribuído a π, descrito no registro anterior. Contudo, este mesmo aluno conseguiu descrever a proposta da atividade, respondendo corretamente às outras questões. Concluímos, assim, que os erros foram inerentes a outros conteúdos e à falta de certo raciocínio crítico sobre suas respostas. Este erro se repete nas respostas de outros alunos como a do aluno D que segue.

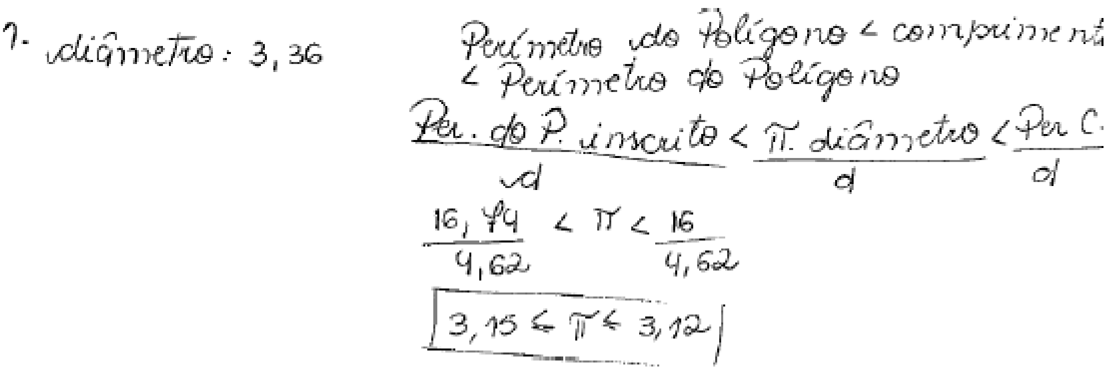

Figura 12: Resposta dada pelo aluno D para a pergunta 1

O aluno E confundiu os valores do comprimento da circunferência com o da área do círculo ao tentar estabelecer um intervalo para o valor de π. O valor de π, neste caso, ficou estabelecido entre “1,9029...” e “1,9029...”, como indica a figura que segue. Verificamos que o mesmo não realizou uma análise crítica de sua resposta. Apesar disso, vale ressaltar que o mesmo aluno conseguiu responder corretamente às outras questões.

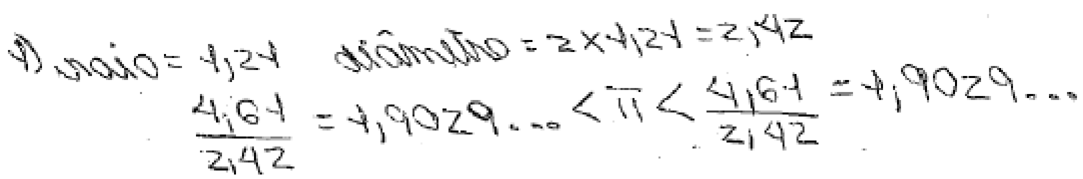

Figura 13: Resposta dada pelo aluno E para a pergunta 1

Quanto às outras respostas do questionário, observamos respostas corretas em relação às perguntas conceituais e notamos dificuldades em trabalhar com conteúdos básicos, como:

a) divisão com números decimais. Por exemplo, ao estabelecer um intervalo para π entre 3,1431 e 31,1451;

b) intervalos. Como, por exemplo, o aluno que pontuou:

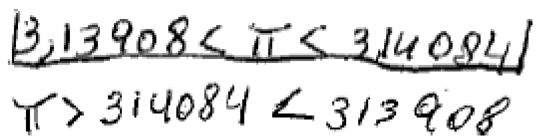

Figura 14: Resposta dada pelo aluno F para a pergunta 1

c) justificar, argumentar e organizar ideias ao responder.

Ao serem questionados sobre as atividades, eles concordaram que a compreensão da definição do número π pode facilitar, isto é, colaborar com outras áreas da matemática e que a atividade pode ser aplicada em sala de aula.

5. Algumas considerações

Alguns temas que deveriam ser trabalhados em sala de aula tendem a ficar à margem enquanto outros são enfatizados, o que parece ser uma tendência da prática do ensino da matemática no Brasil, nos últimos anos. Apesar do estudo do lugar geométrico circunferência e, consequentemente, do número π serem conteúdos indicados pelos PCN (1997) a serem trabalhados a partir do 8º ano e, embora sejam tratados em sala de aula, os alunos concluem o Ensino Médio acreditando em um π pré-determinado, ou seja, 3,14.

Vemos que é razoável que seja trabalhada em sala de aula a definição do número π, assim como o seu processo histórico, sendo esta uma sugestão de abordagem para o ensino do número em foco. O processo histórico, que relata uma busca por uma melhor aproximação do π, não deve ser negado e nem omitido, assim como os obstáculos encontrados pelos matemáticos. A respeito disso, afirma Schubring, G. (2012):

> A meu ver, para identificar obstáculos na história, não se podem restringir os estudos a poucos matemáticos famosos - ao contrário, precisa-se estudar como os conceitos matemáticos foram apresentados, discutidos, recebidos e modificados na grande comunidade matemática numa certa época e cultura - e mesmo, mais além, comparativamente, para culturas diferentes.

Nesta perspectiva, além da abordagem histórica, sugerimos atividades para serem aplicadas em sala de aula, onde cada uma trabalha um segmento do processo histórico. Durante as atividades, confirmamos o quão se faz necessário o conhecimento da definição do número π para o desenvolvimento do próprio estudo sobre circunferência e círculo e vimos, através do nosso trabalho de campo, o quão facilmente aplicáveis são as atividades em sala de aula.

Houve uma boa receptividade por parte dos alunos durante a aplicação das atividades. No bloco de atividades que envolvia o uso do GeoGebra, vimos que os alunos se sentiram mais seguros ao manipular o software do que na aula expositiva em que os polígonos eram construídos com régua e compasso, no primeiro momento. Esta segurança decorre da facilidade de construção dos objetos matemáticos pelo software sem que os alunos necessitem justifica-la, ao contrário do que ocorre na construção com régua e compasso.

A dificuldade conceitual apareceu em vários momentos, como na manipulação algébrica, nos próprios elementos geométricos que eram necessários à construção dos polígonos, no conceito do número π e em polígonos regulares. Os alunos argumentaram que sem a exposição antes da construção, eles não conseguiriam efetuar a aproximação de π pelo Método de Arquimedes.

Notamos, também, que o uso do GeoGebra possibilitou que os próprios alunos investigassem os conceitos dos elementos geométricos, tais como bissetriz, mediatriz, raio e diâmetro. Após a exibição dos mesmos pelo GeoGebra, eles definiam oralmente cada um destes elementos.

A abordagem histórica envolveu os alunos, fazendo com que os mesmos se espantassem com a aproximação de Arquimedes, e os motivou a construir os polígonos, como na fala de um aluno: "Se Arquimedes fez antes de Cristo, eu aqui consigo também".

Portanto, como na visão de Branford (citado por Schubring, 2012), de que "a educação da criança deve concordar, na maneira e na ordem, com a educação da humanidade, considerada historicamente", estendemos esta concepção para o ensino de adolescentes, no que diz respeito aos Ensinos Fundamental e Médio, em particular para o ensino do tema aqui proposto. Por isso a divulgação desta atividade se torna relevante, pois dá margem a discussão de como completar as lacunas conceituais herdadas do Ensino Fundamental, assim como o de articular o conhecimento de diversos tópicos da Matemática em uma só atividade.

6. Referências

Beckmann, P. (1970). History of π (PI). 3 ed. Colorado: St. Martin's Press.

Bardin, L. (2009). Análise de Conteúdo. Lisboa: Edições 70.

BÍBLIA. Português. (1980). Bíblia sagrada. Tradução de Padre Antônio Pereira de Figueredo. Rio de Janeiro: Encyclopaedia Britannica.

Bogdan, R.; Taylor, S. (1975). Introduction to qualitative research methods: a phenomenological approach to the social sciences. New York. J. Wiley.

Brasil. Ministério da Educação. (1997). *Parâmetros curriculares nacionais. Matemática: 3º e 4º ciclo do Ensino Fundamental*. Brasília.

Lima, L. (2012). *Pi: Uma abordagem histórica e didática.* (Licenciatura em Matemática), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Gravina, M. A., Santarosa, L. M. (1998). A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados. Paper presented at the Congresso Ibero-Americano de Informática na Educação, Brasília.

Morgado, José Carlos (2012). *O estudo de caso na investigação em educação*. Santo Tirso: De Facto Editores.

Schubring; G. (2012) Os números negativos. Exemplos de obstáculos epistemológicos?. Rio de Janeiro: LIMC editora - UFRJ

Spradley, J. P. (1980). Participant Observation.Orlando- Florida. Harcourt Brace Jovanovich College Publishers.