Ensino e aprendizagem da trigonometria com o auxílio do software GeoGebra

Teaching and learning of trigonometry with the help of the software GeoGebra

Reinaldo Oliveira Reis Júnior[1]
Eduardo Delcides Bernardes[2]
Matheus dos Santos Reis[3]

RESUMO

As Tecnologias de Comunicação e Informação (TIC) têm sido ferramentas com potencial importante no processo de ensino e aprendizagem. Nesse contexto, compete-nos apresentar os resultados obtidos durante o período de execução do projeto "Ensino e Aprendizagem da Trigonometria com o auxílio do Software GeoGebra" que se desenvolveu junto ao Grupo de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem da Matemática em Ambiente Computacional - GPEMAC, da Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC. Nesse sentido, daremos ênfase às possíveis relações que emergem em sala de aula mediante a introdução de um ambiente computacional de aprendizagem, referentes aos tópicos de Trigonometria sugeridos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais. Por fim, enumeramos as potencialidades do software GeoGebra que mediam de forma positiva o ensino destes conceitos.

Palavras-chave: *TIC; Trigonometria; GeoGebra.*

ABSTRACT

The Information and Communication Technologies (ICT) have been important tools with potential in the process of teaching and learning. In this context, it is for us to present the results obtained during the execution of the project "Teaching and Learning trigonometry with the help of the software GeoGebra" that was developed by the Research Group on Teaching and Learning of Mathematics in Computational Environment - GPEMAC, the State University of Santa Cruz - UESC. In this sense, we will emphasize the possible relationships that emerge in the classroom by introducing a computer-learning environment, relating to topics of trigonometry suggested by the National Curriculum Standards. Finally, we list the software capabilities GeoGebra that measured positively teaching these concepts.

Key-words: *ICT; Trigonometry; GeoGebra.*

[1] Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)- oliveira981@hotmail.com
[2] Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)- eduardodbernardes@hotmail.com
[3] Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)- matheus9608@hotmail.com

Introdução

As representações assumem papel importante no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, principalmente no que tange aos conceitos que envolvem a Trigonometria. A viabilidade e a interação proporcionadas pelo uso das novas Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), particularmente dos ambientes computacionais de aprendizagem (softwares educativos, como o GeoGebra[4], em específico neste caso), são elementos essenciais que permeiam o processo de compreensão de conceitos de um dado objeto matemático. Ressalta-se também, que, o uso de tecnologias é referido no Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007), o que corrobora para a utilização destas afim de enfatizar o uso de múltiplas representações no ensino da Matemática.

Nesse contexto, é importante que os alunos compreendam que existe uma variedade de representações para as ideias matemáticas e que adquiram a capacidade de passar informações de uma forma de representação para outra, estabelecendo desta forma relações entre diferentes ideias matemáticas sobre um tema, em particular no estudo da Trigonometria, domínio da Matemática onde existe uma grande riqueza de representações (NCTM, 2007; KIERAN, 2007). Ante estes fatores, é válida a observação de que os tópicos que abrangem a Trigonometria são contemplados em praticamente todas as instituições de ensino, desde a Educação Básica até o Ensino Superior, ratificado tanto nos Projetos Políticos Pedagógicos (PPP, quando referido à Educação Básica) quanto nos Projetos Acadêmicos Curriculares (PAC, quando referido ao Ensino Superior).

No âmbito das variedades de representações a fundamentação necessária decorre de algumas das teorias que compõe as Referências Teóricas da Didática Francesa, das quais se destacam a Abordagem Instrumental de Rabardel (1995), a Teoria Antropológica da Didática de Chevallard (1992). A primeira se interessa pelo estudo da utilização de ferramentas tecnológicas, fornecendo condições para o professor construir conhecimentos relacionados com as técnicas computacionais, além de entenderem por que e como integrar as tecnologias no processo de ensino e aprendizagem. A segunda enfatiza o estudo de elementos institucionais, na medida em que toda a instituição que se interessa pelo ensino da Matemática pode ter acesso a esses objetos, em especial, no contexto desta pesquisa, a Trigonometria e o ambiente computacional GeoGebra.

Com isso, faz-se necessário analisar o tratamento dos tópicos mais relevantes de Trigonometria apresentados aos alunos ao longo do Ensino Básico utilizando as

---

[4] O GeoGebra, *software* de geometria dinâmica, destinado principalmente ao Ensino Básico e Secundário, possui uma infinidade de ferramentas destinadas ao ensino de Matemática. Além de editado em uma versão em língua portuguesa, este *software* apresenta mais uma valia: é de domínio livre (gratuito) ficando disponível para professores e alunos, tanto nas escolas quanto em casa. Disponível em: *http://www.geogebra.org/cms/download*.

ferramentas do software GeoGebra, dando ênfase aos conteúdos referentes à introdução à Trigonometria. Nesse sentido, buscando contribuir para a melhoria do ensino e aprendizagem da Trigonometria, propomo-nos realizar uma análise institucional considerando como instituição de referência e aplicação uma escola do Ensino Fundamental II da Educação Básica (EBa). Com efeito, destacaremos as praxeologias[5] propostas nessa instituição em torno desse objeto e em seguida envolver, tanto os professores quanto os alunos da instituição de aplicação, realizando assim uma Sequência Didática (SD) em torno do Ensino e Aprendizagem da Trigonometria, partindo do pressuposto de que é relevante compreender o modo como os alunos lidam com diversas formas de representações quando utilizam o GeoGebra como ferramenta.

1. Quadro Teórico

Partindo do pressuposto que as referências teóricas em pesquisas voltadas para a educação em geral têm como objetivo fundamentar e fornecer o aporte necessário a fim de compreendermos e interpretarmos os fenômenos do processo de ensino e aprendizagem (HENRIQUES, 2007), nesta análise servimo-nos de duas das principais teorias que compõe as famigeradas Referências Teóricas da Didática Francesa. São elas: a Abordagem Instrumental, de Rabardel (1995) e a Teoria Antropológica da Didática, de Chevallard (1992).

Abordagem Instrumental

A Abordagem Instrumental foi desenvolvida por Rabardel (1995) com base nos trabalhos de pesquisas em ergonomia cognitiva e tem como propósito, o estudo das práticas que envolvem a utilização de ferramentas tecnológicas no processo ensino/aprendizagem. Nessa teoria uma ferramenta (artefato) não é automaticamente um instrumento eficaz e prático. Por exemplo, um balde é muito mais adequado à tarefa de transportar água do que uma peneira ou uma colher. Essa idéia se aplica a qualquer outro objeto que se apresenta como uma ferramenta, como o caso do computador ou de um software por exemplo. Com efeito, algumas ferramentas são mais adaptadas para realizar certas tarefas do que outras. Essa dependência é intrinsecamente ligada ao tipo de utilização que se propõe. Rabardel (1995) evidenciou essa teoria como uma abordagem para a modelização didática (ou estudo de práticas institucionais na relação do sujeito com o objeto de estudo).

[5]Conceito que permeia a abordagem teórica proposta por Chevallard (1992), no que diz respeito à Teoria Antropológica da Didática. Ele propôs a noção de praxeologia, como conceito fundamental, para estudar "as práticas institucionais relativas a um objeto do saber e em particular as práticas sociais em Matemática.", Henriques (2007).

O autor distingue as terminologias ferramenta (artefato) e instrumento. Para ele o artefato é um dispositivo material utilizado como meio de ação, e o instrumento é uma construção do sujeito ao longo de um processo no qual o primeiro (artefato) transforma-se progressivamente em instrumento. Esse processo é designado gênese instrumental. Dessa forma, para a análise de atividades realizáveis com auxílio de instrumentos (Rabardel, 1995) propôs o modelo SAI (Situações de Atividades Instrumentais) (Figura 1) e apresenta as relações possíveis entre o Sujeito e o Objeto sobre o qual ele age. O objetivo principal do Modelo é colocar em evidência a multiplicidade de interações que intervêm nas atividades realizadas com instrumentos, designadas atividades instrumentais. Nesse modelo, além da interação usual sujeito-objeto [S-O], outras são consideradas, tais como as interações entre o Sujeito e o Instrumento [S-i], o Instrumento e o Objeto [i-O] e a interação do Sujeito com Objeto mediada pelo instrumento [S(i)-O]. Esse modelo permite, portanto, estudar as relações entre o aluno e a Trigonometria por meio de um instrumento, tal como software GeoGebra (Figura 1). Ele é inscrito em um ambiente constituído pelo conjunto das condições (potencialidades, limitações, etc.) que intervém nas atividades instrumentais.

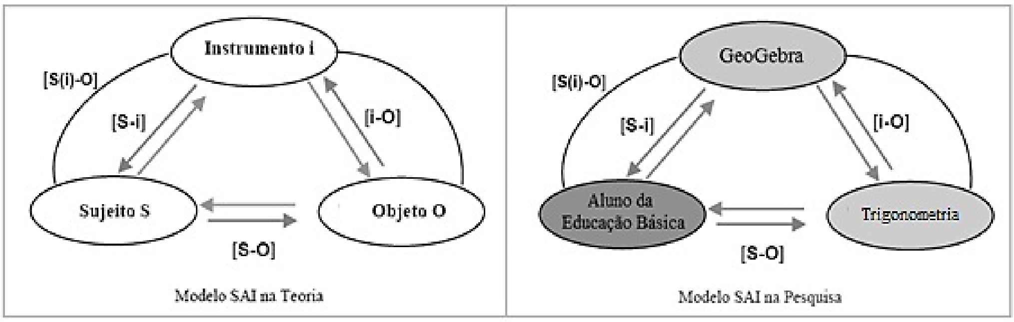


Figura 1. Modelo de Situações de Atividades Instrumentais (Teoria/Pesquisa)
Fonte: Henriques (2007)/Pesquisa Interna

Em nossa pesquisa, o objeto **O** é um objeto matemático, denominado de “Trigonometria”, o sujeito **S** é um estudante de uma instituição do Ensino Médio e o instrumento **i** é o software GeoGebra. Essa modelização, por instrumentação e instrumentalização, vai descrever a forma pelo qual o instrumento influi na constituição da relação [**S**-**O**] do sujeito (aluno do ensino médio) com esse objeto (Função Seno). Essa relação denotada [S(i)-O] aparecerá em todas as situações nas quais o GeoGebra estiver disponível. Todavia, essa teoria por si só, não é suficiente para estudar, de maneira eficaz as questões institucionais inerentes ao nosso objeto de estudo, já que, observamos que esse objeto o qual Rabardel (1995) se refere na Teoria da Instrumentação é um objeto institucional tal como a função seno, e, sendo objeto institucional a relação usual Sujeito-Objeto [S-O] geralmente ocorre em uma instituição. Além disso, dois momentos referentes à gênese instrumental são relevantes: falamos da instrumentação e da instrumentalização. Segundo Henriques et al (2007, p.5): “A instrumentação consiste na elaboração da relação [S-i]: o sujeito deve construir os esquemas, os procedimentos, as operações necessárias para a implementação do artefato...”. Nessa dimensão as ações são dirigidas diretamente ao uso do artefato, enquanto que a “instrumentalização diz respeito à construção das relações [i- O]. O sujeito atribui ao instrumento uma possibilidade de agir sobre o objeto O e constrói as propriedades funcionais que permitem a realização desta possibilidade de ação”. Nessas duas dimensões (instrumentação e instrumentalização) estão em ênfase, na primeira, a adaptação do problema ao artefato, e na segunda dimensão, a modificação do artefato para solucionar um dado problema. Nesse contexto, no desenvolvimento de atividades de cunho instrumental, colocamos em evidência essas duas dimensões.

A priori, destacamos, até aqui, as bases teóricas que nos fornecem subsídios para o estudo da aprendizagem da utilização de ferramentas tecnológicas por meio da Abordagem Instrumental, proposta por Rabardel (1995). Porém, como inserimos nesta pesquisa as relações existentes entre o objeto de estudo e a sua ocupação em determinada instituição de referência, nesse caso a Trigonometria (objeto) e uma escola da Educação Básica (instituição) faz-se necessário um aporte teórico adequado para delinear as relações institucionais e pessoais. Com isso recorremos à segunda teoria citada anteriormente: a Teoria Antropológica da Didática (TAD), proposta por Chevallard (1992).

Teoria Antropológica do Didático

A chave para esta teoria consiste principalmente na ideia relativa à transposição didática que consiste no conjunto de transformações que sofre um objeto de saber (conhecimento) com a finalidade de ser ensinado. Henriques (2007) afirma que

> essa abordagem considera os objetos matemáticos, não como existentes entre si, mas como entidades que emergem de sistemas e práticas de dadas instituições. Esses sistemas ou praxeologias são descritos em termos de tarefas específicos daquele objeto, das técnicas que permitem resolvê-los, e através dos discursos que servem a explicar e justificar as técnicas. Essas técnicas podem ser caracterizadas do ponto de vista instrumental [...] Chevallard (1992) propõe elaborar uma antropologia didática, cujo objeto de estudo seria a didática, a fim de estudar, por exemplo, fenômenos acerca do comportamento do aluno diante de um problema matemático.

Considerar tudo em estado de objeto. Eis uma das máximas abordadas por Chevallard (1992) na TAD. Distinguindo, no entanto, os tipos específicos de objeto. São eles: as instituições, as pessoas e as posições que ocupam as pessoas nas instituições bem como os objetos do saber (conhecimento) que transitam nas instituições. Concluímos então que ao ocupar determinada posição, essas pessoas acabam por se tornar sujeitos das instituições, contribuindo assim para a existência dessas.

Porém, ao lidar com objetos matemáticos, acabamos por suscitar o conhecimento. Sobre ele, Chevallard (1992), assemelha-o ao saber como forma de organização, e, com isso, propõe algumas relações onde entram em jogo os tipos específicos de objetos. Quando relacionamos um dado objeto (**O**), uma dada instituição (**I**) e uma dada pessoa (**X**), obtendo assim, o reconhecimento deste objeto **O** por **I** e por **X**, falamos em Relação Pessoal – Institucional (Cf. Figura 2).

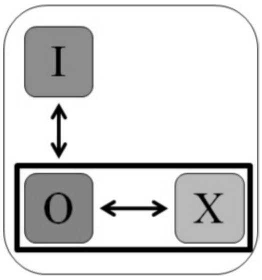


Figura 2. Relação Pessoal – Institucional.
Fonte: Pesquisa Interna.

Sobre esta relação, conclui Chevallard (1992), "Todo saber é ligado ao menos a uma instituição, na qual é colocado em jogo, em um dado domínio real. O ponto essencial é, portanto, que um saber não existe in vácuo, num vazio social. Todo conhecimento aparece, num dado momento, numa dada sociedade, ancorado numa ou numas instituições". Assim, do ponto de vista da abordagem antropológica, consideramos, por exemplo, a Trigonometria como objeto **O** do saber e uma escola da Educação Básica como instituição **I** onde existe **O**. Outra relação de importância inegável emerge quando colocamos em evidência a primeira teoria, a da Instrumentação, proposta por Rabardel (1995). Logo, consideramos o objeto O proposto por Chevallard como o mesmo objeto referido por Rabardel nas SAI, e que o instrumento aqui denotado por i, seja reconhecido pela instituição I, e que "nesse encontro há intenções de I que se traduzem por práticas existentes nessa instituição, através de técnicas instrumentais de i ou de técnicas tradicionais papel/lápis utilizadas para se trabalhar com O, então, podemos falar da relação institucional e pessoal a um instrumento i", Henriques (2007). Verificando esta ocorrência, falamos então na Relação Institucional a um Instrumento (Cf. Figura 3).

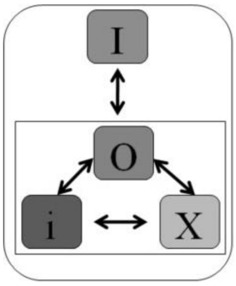


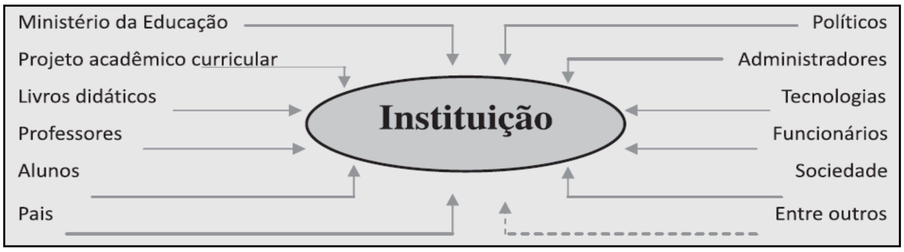
Figura 3. Relação Institucional-Pessoal a um instrumento.
Fonte: Pesquisa Interna.

Logo, a partir destas análises conseguimos estabelecer conceitos no que diz respeito às relações institucionais e pessoais aos objetos do saber, e aos ambientes computacionais de aprendizagem. Porém, como um dos objetivos desta pesquisa diz respeito à realização de uma análise institucional considerando uma escola do Ensino Fundamental II da Educação Básica como instituição de referência e de aplicação, faz-se necessário destacar a natureza ou práticas de ensino dos objetos nas instituições. Para tanto, recorremos à outra vertente da TAD para tal apreciação: a Abordagem Praxeológica. A partir deste exposto, temos que, uma dada Relação Institucional é, particularmente, ligada de forma direta às atividades institucionais que são solicitadas aos alunos. De acordo com Chevallard, o saber matemático, enquanto forma particular do conhecimento é fruto da ação humana institucional, e é algo que: se produz se utiliza, se ensina ou de uma forma geral, que transita nas instituições. Com isso, o autor propõe o conceito (noção) de organização praxeológica ou apenas praxeologia, estabelecendo assim elementos fundamentais para o estudo das práticas institucionais relativas a um dado objeto do saber e determinadas práticas sociais em Matemática. Novamente, segundo Henriques (2007), a abordagem praxeológica é, portanto, um modelo para análise da ação humana institucional. Com efeito, as praxeologias são descritas em termos das quatro seguintes noções: (tipo de) tarefa, técnicas, tecnologia e teoria.

Essas quatro noções descrevem o que chamamos de organização praxeológica completa. Onde os tipos de tarefa juntamente com as técnicas constituem o saber-fazer, que denominaremos aqui de praxes; e, a tecnologia em concomitância com a teoria constitui o que definimos como ambiente tecnológico-teórico, ou seja, o logôs. Logo, compreendemos que "produzir, ensinar e aprender matemática são ações humanas que podem descrever-se conforme o modelo praxeológico. Nesse sentido, a organização praxeológica relativa às atividades matemáticas é uma organização matemática. Analisar a vida de um objeto matemático numa instituição, compreender sua significação para essa instituição, é identificar a organização matemática que coloca esse objeto em jogo", Henriques (2007). Assim, para evidenciar esta organização recorremos a uma Análise Institucional.

2. Análise Institucional

Segundo Henriques (1999) as pesquisas em Educação Matemática exigem do pesquisador conhecimentos detalhados do saber matemático envolvido na pesquisa. Os elementos institucionais considerados pelo autor estão organizados como no quadro abaixo.



Quadro 1. Elementos institucionais por Henriques, Nagamine, Nagamine (2012)

Com base nesse quadro, assim como na definição acima, consideramos no nosso trabalho a Educação Básica como instituição de referência. Nessa instituição, interessamo-nos particularmente com o estudo dos seguintes elementos: livros didáticos e tecnologia. Com essa escolha, apresentamos a seguir uma análise de um livro didático (LD) referentes ao ensino da função seno como objeto Matemático de estudo nessa instituição.

Como mencionado inicialmente, a abordagem dos conteúdos de Trigonometria na Educação Básica, no Brasil, dá-se em dois momentos ímpares: o primeiro, no final do Ensino Fundamental, quando são introduzidos os conceitos de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, e o segundo, no Ensino Médio, quando são abordados os conceitos de arcos, ângulos e suas unidades de medida (radianos e graus), bem com a noção de ciclo trigonométrico, as razões trigonométricas neste, as funções trigonométricas e suas representações analítica-algébrica e gráfica. Comumente, estes conceitos podem aparecer em temas transversais em outros eixos disciplinares, como em Física, por exemplo, e em outros enfoques da Matemática como os Números Complexos.

Os PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio) destacam a importância do ensino de Trigonometria e a utilização de recursos pedagógicos a fim de aprimorar o aprendizado da Matemática bem como das outras disciplinas. Em especial, sobre o ensino dos tópicos referentes à Trigonometria, este documento destaca a importância do tema:

> Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem da matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os

> aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que se deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos. (BRASIL, 2000, p.44)

Análise do livro didático

Para realizarmos a análise do MAT_PROF (Livro do Professor de Matemática), utilizamos a estrutura organizacional do livro didático (Figura 4) proposta por Henriques, Nagamine, Nagamine (2012, p. 1272).

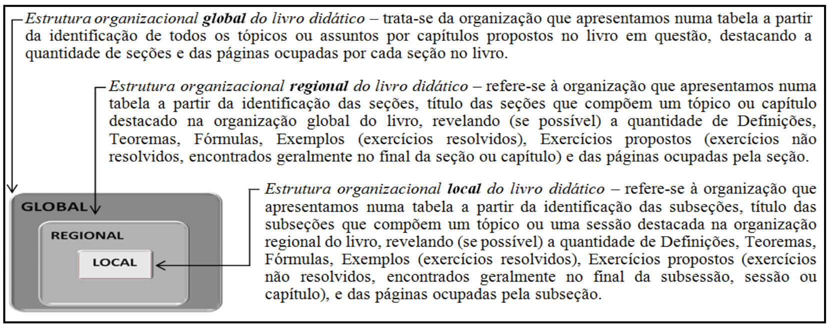


Figura 4. Estrutura Organizacional do Livro Didático
Fonte: Henriques, Nagamine, Nagamine (2012).

Em função de optarmos pela Educação Básica como instituição de referência, consideramos nela o livro didático enquanto elemento institucional. Para isso, escolhemos o exemplar que apresentamos no Quadro 2. Este traz também a referência completa do livro, onde P/n representa o lugar ocupado pela Trigonometria no livro, sendo que P indica o número de páginas ocupadas pela Trigonometria e n o número total de páginas do livro.

Referência do livro **Título, autor, « tradutor » edição, editor, ano de edição**	**P/n**
Tudo é Matemática**;** Luiz Roberto Dante; 2ª edição, Editora: Patrícia Furtado. – São Paulo: FTD, 2002. Livro do Professor.	28/388

Quadro 2. Referência do livro utilizado para análise na Pesquisa Interna.

O livro perfaz um total de 10 capítulos distribuídos em 388 páginas. Na Tabela 1, apresentamos a organização didática global, delineando a quantidade de capítulos, conteúdo por capítulo, quantidade de seções e páginas por seção. Algumas informações desta estrutura organizacional são notáveis: cada capítulo é dividido, em média, em 8 seções, e no máximo 11; para cada capítulo há uma seção fixa destinada à Introdução, com um exemplo que contextualiza o conteúdo a ser abordado. Assim a organização por capítulo, ao longo do livro, é distribuída da seguinte forma: Introdução, Definições, Exemplos e Exercícios. Não há indicação quanto ao nível dos exercícios, no entanto, ao longo dos capítulos são disponibilizados desafios sumários. Em outras tarefas é recorrente o símbolo de uma calculadora, indicando a possibilidade de uso de alguma tecnologia para a resolução desta. Ao final de cada capítulo é ofertada ainda uma revisão cumulativa, onde são apresentadas algumas tarefas mais complexas. Com isso, acabamos por perceber que a obra segue a Organização Didática Clássica, onde o estudante é guiado a partir de situações mais simples para as mais complexas (tarefas emblemáticas).

Tabela 1. Estrutura Organizacional Global do livro em análise

Capítulos	Assunto	Seções	Páginas
1	Revendo o que Aprendemos	4	5
2	Números Reais: Potências e Radicais	4	27
3	Equações e Sistemas de Equações do 2º Grau	6	32
4	Explorando a ideia de Função	6	33
5	Proporcionalidade em Geometria	5	23
6	Semelhança	5	30
7	Relações métricas no triângulo retângulo e na circunferência	9	22
8	**Introdução à Trigonometria**	**8**	**27**
9	Perímetros, Áreas e Volumes	4	36
10	Noções de Probabilidade e Estatística	7	38
Atividades Suplementares	-	-	58
Glossário	-	-	10
Respostas	-	-	26
Leituras Complementares	-	-	1
Bibliografia	-	-	1

Da tabela anterior destacamos o capítulo 8, destinado os tópicos referentes à Introdução à Trigonometria, a fim de esboçar o que denominamos anteriormente de Organização Didática Regional, delineando as quantidades de Definições, Fórmulas, Exemplos, Exercícios, Desafios e Páginas, além das seções e os títulos das seções contidas no capítulo 8. (Cf. Tabela 2.)

Dos dados coletados e distribuídos na tabela abaixo, observamos que cada seção é concluída com um conjunto de exercícios propostos, sendo estes às vezes divididos em blocos (implicitamente por pacotes). Ao final do livro as respostas destes são apresentadas de forma sumária. Depois de analisadas as tarefas, bem como as técnicas envolvidas no processo de resolução de cada uma delas, concluímos que a disposição destas favorece para a determinação de um mimetismo durante a realização das mesmas. Assim, como de uma tarefa para outra o aluno acaba "imitando" a técnica para resolução, culminamos no que Brousseau (1998) denominou de efeito topázio. Durante a prática pedagógica da matemática podemos observar certas situações em que o aluno sente-se bloqueado diante da dificuldade momentânea de resolver um problema. Diante disso, o professor pode ser levado a tentar acelerar a aprendizagem, antecipando o resultado que deveria ser alcançado pelo esforço do próprio aluno. Esse tipo de situação é bem característico do ensino tradicional da matemática, na qual, o professor, indevidamente, toma para si uma parte essencial da tarefa de compreensão do problema em questão. O que deveria ser resultado do esforço do aluno passa a ser visto como uma tentativa de transferência de conhecimento.

Tabela 2. Estrutura Organizacional Regional do livro em análise

Seção	Título da Seção	Def	For	Ex	Exo	Des	P
8.1	Introdução	-	-	-	-	-	2
8.2	Índice de Subida	1	1	-	3	-	1
8.3	**As Razões Trigonométricas**	**6**	**7**	**1**	**11**	**2**	**4**
8.4	Relações entre Seno, Cosseno e Tangente	3	3	-	7	1	2
8.5	Razões Trigonométricas para ângulos de 30º, 45º e 60º	1	-	2	9	-	2
8.6	A tabela das razões trigonométricas	1	-	-	12	-	4
8.7	Relações Trigonométricas em um triângulo qualquer	7	7	4	16	-	6
8.8	Uso das relações Trigonométricas em Polígonos regulares inscritos em uma Circunferência	11	6	1	13	-	4
8.9	Revisão Cumulativa	-	-	-	16	-	2
Total	-	30	24	8	87	3	27

Def = Definições, For = Fórmulas, Ex = Exemplos, Exo = Exercícios, Des = Desafios, P = Página

Dessa forma, depois de analisarmos a disposição dos conteúdos de Trigonometria regionalmente, procederemos com a análise da estrutura organizacional local, a fim de explicitar o habitat[6], ou seja, o lugar de vida, de um dos tópicos desse eixo temático que nos interessa, de fato. Da Tabela 2, destacamos a seção 8.3 (As Razões Trigonométricas), destinada a abordagem das razões trigonométricas, resultando assim na Tabela 3, reservada para a análise local.

[6] Chevallard (1992) define *habitat* como sendo o lugar de vida e o ambiente conceitual de um objeto do saber. Trata-se, essencialmente, de objetos com os quais interage, mas também das situações de ensino nas quais aparecem às manipulações e experiências associadas.

Das informações coletadas para a análise local concluímos que o habitat das razões trigonométricas neste exemplar contém 6 definições, 7 fórmulas, 1 exemplo, 11 exercícios, 2 desafios todos distribuídos em 4 páginas. Analisamos particularmente a abordagem proposta pelo autor no que se refere ao estudo do eixo temático destinado à Trigonometria destacado acima.

Tabela 3. Estrutura Organizacional Regional do livro em análise

Seção	Título da Seção	Def	For	Ex	Exo	Des	P
8.3	**As Razões Trigonométricas**	**6**	**7**	**1**	**11**	**2**	**4**
Total	-	6	7	1	11	2	4

O conteúdo, assim como em todas as outras seções, é introduzido por meio de uma analogia. No caso particular das razões trigonométricas é utilizada uma mediação com o modelo famigerado de uma rampa. Destacamos o registro figural da situação abaixo:

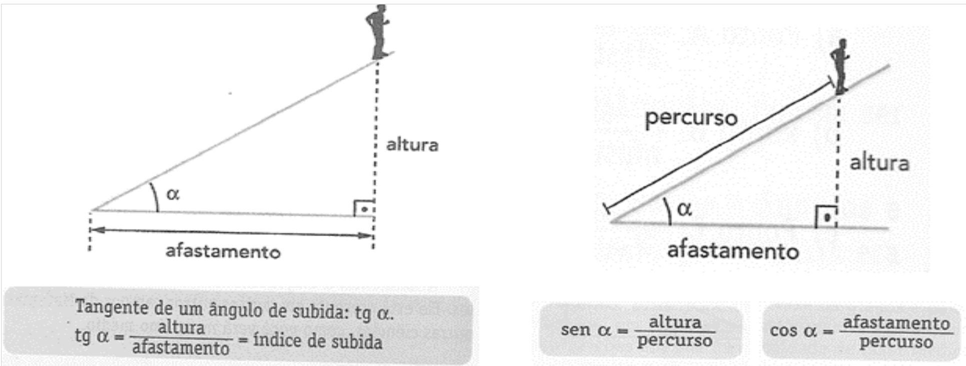


Figura 5. Registro Figural/Geométrico e Algébrico das razões trigonométricas

Note que, no registro acima, e na forma como é apresentado, os conceitos de cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa são omissos. Após a abordagem introdutória e utilizando a analogia acima, o autor apresenta formalmente estes conceitos, fazendo uso da semelhança de triângulos. Observe na Figura 6:

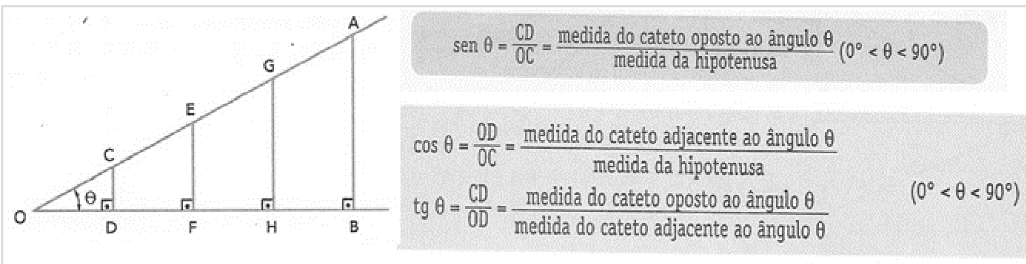


Figura 6. Registro Figural/Geométrico e Algébrico das razões trigonométricas

A partir de então, os elementos do triângulo retângulo são apresentados de forma a substituir os conceitos já abstraídos de altura, percurso e afastamento. No entanto, questionamo-nos quanto ao exemplo utilizado e a forma como estes conceitos serão trabalhado pelo professor. Ressaltamos então o cuidado com o uso rebuscado de analogias sendo que estas podem, em longo prazo, reduzir os significados. Depois de analisada a forma como o conteúdo é apresentado a longo da seção 8.3, verificamos então a disposição das tarefas nesta mesma localidade. Como relatado anteriormente, ao longo do MAT_PROF, os exercícios são distribuídos em blocos, sendo que estes necessitam apenas de uma única técnica para resolução. Destacamos um conjunto de sub-tarefas da seção em análise e averiguamos que o mesmo ocorre (Cf. Figura 7).

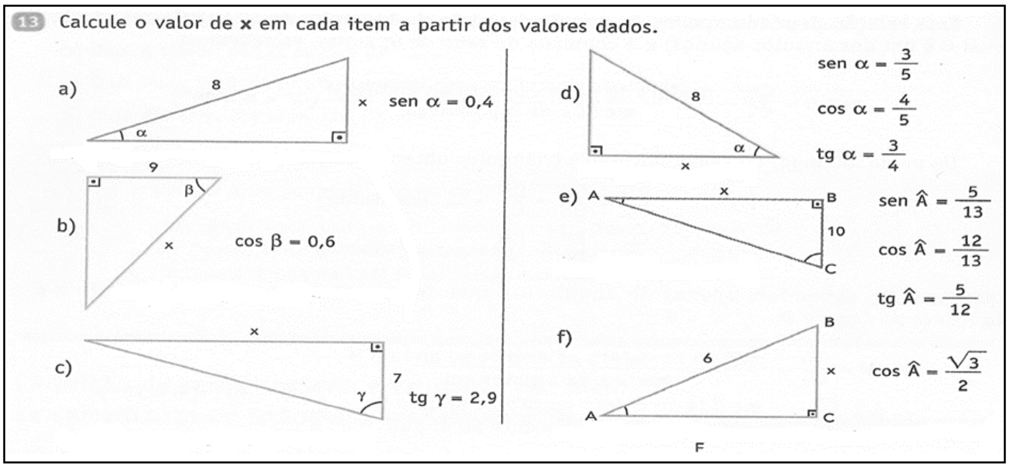


Figura 7. Tarefa 13 (T13), Seção 8.3 do MAT_PROF.

Assim, percebemos o habitat das razões trigonométricas contém 11 tarefas, e concluímos que estas acabam por alimentar o nicho figural deste eixo temático correspondente à Trigonometria. Como a modelização do cálculo não é apresentada, elaboramos em ambiente papel/lápis uma proposta para esta considerando então as noções de Registro de Representações Semióticas de Duval (1993), a fim de caracterizar a coordenação[7] entre os registros e o tratamento[8] de representações necessários para esta modelização. Espera-se do aluno, durante este processo, a mobilização entre os registros algébrico, analítico bem como a língua materna. Optamos para este modelo a subtarefa “a)” da T13. Como na figura abaixo.

[7] A coordenação é a manifestação da capacidade do indivíduo em reconhecer a representação de um mesmo objeto, em dois ou mais registros distintos. (HENRIQUES, ALMOULOUD, 2016)

[8] O tratamento de uma representação é a transformação desta em outra representação no mesmo registro no qual foi formada. O tratamento é, portanto, uma transformação interna num registro. (HENRIQUES, ALMOULOUD, 2016)

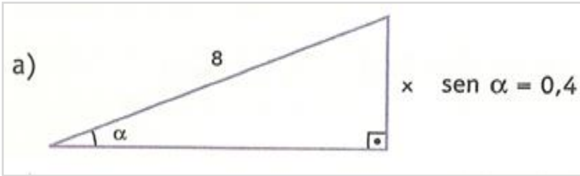
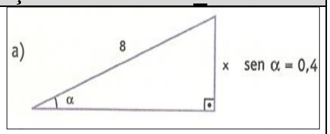


Figura 8. Subtarefa “a)” da tarefa 13 (T13), Seção 8.3 do MAT_PROF.

Consideramos então neste processo, que o aluno detenha os conhecimentos mínimos referentes à regra de três simples, simplificação de frações e que saiba identificar os elementos do triângulo retângulo a fim de aplicá-los na fórmula apresentada no Quadro 3 abaixo.

Modelização do Cálculo – Subtarefa “a)” da Tarefa 13 da Seção 8.3 do MAT_PROF

Partindo da relação que, sendo α um ângulo agudo, temos:



$$\sin\alpha = \frac{Medida\_do\_Cateto\_Oposto}{Medida\_da\_Hipotenusa} = \frac{CO}{H}.$$

Sabendo que $H = 8$ e que $CO = x$, seque que:

$$\sin\alpha = \frac{CO}{H} = \frac{x}{8} \qquad \text{(i)}$$

Como $\sin\alpha = 0,4$, (dados da tarefa), temos substituindo em (i):

$$\sin\alpha = \frac{x}{8}$$

$0,4 = \frac{x}{8}$, observando que 0,4$= \frac{4}{10} \rightarrow \frac{4}{10} = \frac{x}{8} \rightarrow x = \frac{32}{10} \rightarrow x = 3,2.$

Quadro 3. Modelização do cálculo utilizando o tratamento no registro algébrico e numérico

A partir destas breves apreciações quanto às estruturas organizacionais do livro didático, algumas considerações são necessárias. Na maioria das tarefas propostas, o uso de palavras como “encontre”, “calcule” e “ache” é relevante. Há solicitação, por exemplo, do cálculo do famigerado “x”, o que pode causar dúbia interpretação por parte do aluno. As respostas, ao final do livro, são ofertadas de forma “seca”, sem ressalva alguma a respeito da forma como proceder para a resolução de dada tarefa. As tarefas denominadas “Desafios”, apesar de possuírem este nome, acabam por serem resolvidos utilizando a mesma técnica das tarefas ditas não-emblemáticas. Com o confronto dos resultados obtidos na estrutura organizacional local tanto do habitat das Razões Trigonométricas, observamos que estes revelam uma praxeologia usual, que parte da apresentação da teoria, com a abordagem dos conteúdos, do bloco logôs **[θ/Θ]** para o bloco praxes **[T/τ]**. Ou seja, de fora para dentro como se mostra na Figura 9. Nessa organização, os exercícios emblemáticos propostos (no caso do LD, exercícios) ao leitor/estudante, que neste exemplar se encontram sistematicamente ao final de cada seção constituem, em geral, de aplicações imediatas dos conceitos ou técnicas evidenciadas no bloco logôs.

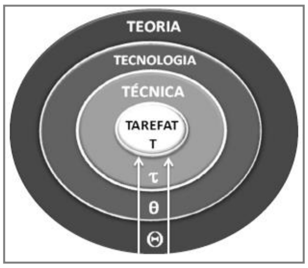


Figura 9.1 Praxeologia usual.
Fonte: Henriques, Nagamine, Nagamine (2012).

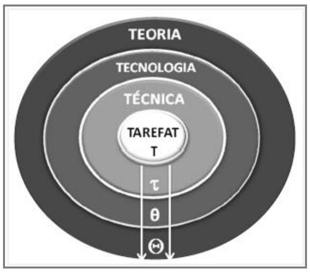


Figura 10.2 Praxeologia modelada.
Fonte: Henriques, Nagamine, Nagamine (2012).

Ademais, constatamos que a representação no registro gráfico ocupa um espaço significativo nessa organização, porém, na maioria dos casos apresentados neste exemplar, esta é de domínio do professor, uma vez que as técnicas de obtenção de tais representações não estão explícitas em tarefas com praxeologias associadas. Verificamos ainda que a articulação entre as representações nos registros gráfico e algébrico não é trabalhada. Salientamos a importância da coordenação entre os registros bem como da conversão[9] das representações dos objetos de estudo envolvidos como necessária para a consolidação de conhecimentos matemáticos e geométricos.

A partir desta análise elaboramos uma Sequência Didática (SD) constituída de tarefas que emanam da organização praxeológica das Razões Trigonométricas, útil para o estudo das práticas efetivas de estudantes em torno desses objetos. Essa SD é composta de um Dispositivo Experimental (DE) onde dispomos de três tarefas para exploração e resolução utilizando as técnicas instrumentais do ambiente computacional GeoGebra, evidenciando dentre outras características ausentes no LD analisado, a coordenação entre registros, a conversão e o tratamento de representação dos objetos matemáticos e geométricos envolvidos. Isso permitirá a inversão da praxeologia usual destacada na análise do LD. Nessa praxeologia, a evolução dos estudos é motivada por resolução de problemas ou tarefas relativas aos conceitos ou objetos institucionais que se pretende ensinar. Segundo Henriques, Nagamine, Nagamine (2012), essa praxeologia é denominada de praxeologia modelada, conforme indicada na Figura 2. O nosso interesse perpassa, assim, pela praxeologia modelada onde buscamos trazer tarefas passíveis de tratamento utilizando o software GeoGebra por meio de uma Sequência Didática (SD) que apresentamos a seguir.

[9] A conversão de uma representação é a transformação desta representação em uma representação de outro registro. (HENRIQUES, ALMOULOUD, 2016)

3. Sequência Didática

Destacamos que uma SD relaciona-se fortemente com o conceito de Análise Institucional em torno dos objetos de estudo envolvidos, afirmam Henriques, Nagamine, Nagamine (2012). Ela envolve a análise de práticas institucionais de sujeitos (como estudantes, professores, etc.) de uma dada instituição de referência. "Mas, o que é uma Sequência Didática?", perguntavam Reis Júnior, Henriques (2014). Entendendo uma SD como um dos aspectos da Engenharia Didática[10], Henriques (2001) propõe a seguinte definição:

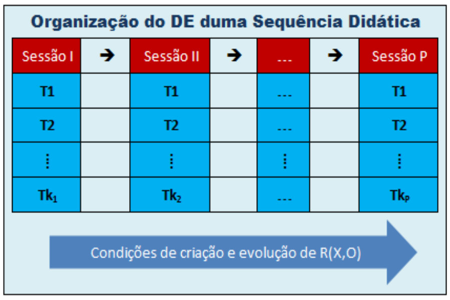
> Uma sequência didática é um esquema experimental formado por situações, problemas ou tarefas, realizadas com um determinado fim, desenvolvido por sessões de aplicação a partir de um estudo preliminar em torno de um objeto do saber e de uma análise matemática/didática, caracterizando os objetos específicos de cada situação, problema ou tarefa [constituinte de uma praxeologia]. (HENRIQUES, 2001)

As análises matemáticas/didáticas destacam as resoluções possíveis, a forma de controle e os resultados esperados em cada situação, pré-requisitos e competências. Estes são, portanto, parte da análise a priori e desenvolvem-se de acordo com a praxeologia de referência do objeto de estudo. Henriques, Palmeira, Oliveira (2013) consideram cinco momentos essenciais no desenvolvimento de uma SD:

> 1. Na análise institucional a SD é idealizada com base nos objetos de estudo relacionados na instituição de referência.
> 2. Na organização do dispositivo experimental (DE) consideramos as tarefas correspondentes a praxeologia destacada na análise institucional.
> 3. Na análise a priori estudamos as condições de realização, da caracterização dos objetivos específicos e da explicitação das técnicas institucionais de realização matemática de cada tarefa, colocando em evidência as variáveis didáticas, estratégias e soluções possíveis, resultados esperados, pré-requisitos e competências.
> 4. Na aplicação da SD observamos as relações pessoais com o objeto de estudo, com poucas, ou nenhuma intervenção do pesquisador. É neste momento que constituímos um protocolo experimental a partir das práticas dos alunos/estudantes.
> 5. Na análise a posteriori analisamos as práticas institucionais dos sujeitos envolvidos na pesquisa, com base no protocolo experimental.
>
> (HENRIQUES, PALMEIRA, OLIVEIRA, 2013, p. 3)

[10] A engenharia didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise sequencial de atividades de ensino (Artigue, 1988).

Uma vez concluídos os cinco momentos acima descritos, a SD sugere um confronto entre as análises a priori e a posteriori. Este deve permitir responder algumas questões de pesquisa, reflexões sobre o papel da instituição de referência no aprendizado dos sujeitos envolvidos na pesquisa, bem como contribuir na realização de outras pesquisas. Dessas cinco etapas, ressaltamos que as três primeiras ocorrem numa Pesquisa Interna[11], enquanto os dois últimos na Pesquisa Externa[12]. Neste trabalho nos restringimos na Pesquisa Interna, deixando a segunda, isto é, a Pesquisa Externa para oportunidades futuras de pesquisa e difusão de conhecimento. Os autores (HENRIQUES, PALMEIRA, OLIVEIRA, 2013) afirmam ainda que a evolução do DE deve permitir acompanhar a aprendizagem dos sujeitos X envolvidos, de uma tarefa para outra, com intenções a um dado objeto O, na mesma sessão, e/ou de uma tarefa para as outras de sessões distintas, delineando a relação R(X,O). No Quadro 4 resume-se a organização do DE duma SD com P sessões. Na prática, cada sessão compõe um dispositivo experimental contendo T_k tarefas. Nesta organização, cada ki representa o número de tarefas que compõe cada uma das P sessões da SD.



Quadro 4. Organização do DE duma Sequência Didática.
Fonte: Henriques, Palmeira, Oliveira (2013).

Organização de uma sessão experimental	
Sessão I	Objetivo da sessão I
T1	**Objetivos específicos da T1**
T2	Apresentação da análise a priori.
:	Destacar, variáveis didáticas de situações; estratégias de resolução, corretas ou não, da tarefa com as respectivas resoluções; escolha de possíveis estratégias pelos estudantes. Observáveis dessas estratégias pertinentes na resolução, do estudante, com objetivo da pesquisa.
Tk_1	

Quadro 5. Organização de uma Sessão Experimental.
Fonte: Henriques, Palmeira, Oliveira (2013).

A partir do Quadro 4, os autores apresentam a organização de uma sessão (Quadro 5). A análise da sequência que apresentaremos é baseada nesta organização, que os autores chamam de sequência didática unitária (SDU), por se organizar com uma única sessão. Analisamos os elementos de controle, as condições de realização e a evolução de relações observáveis, com base no modelo praxeológico da TAD. Apresentamos a seguir o Dispositivo Experimental (DE) composto de três tarefas.

[11] A *Pesquisa Interna* é uma sondagem realizada pelo pesquisador individualmente (ou por um grupo de pesquisadores), sem intervenção de sujeitos externos. Momento no qual o pesquisador (ou o grupo) procura compreender melhor o seu objeto de estudo. Ele conjectura, problematiza, formula hipóteses, questiona-se, define o quadro teórico, os objetivos e descreve o percurso metodológico da sua pesquisa.
[12] A *Pesquisa Externa* é uma sondagem que envolve sujeitos externos, como público alvo. Momento no qual o pesquisador (ou grupo) aplica os estudos desenvolvidos na pesquisa interna. Esta aplicação, teste ou experimentação pode ou não envolver seres humanos. (HENRIQUES, 2014, p. 68)

4. Dispositivo Experimental

O DE que apresentamos a seguir é organizado com três tarefas, T1, T2 e T3, característica de uma SDU e poderá ser proposta aos estudantes de uma instituição de aplicação da EBa numa única sessão.

	SESSÃO UNITÁRIA	
$T_{1.}$	Verificar o Teorema de Pitágoras utilizando as ferramentas do software GeoGebra.	
	$t_{1.1}$	Construir um triângulo retângulo usando duas retas perpendiculares como suporte tal que a intersecção entre elas seja um de seus vértices.
	$t_{1.2}$	Medir o comprimento dos lados do triângulo construído em **t1**.
	$t_{1.3}$	Construir três quadrados a partir de cada um dos lados do triângulo retângulo construído em **t1**.
	$t_{1.4}$	Mover um dos vértices do triângulo e comparar as áreas dos quadrados.
$T_{2.}$	Identificar alguns elementos do triângulo retângulo.	
	$t_{2.1}$	Construir um triângulo retângulo usando duas retas perpendiculares como suporte tal que a intersecção entre elas seja um de seus vértices.
	$t_{2.2}$	Medir os ângulos internos do triângulo retângulo construído em **t1**.
	$t_{2.3}$	Identificar os ângulos agudos, os catetos opostos e adjacentes em relação a cada ângulo agudo e a hipotenusa.
	$t_{2.4}$	Mover um dos vértices de maneira que os ângulos agudos se alterem.
	$t_{2.5}$	Calcular a razão entre as medidas dos segmentos do triângulo retângulo construído em **t1** dois a dois. Nomeá-los da seguinte forma: X = “medida do cateto oposto dividido pela medida da hipotenusa”; Y = “medida do cateto adjacente dividido pela medida da hipotenusa”; Z = “medida do cateto oposto dividido pela medida da hipotenusa”
	$t_{2.6}$	Mover o vértice do ângulo em relação ao qual foram calculadas as razões alterando-o para valores entre 0º e 90º.
$T_{3.}$	Identificar as razões trigonométricas para os ângulos notáveis (45º).	
	$t_{3.1}$	Construir um quadrado e traçar uma de suas diagonais.
	$t_{3.2}$	Escolher um dos triângulos obtidos e medir os ângulos internos.
	$t_{3.3}$	Identificar o cateto adjacente e o cateto oposto em relação aos ângulos agudos medidos na tarefa **t2**.
	$t_{3.4}$	Calcular, em relação a um dos ângulos agudos, por meio da razão entre as medidas dos segmentos, a medida do seno, do cosseno e da tangente deste ângulo.
	$t_{3.5}$	Com o auxílio de uma calculadora calcular um valor aproximado para $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Comparar com as razões obtidas na tarefa $t_{3.4}$.

Quadro 6. Dispositivo Experimental.

A seguir passaremos à realização da análise a priori e sequencial de cada tarefa proposta neste dispositivo, com base na praxeologia de referência proposta para o ensino de Trigonometria.

Análise a priori do Dispositivo Experimental

Como vimos na organização de uma SD, nessa parte estudamos as condições de realização, caracterização dos objetivos específicos e das técnicas institucionais de realização de cada tarefa, colocando em evidência as variáveis didáticas, estratégias e soluções possíveis, resultados esperados, pré-requisitos e competências. A proposta da nossa pesquisa nos limitou a apresentar os objetivos específicos e as técnicas de resolução.

A tarefa $\mathbf{T_1}$ possui o seguinte enunciado:

$\mathbf{T_1}$.	Verificar o Teorema de Pitágoras utilizando as ferramentas do software GeoGebra.

Objetivo de T_1

> O objetivo de $\mathbf{T_1}$ consiste em verificar o Teorema de Pitágoras por meio da comparação entre as áreas de quadrados de lados de comprimentos correspondentes ao comprimento dos lados de um triângulo retângulo na Janela Representante do Registro Gráfico no GeoGebra.

Análise a priori de T_1

Como solicitado em $\mathbf{t_{1,1}}$, a construção do triângulo retângulo no software GeoGebra, requer a utilização de retas perpendiculares bem como seus pontos de intersecção. Para isso, utiliza-se a ferramenta “Retas Perpendiculares” e em seguida “Ponto de Intersecção”. Para completar o triângulo retângulo traça-se um “Segmento Definido por Dois Pontos”. (Cf. Figura 10).

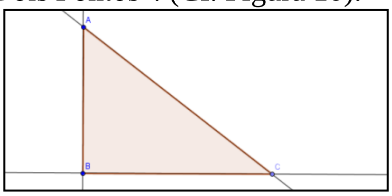


Figura 10. Construção T_1, subtarefa $t_{1.1}$

Em $\mathbf{t_{1.2}}$, é solicitado o comprimento dos lados do triângulo construído em $\mathbf{t_{1.1}}$. Utiliza-se então a ferramenta “Distância, Comprimento ou Perímetro” clicando sobre o segmento desejado. A subtarefa $\mathbf{t_{1.3}}$ solicita a construção de quadrados tendo como lado suporte o lado do triângulo construído em $\mathbf{t_{1.1}}$. Assim, ativando a ferramenta “Polígono Regular” e clicando nos vértices do triângulo dois a dois, construímos os quadrados desejados. Para mensurar a área destes polígonos usa-se a ferramenta “Área” clicando sobre os quadrados. (Cf. Figura 11).

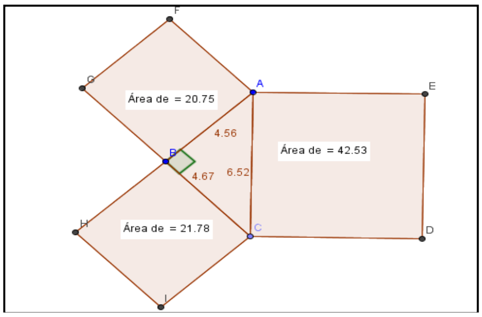


Figura 11. Construção T_1, resultado das subtarefas $t_{1.2}$ e $t_{1.3}$.

Após a execução das subtarefas de $\mathbf{T_1}$ alguns questionamentos podem ser levantados, como por exemplo, verificar o que acontece com a soma das áreas dos quadrados que possuem lados suportes iguais aos dos catetos em relação a área do quadrado que possui lado suporte igual ao da hipotenusa, quando os vértices do triângulo são deslocados. Pode sugerir também a construção desta mesma situação no entanto utilizando um triângulo não retângulo, e enfim verificar se a condição do Teorema de Pitágoras se aplica. Segue abaixo a Figura 12 com a construção finalizada de $\mathbf{T_1}$.

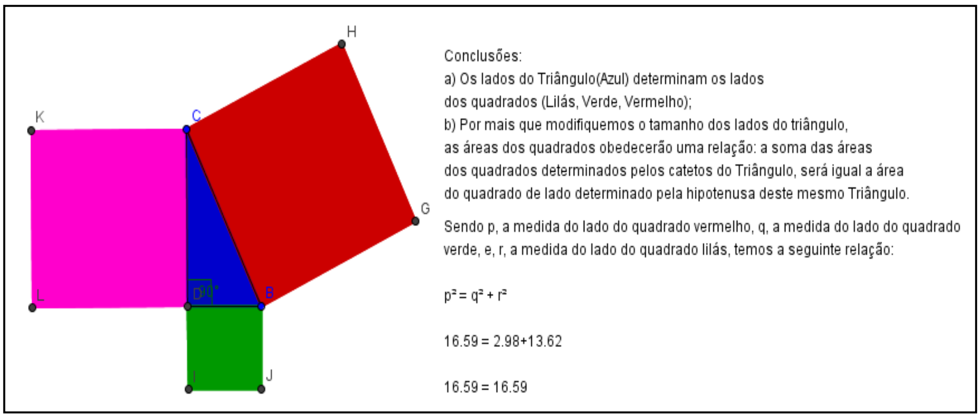


Figura 12. Construção T_1 com utilização da ferramenta Texto.

Passemos ao estudo da tarefa $\mathbf{T_2}$ que apresenta o seguinte enunciado:

$\mathbf{T_2}$.	Identificar alguns elementos do triângulo retângulo.

Objetivo de T_2

O objetivo desta tarefa é, a partir das ferramentas do software GeoGebra, construir um triângulo retângulo e, a partir dele, enumerar seus elementos.

Análise a priori de T_2

A subtarefa $\mathbf{t_{2.1}}$, assim como a $\mathbf{t_{1.1}}$, resume-se em construir um triângulo retângulo a partir de retas perpendiculares suporte. Para isso, utiliza-se a ferramenta “Retas Perpendiculares” e em seguida “Ponto de Intersecção”. Para completar o triângulo retângulo traça-se um “Segmento Definido por Dois Pontos”. Com a subtarefa **t**$_{2.2}$ objetiva-se destacar os ângulos internos referente a cada vértice do triângulo construído na subtarefa anterior. Para isso, recorremos à ferramenta "Ângulo", e, no sentido horário, clicamos nos vértices do triângulo. Note que, o ângulo será nomeado com letras do alfabeto grego, iniciando pela letra alfa, assim como na Figura 13, e caso o seu valor não apareça junto ao seu rótulo, verifique o mesmo na Janela de Álgebra do software.

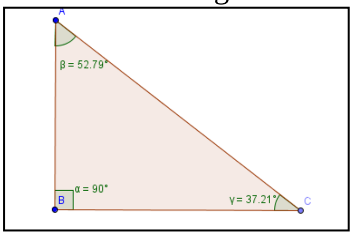


Figura 13. Construção T_2, subtarefa $t_{2.1}$.

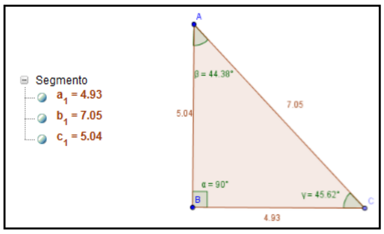


Figura 14. Construção T_2, subtarefa $t_{2.2}$.

As subtarefas **t**$_{2.3}$ e **t**$_{2.4}$ necessitam de conhecimentos a respeito dos conceito de ângulo agudo e ângulo obtuso, uma vez que o software já apresenta a medida dos ângulos internos em graus. Nesse sentido, com a opção "Mover" ativa, ao movimentar um dos vértices do triângulo o aluno poderá observar e constatar as mudanças que ocorrem na medida dos ângulos. Para a subtarefa **t**$_{2.5}$ recorreremos à Janela Representante do Registro Algébrico (JRRA) do GeoGebra. Como relatado anteriormente, essa janela permite a visualização da representação algébrica-numérica dos elementos construídos/manipulados na Janela de Visualização. Então, utilizando a ferramenta "Distância, Comprimento ou Perímetro" clicando sobre o segmento desejado, mensuraremos os comprimentos dos lados do triângulo. Na JRRA aparecerão as informações da Figura 14.

Assim utilizaremos os valores correspondentes às variáveis a_1, b_1 e c_1 para o cálculo das razões desejadas. No Campo de Entrada (CE) do software digitamos, conforme solicita o enunciado da tarefa, as letras X, Y e Z, e para cada uma delas as razões correspondentes. Logo, teremos "X=a_1/b_1", e em seguida apertamos Enter. De forma análoga procedemos para as variáveis Y e Z. Na JA aparecerão as seguintes informações:

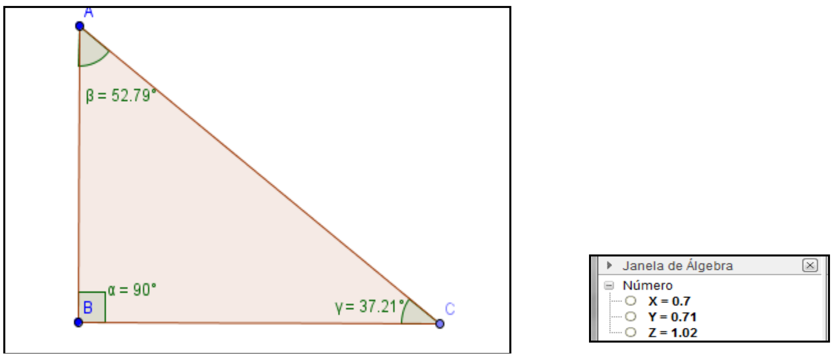


Figura 15. Construção T_2, subtarefa $t_{2.5}$.

As razões calculadas correspondem ao ângulo interno relativo ao vértice "A". Então, ao mover este vértice, cabe ao aluno observar que os valores de X, Y e Z não alteram, por mais que os comprimentos se alterem. Segue abaixo a construção finalizada:

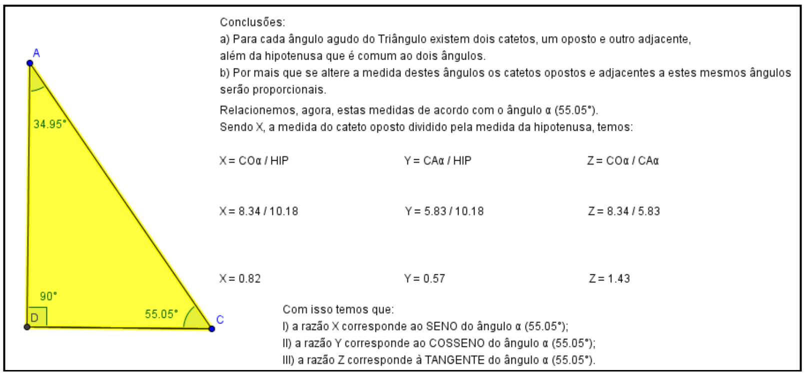


Figura 16. Construção T_2.

A terceira tarefa possui o seguinte enunciado:

T_3.	Identificar as razões trigonométricas para os ângulos notáveis (45º).

Objetivo de T_3

> Visualizar na Janela Representante do Registro Gráfico (JRRG) e na JRRA do GeoGebra as razões trigonométricas que, numericamente, representam o ângulo notável de 45°.

Análise a priori de T_3

Depois de identificados os elementos do triângulo retângulo passemos ao estudo das razões trigonométricas referentes aos ângulos notáveis. Iniciando com a discussão acerca do ângulo de 45º, utilizaremos o quadrado como suporte para as demais construções. A subtarefa $\mathbf{t_{3.1}}$ solicita a construção desse polígono regular e em seguida uma de suas diagonais. Para isso utiliza-se a ferramenta "Polígono Regular", clicando em dois pontos da JV, e clicando em "Ok", para um polígono de 4 lados, na janela de diálogo exibida pelo software. Para traçar uma de suas diagonais ativa-se a ferramenta "Segmento Definido por Dois Pontos", clicando em dois vértices opostos do quadrado (Cf. Figura 17).

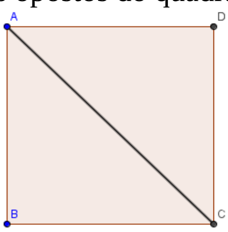


Figura 17. Construção T_3, subtarefa $t_{3.1}$.

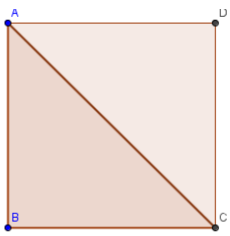


Figura 18. Construção T_3, subtarefa $t_{3.1}$.

Com a diagonal traçada, acabamos por delimitar dois triângulos retângulos. Para destacar um desses triângulos ativa-se a ferramenta “Polígono” e em seguida clica-se nos três vértices desejados (Cf. Figura 18). A subtarefa **$t_{3.2}$** solicita a marcação dos ângulos internos do triângulo destacado. Para isso, recorremos à ferramenta “Ângulo”, e, no sentido horário, clicamos nos vértices do triângulo (Cf. Figura 19).

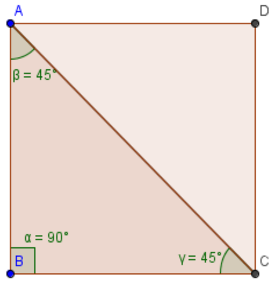


Figura 19. Construção T_3, subtarefa $t_{3.2}$.

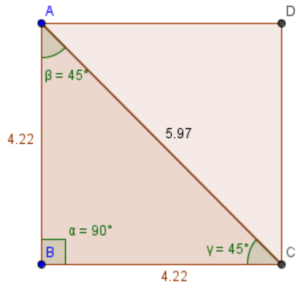


Figura 20. Construção T_3, subtarefa $t_{3.2}$.

Como os ângulos agudos são iguais, para atender à subtarefa **$t_{3.3}$** o aluno deverá atentar para o fato de que para qualquer ângulo de referência adotado os resultados das razões, em relação aos comprimentos dos lados do triângulo, serão iguais. Para mensurar estes comprimentos, utiliza-se a ferramenta “Distância, Comprimento ou Perímetro” clicando sobre o segmento desejado (Cf. Figura 20). Em seguida, na JRRA aparecerão as seguintes informações:

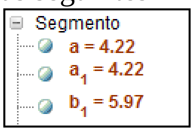


Figura 21. Construção T_3, subtarefa $t_{3.4}$.

Assim, para a subtarefa **$t_{3.4}$**, utilizaremos os valores correspondentes às variáveis a, a_1 e b_1 para o cálculo das razões desejadas (note que o aluno deverá correlacionar o cálculo das razões encontradas em **T_2**, com os valores do seno, cosseno e tangente para o ângulo analisado). No Campo de Entrada (CE) do software digitamos, conforme solicita o enunciado da tarefa, os valores SEN, COS e TAN, e para cada uma delas as razões correspondentes. Logo, teremos “SEN=a/b_1”, e em seguida apertamos Enter. De forma análoga procedemos para as variáveis COS e TAN. Na JRRA aparecerão as seguintes informações:

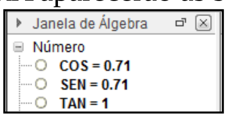


Figura 22. Comprimento dos segmentos do polígono determinado em $t_{3.2}$ na JRRA do GeoGebra

Esses valores correspondem aos valores do seno, do cosseno e da tangente para o ângulo de 45º. A última subtarefa (**$t_{3.5}$**) solicita que seja calculado um valor aproximado para $\sqrt{2}/2$ com o auxílio de uma calculadora. Encontrando este valor o aluno poderá comparar com os resultados do seno e do cosseno para o ângulo de 45º. A idéia é perceber que o valor é o mesmo, no entanto $\sqrt{2}/2$ é encontrado quando utilizamos um quadrado suporte de lado unitário. Segue abaixo a construção finalizada:

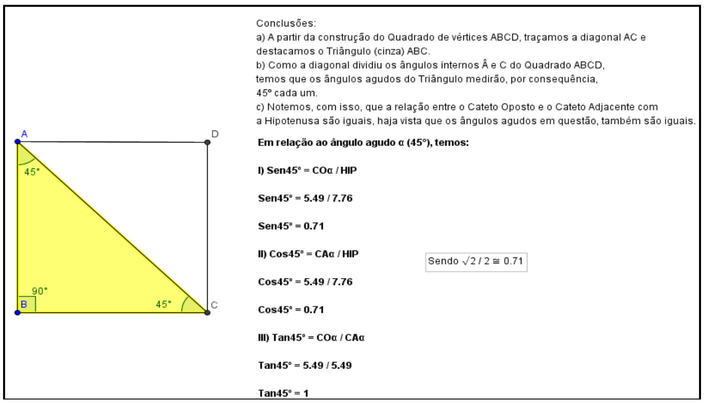


Figura 23. Construção T_3.

Essas tarefas, cuja resolução reúne as estratégias utilizadas em $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$ e $\mathbf{T_3}$, permitem alimentar o tipo de tarefa proposto na praxeologia da Trigonometria, em especial as Razões Trigonométricas, além de reforçar a estreita relação existente entre os registros de representações desse objeto matemático, onde o GeoGebra é um aliado neste reforço. De fato, essa relação é ausente no LD analisado, podendo estas tarefas servirem de reflexão, no processo ensino-aprendizagem de Trigonometria, tanto no ambiente papel/lápis quanto computacional, em especial o GeoGebra. Com base nos momentos de uma SD, após a apresentação da análise a priori, passaríamos a aplicação do dispositivo numa instituição de aplicação. No entanto, como sublinhamos anteriormente, este trabalho está imerso nas práticas referentes à Pesquisa Interna, logo deixaremos as demais fases da SD para oportunidades futuras de pesquisa e difusão de conhecimento.

Considerações finais

No presente artigo, apresentamos os resultados provenientes da pesquisa denominada Ensino e Aprendizagem da Trigonometria com o auxílio do software GeoGebra. Centramos os esforços nas busca por referências sobre o tema e a confecção do que propomos como objetivo geral: a elaboração de uma Sequência Didática (SD) para o ensino de trigonometria com o GeoGebra. Esta SD, principal resultado desta pesquisa, é composta de um dispositivo experimental (DE) constituído de três tarefas que favorecem a reflexão em torno de conteúdos matemáticos em ambiente computacional. Para tanto utilizamos os conceitos trigonométricos, os tópicos relativos à introdução à trigonometria como, Teorema de Pitágoras e razões trigonométricas. Como instrumento para este processo utilizamos o software gratuito GeoGebra, apresentando as ferramentas de construção neste ambiente computacional na análise a priori da SD bem como as construções realizadas e construídas durante a pesquisa. Como proposta de pesquisa futura, evidenciamos a necessidade de aplicação desta SD em uma instituição de aplicação da Educação Básica, em sua dimensão Externa, bem como a análise a posteriori dos resultados obtidos. Em suma, esperamos com isso, ter fornecido subsídios para o ensino de trigonometria, bem como a utilização efetiva dos recursos tecnológicos como mediadores no processo de ensino/aprendizagem da Matemática.

Referências

ARTIGUE, M., *Ingénnierie didactique. Recherches en Didactique de Mathématiques*. França, v. 9, no 3, p. 245-308,1988.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

CHEVALLARD, Y. *Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 12 (1), 73-112, 1992.

CHEVALLARD Y. *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*. Recherche en Didactique des Mathématiques, V.19/2, p. 221-266, 1999.

DANTE, L. R. *Tudo é Matemática*. 9º Ano. São Paulo. Editora Ática, 2009.

DUVAL R., *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée.* Annales de didactique et de sciences cognitives. IREM de Strasbourg, v. 5, 1993.

GAFANHOTO, A. *Integração das diversas representações das Funções no contexto de utilização de um ambiente de geometria dinâmica (GeoGebra).* (Tese de Mestrado, Universidade de Évora). Lisboa: APM, 2011.

HENRIQUES, A. *L'enseignement et l'apprentissage des intégrales multiples: analyse didactique intégrant l'usage du logiciel Maple*. Grenoble: UJF, Lab. Leibniz, 2006.

HENRIQUES, A.(2007); João Paulo Attie ; Luíz Márcio Santos Farias . *Referências Teóricas da Didática Francesa: Análise didática visando o estudo de integrais múltiplas com auxílio do software Maple*. Educação Matemática Pesquisa, v. 9, p. 51-81, 2007.

HENRIQUES, A.; NAGAMINE, A; NAGAMINE**,** C. *Reflexões Sobre Análise Institucional: o caso do ensino e aprendizagem de integrais múltiplas***.** Bolema, Rio Claro (SP), v. 26, n. 44, p. 1261-1288, dez. 2012.

HENRIQUES, A.; SERODIO, R., *Intervenção de tecnologias e noções de registros* *de representação no estudo de Integrais Múltiplas na Licenciatura em Matemática*. In: Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática, 2013, São Carlos. Anais do VI HTEM. São Carlos, 2013. p. 1-20.

HENRIQUES, A.; PALMEIRA, E. S.; OLIVEIRA, P. B., *Extensão do Teorema de Pitágoras em três Dimensões: Modelagem de edifícios por paralelepípedos usando Cabri 3D*. In: 16º Encontro de Modelagem Computacional, 4º Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais, 3º Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional - BA - AL - SE, 2013, Ilhéus. Anais do XVI Encontro de Modelagem Computacional, 2013.

HENRIQUES, A., *Estudo de Relações em sala de aula com a presença de ambientes computacionais de aprendizagem – PERSAC*, Anais do I Colóquio Internacional sobre Ensino e Didáticas das Ciências, contribuições e perspectivas, (CIEDIC), 27-31 de Outubro de 2014, UFBA/UEFS, Salvador/Feira de Santana, BA.

HENRIQUES, A., ALMOULOUD, *Saddo Ag, Teoria dos Registros de Representação Semiótica em Pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: Uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple*, Revista Ciência & Educação da UNES, Bauru (SP), 2016.

KIERAN, C. *Learning and teaching algebra at the middle school through college levels.* In Frank K. Lester (Ed.). Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics (Vol. II, pp. 707-762). Charlotte: Information Age Publishing, 2007.

NCTM. *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM, 2007.

PENTEADO, M. G.; BORBA, M. C (Org.). *A informática em ação: formação de professores, pesquisa e extensão.* São Paulo: Olho d’Água, 2000.

PONTE, J. P. *Tecnologias de Informação e Comunicação na formação de professores: que desafios?* Revista Ibero-Americana de Educación, 2000, n.24. p. 63-90

PONTE, J. P., SERRAZINA, L., GUIMARÃES, H., BREDA, A., GUIMARÃES, F., SOUSA, H., MENEZES, L., MARTINS, M. E., & OLIVEIRA, P. *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular, 2007.

RABARDEL, P., *Les hommes et les technologies - Approche cognitive des instruments contemporains*, Editions Armand Colin. 1995.

REIS JÚNIOR, R. O.; HENRIQUES, A., *Modelagem trigonométrica de cálculo de distâncias usando GeoGebra.* Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo (IGISP), v. v.3, p. 80-103, 2014.

REIS JÚNIOR, R. O.; HENRIQUES, A., *Estudo de técnicas computacionais para o ensino e aprendizagem da Trigonometria na Educação Básica*. Relatório de pesquisa. Programa de Iniciação Científica. UESC, 2014.