



O GeoGebra 3D na abordagem de sólidos tridimensionais: uma proposta para estudantes e professores

GeoGebra 3D in the approach of three-dimensional solids: a proposal for students and teachers

Quezia de Oliveira Vargas da Silva¹

Eline das Flores Victor²

RESUMO

A identificação de sólidos tridimensionais nem sempre é clara aos estudantes da educação básica. Com o objetivo de contribuir para o ensino de geometria espacial envolvendo o reconhecimento de prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera, foi elaborado um produto educacional para estudantes, que incentiva a utilização do GeoGebra 3D na apresentação de sólidos geométricos espaciais. Para testar o produto, ocorreu a experiência de abordar a geometria tridimensional, fazendo uso do software, com estudantes da terceira série do ensino médio da rede pública do estado do Rio de Janeiro. A metodologia está classificada como qualitativa com caráter exploratório. O material produzido pôde contribuir para uma abordagem dinâmica e de fácil compreensão, o que incentiva o estudante e auxilia o professor.

Palavras-Chave: Produto Educacional; Sólidos tridimensionais; GeoGebra 3D.

ABSTRACT

The identification of three-dimensional solids is not always clear to students of basic education. With the objective of contributing to the teaching of spatial geometry involving the recognition of prism, pyramid, cylinder, cone and sphere, an educational product for students was developed, which encourages the use of GeoGebra 3D in the presentation of spatial geometric solids. In order to test the product, the experience of approaching the three-dimensional geometry, making use of the software, was carried out with third-grade high school students from the public network of the state of Rio de Janeiro. The methodology is classified as qualitative with exploratory character. The material produced was able to contribute to a dynamic and easy-to-understand approach, which encourages the student and assists the teacher.

Key-words: Educational Product; Three-dimensional solids; GeoGebra 3D.

¹ queziadasilva.seeduc@gmail.com

² Universidade do Grande Rio - elineflores@hotmail.com

Introdução

Este foi um trabalho desenvolvido como parte da pesquisa de Mestrado Profissional em Ensino das Ciências e Matemática. A pesquisa integrava como objetivo a produção de um produto educacional que pudesse contribuir para o ensino na educação básica. Nesse contexto, surgiu o produto educacional destinado a estudantes da educação básica, interessados em aprender geometria espacial integrando as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC). O material apresenta sugestões sobre como aprender conteúdos relacionados à Geometria Espacial, especificamente sólidos como prisma, cilindro, pirâmide, cone e esfera, com a utilização do programa GeoGebra 3D (versão 5.0). Produziu-se o livreto intitulado Geometria Espacial: uma abordagem no Ensino Médio com o GeoGebra 3D, para estudantes (Figura 1).

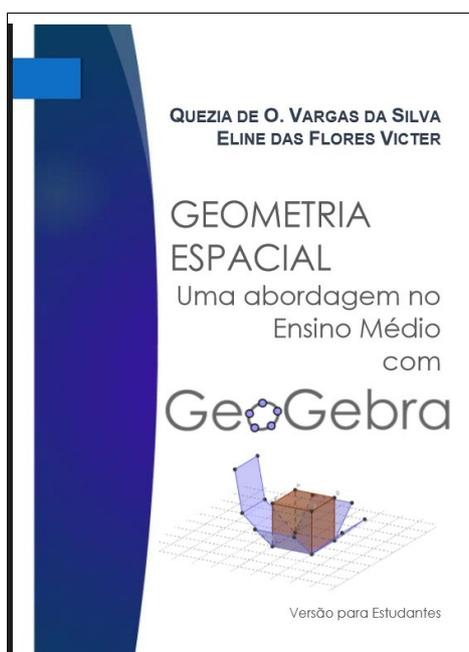


Figura 1. Produto Educacional

A ideia para o desenvolvimento do material foi: **como abordar os conceitos iniciais da Geometria Espacial com o GeoGebra 3D de forma dinâmica e significativa?** A proposta para os estudantes confere um material onde ele pode desenvolver, de forma independente, as construções de figuras tridimensionais. Ao

professor cabe, a partir dos movimentos e manipulações das figuras, auxiliar os alunos na formulação de conjecturas, conclusões e justificativas.

1. A proposta do material

O produto educacional está dividido em três partes que envolvem basicamente Geometria Espacial e o GeoGebra. Na primeira parte ocorre a abordagem de alguns conceitos de Geometria Espacial, com foco nas representações e propriedades dos sólidos tridimensionais: prisma, cilindro, pirâmide, cone e esfera. Especificamos os objetos geométricos em estudo e as propriedades que caracterizam esses objetos recorrendo, entre outros, a representações gráficas.

Tabela 1 – Superfícies prismáticas

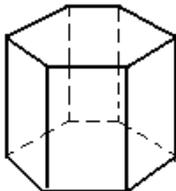
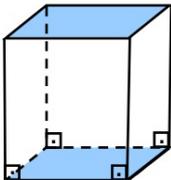
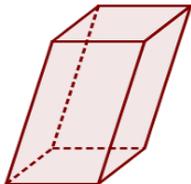
<p>Prisma Regular:</p>  <p>Prisma Regular Hexagonal</p>	<p>Prisma Reto:</p>  <p>Prisma Quadrangular Reto ou Cubo</p>	<p>Prisma Oblíquo:</p>  <p>Prisma Quadrangular Oblíquo</p>
<p>Um prisma regular é aquele em que as duas faces da extremidade são polígonos regulares e as faces restantes são retangulares. Na figura acima representada temos um prisma cujas bases são hexágonos regulares.</p>	<p>Prisma reto é aquele cujas arestas laterais são perpendiculares (formam um ângulo de 90°) ao plano da base. Um prisma regular direito em que as faces retangulares são quadradas é semi-regular.</p>	<p>Um prisma é considerado oblíquo quando suas arestas laterais são oblíquas ao plano da base.</p>

Tabela 2 – Superfícies cilíndricas

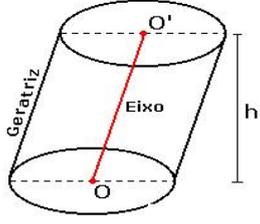
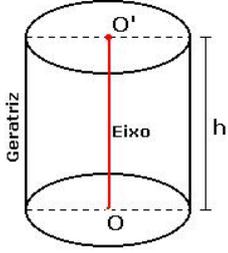
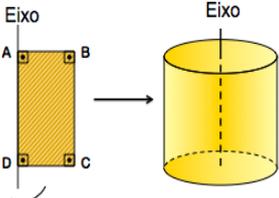
Cilindro Oblíquo:	Cilindro Reto:	Cilindro de Revolução:
 <p>No cilindro oblíquo a geratriz é oblíqua ao plano da base.</p>	 <p>No cilindro reto temos que a geratriz é perpendicular ao plano da base.</p>	 <p>Gerado a partir da rotação de um retângulo em torno de seu eixo de revolução.</p>

Tabela 3 – Superfícies piramidais

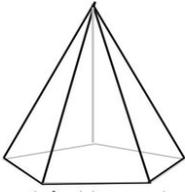
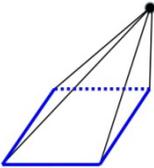
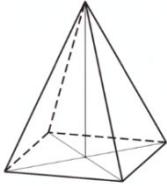
Pirâmide Regular:	Pirâmide Oblíqua:	Pirâmide Reta:
 <p>Pirâmide Regular Pentagonal</p> <p>Um poliedro convexo com uma face (a base) a polígono convexo e todos os vértices da base unidos por arestas para um outro vértice (o ápice); assim os rostos restantes são todos triangulares. Uma pirâmide de direita regular é aquela em que o base é um polígono regular e as faces restantes são triângulos isósceles.</p>	 <p>Pirâmide Quadrangular Oblíqua</p> <p>Na pirâmide oblíqua o segmento de reta que une o vértice ao centro da base NÃO coincide com a altura da pirâmide.</p>	 <p>Pirâmide Quadrangular Reta</p> <p>Na pirâmide reta o segmento de reta que une o vértice ao centro da base coincide com a altura da pirâmide.</p>

Tabela 4 – Superfícies cônicas

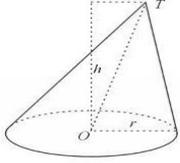
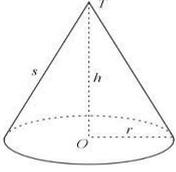
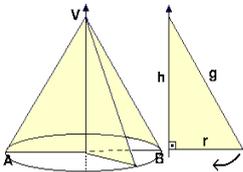
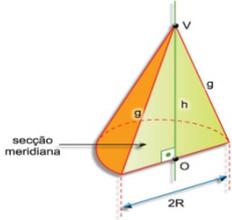
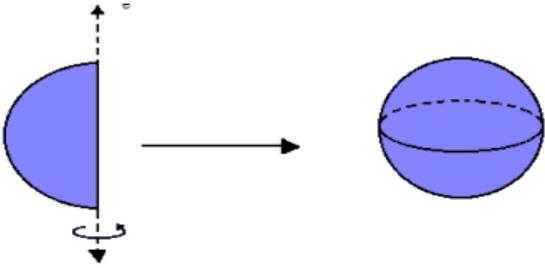
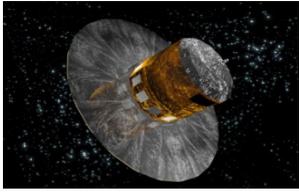
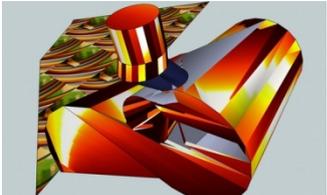
Cone Oblíquo:	Cone Reto:	Cone de Revolução:	Cone Equilátero:
 <p>No cone oblíquo o segmento de reta que une o vértice ao centro da base NÃO coincide com a altura do cone.</p>	 <p>No cone reto o segmento de reta a projeção que une o vértice ao centro da base coincide com a altura do cone.</p>	 <p>O cone de revolução é obtido ao girar um triângulo retângulo em torno do seu eixo de revolução (reta que contém um dos catetos do triângulo).</p>	 <p>No cone equilátero a secção meridiana (região plana obtida ao interceptar o cone por um plano perpendicular à sua base e que passa pelo vértice do cone) é um triângulo equilátero, e por isso recebe esse nome.</p>

Tabela 5 – Esfera

Esfera:
 <p>Gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.</p>

Na segunda parte apresentamos alguns incentivos para o aprendizado da Geometria Espacial. Mostramos exemplos de profissões que fazem uso de formas espaciais para a execução do trabalho. De igual modo mostramos imagens de objetos presentes no cotidiano que exige alguma ideia da Geometria para que sejam identificados e compreendidos. Abordamos tais aspectos para levar o estudante a perceber a importância do aprendizado das formas tridimensionais.

Quadro 1 – Profissões que utilizam formas geométricas espaciais

Arquitetura	Astronomia	Computação e Design Gráfico
		

Quadro 2 – Objetos que utilizam formas geométricas espaciais

Enfeites de casa (Prisma)	Bola de futebol (Esfera)	Lata de leite (Cilindro)
		

Na terceira parte é onde ocorre as justificativas do uso do GeoGebra 3D na abordagem do ensino de Geometria Espacial, bem como a apresentação do software, seus elementos e disposições. Há um exemplo de construção de um cubo e ainda detalhamos o significado dos botões da barra de ferramentas, com a finalidade de facilitar o manuseio da ferramenta.

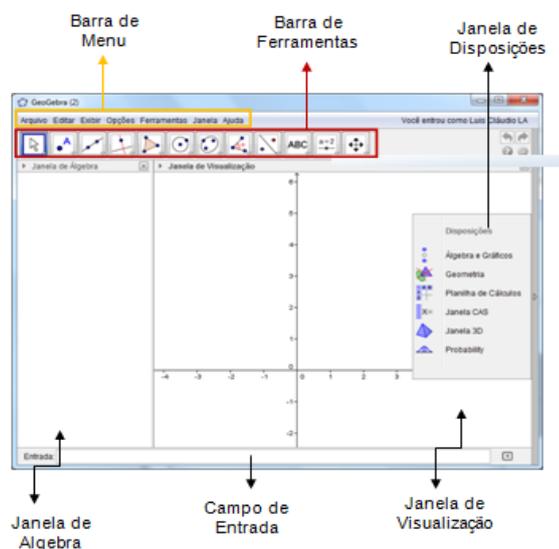


Figura 2. Instruções de uso para o estudante

Tabela 6 – Exemplo de construção de um cubo para o estudante

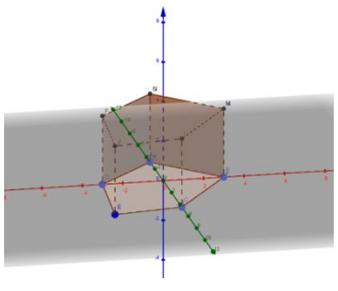
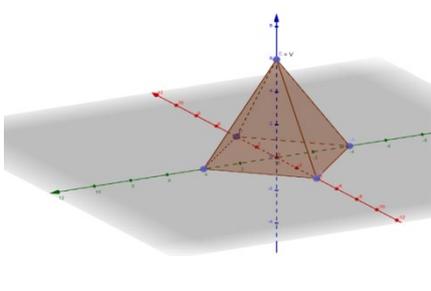
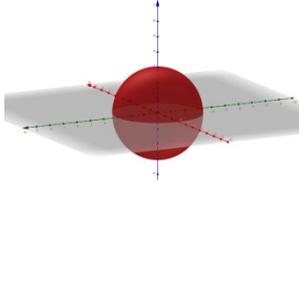
<ol style="list-style-type: none"> 1. Inicie o GeoGebra versão beta 5.0 2. Abra a janela 3D grapher (essa é a janela de visualização 3D) 	
<ol style="list-style-type: none"> 3. No menu exibir clique no desenho da pirâmide e selecione o plano referente ao cubo 4. Selecione dois pontos no plano (esses dois pontos irão estabelecer a medida da aresta do cubo). 5. Assim o cubo será definido com suas respectivas faces e arestas. 	

Nesta fase também colocamos, como propostas, atividades a serem realizadas pelo estudante com o uso do GeoGebra 3D. Há um tutorial que auxilia no desenvolvimento da solução e, do mesmo modo, como deve ser a figura do sólido.

Tabela 7 – Sugestões de atividades para serem desenvolvidas pelos estudantes

<p>1. Um prisma é um poliedro convexo com duas faces 'finais' que são polígonos convexos congruentes que se encontram em planos paralelos em tal forma que, com as bordas unindo vértices correspondentes, o as faces restantes são paralelogramos. Um prisma será triangular, quadrangular, pentagonal, etc., conforme a base for um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc. Construa um prisma com 7 faces e nomeie sua natureza.</p> <p>2. Considerando um polígono convexo (uma figura sólida, como um polígono ou poliedro, é convexo se o segmento de linha unir dois pontos dentro dela estão totalmente dentro dela) situado num plano α e um ponto V fora de α. Chama-se pirâmide à região do espaço limitada pela união dos segmentos de reta com uma extremidade em V e a outra nos pontos do polígono. Construa uma pirâmide de acordo com a definição dada.</p> <p>3. Construa um prisma e identifique seus elementos: bases, faces (superfícies planas formando um poliedro) laterais, arestas e vértices.</p> <p>4. Uma pirâmide oblíqua é aquela cujas arestas são oblíquas ao plano da base. Represente uma pirâmide oblíqua e outra reta.</p> <p>5. Represente a planificação de um prisma e de uma pirâmide.</p>	<p>6. A altura de um cilindro é a distância h entre os planos das bases. Represente a altura de um cilindro.</p> <p>7. Construa um cone reto e identifique o polígono e o raio da base.</p> <p>8. Um cilindro é equilátero quando a secção meridiana é um quadrado. Construa um cilindro equilátero, evidenciando a conclusão devida quanto à geratriz.</p> <p>9. Construa um cilindro e identifique a superfície lateral e suas bases.</p> <p>10. Chama-se esfera de centro O e raio r ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância OP seja menor ou igual a r. Construa uma esfera sabendo que o centro C é $(0,0,0)$ e o raio 3.</p>
--	--

Tabela 8 – Algumas orientações com tutorial

<p>No menu exibir clique no desenho da pirâmide e selecione a opção prisma. Marque cinco pontos quaisquer na janela do GeoGebra distribuídos entre as retas do plano. Estes pontos formarão a base do prisma, que deverá pentagonal.</p>	<p>No menu exibir clique no desenho da pirâmide e selecione-a. Marque, no mínimo, três pontos quaisquer na janela do GeoGebra (no caso da solução sugerida foram marcados quatro pontos) distribuídos entre as retas do plano. Estes pontos formarão a base da pirâmide e devem formar um polígono convexo. Clique no desenho ABC do menu e selecione a opção texto. Escreva o nome do plano α e posicione-o no lugar adequado. Faça o mesmo para identificar o vértice V da pirâmide.</p>	<p>No menu exibir clique no desenho da esfera e selecione a opção esfera dados centro e raio. Marque o ponto na origem. Abrirá uma janela para marcar a medida do raio, coloque a correspondente a 3 conforme a atividade pede.</p>
		

2. A apresentação aos estudantes

Para experimentar a eficácia do material fizemos a aplicação com 18 estudantes da terceira série do ensino médio, 3 por computador. Explicamos aos estudantes que o objetivo do produto foi desenvolver algo que pudesse contribuir para o processo do ensino de Geometria Espacial, fazendo uso do GeoGebra 3D.

O produto foi apresentado a cada trio, e enquanto os mesmos liam, observavam e analisavam as informações, realizamos perguntas relacionadas ao conteúdo, buscando interagir com os envolvidos por meio de um diálogo informal. As respostas foram dadas de forma aleatória, não respondida por um único aluno. Quando um estudante respondia, alguns apenas concordavam e outros acrescentavam seu parecer acerca da questão. Freire (1979) defende a prática do diálogo afirmando que:

O diálogo é o encontro entre os homens, mediatizados pelo mundo, para designá-lo. Se ao dizer suas palavras, ao chamar ao mundo, os homens o transformam, o diálogo impõe-se como o caminho pelo qual os homens encontram seu significado enquanto homens; o diálogo é, pois, uma necessidade existencial” (FREIRE, 1979, p.42).

A primeira pergunta foi relativa ao que eles entendiam por Geometria Espacial. Os alunos demonstraram que conheciam algo a respeito, já que citaram em suas respostas “*Ponto, reta e plano; Formas geométricas; Polígonos como triângulos; Geometria no Espaço; Espaço Tridimensional; Acho legal as formas, mas é muito difícil desenhar*”. Ao observarem os sólidos contidos no produto confirmaram a ideia que possuíam, no entanto, aprimoraram suas concepções diante dos sólidos geométricos e suas definições.

Dando sequência, foi questionado aos alunos sobre ser possível citar exemplos de objetos com que nos deparamos no dia-a-dia e que lembram a forma de um prisma, um cilindro, uma pirâmide, um cone e uma esfera, além daqueles que eles estavam contemplando no material. As respostas encontram-se no quadro 3 a seguir:

Quadro 3 – Respostas dos alunos sobre exemplos de objetos que nos deparamos no dia-a-dia

	Resposta
Prisma	- <i>Cadeira</i> - <i>Caixa de eletricidade</i>
Cilindro	- <i>Caixas d’água bem grandes</i> - <i>Dulto (Tubo)</i> - <i>Lixeira da sala</i>
Pirâmide	- <i>Pirâmides do Egito</i> - <i>Paris (Torre Eiffel)</i> - <i>Que têm faces triangulares</i>
Cone	- <i>Trânsito, cone de sinalização</i> - <i>Casquinha de sorvete</i>
Esfera	- <i>Planeta Terra;</i> - <i>Bola de boliche;</i> - <i>Bola de futebol.</i>

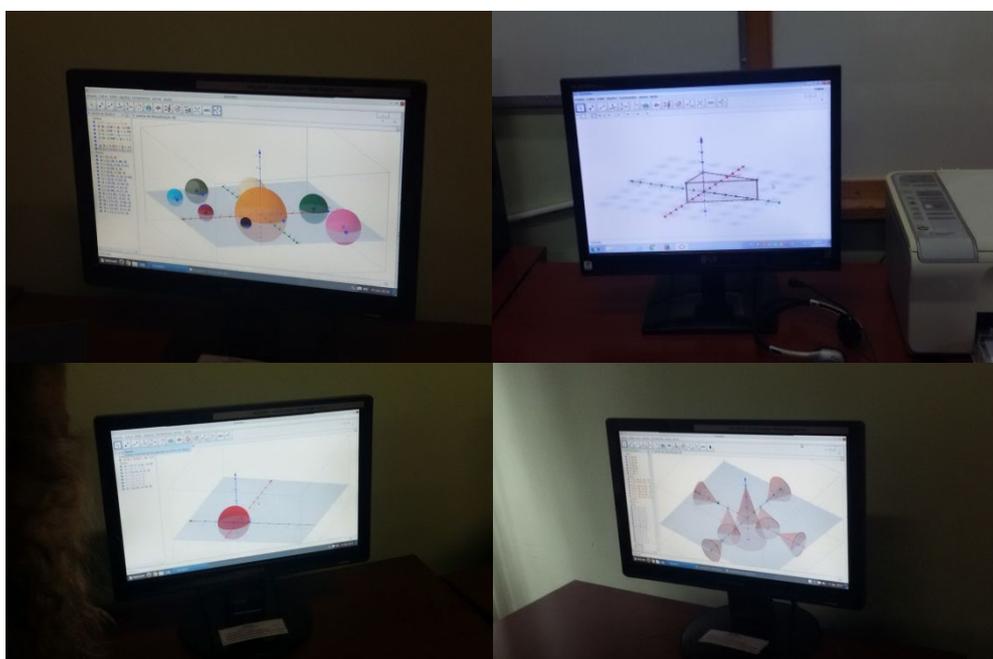
Seguimos com a abordagem da importância de aprender Geometria, suas aplicações no cotidiano e das profissões que demandam conhecimento geométrico para um bom desempenho. Após essa fase chegamos à utilização do GeoGebra na versão Beta 5.0. Os alunos, por si mesmos, abriram o software (que já estava instalado nos computadores da escola) na tela inicial e foram estudando o significado de cada ícone da barra de ferramentas (informação que consta no produto). Eles fizeram também o exemplo de construção do cubo. Em seguida, ficaram livres para mexer nas ferramentas e construir os sólidos.

Durante a execução das construções dos sólidos alguns questionamentos foram levantados: - *Onde escrevemos um texto?* Eles mesmos perceberam que seria no botão ABC. Ao construir o cone um trio percebeu que ele ficava deitado e

queriam que ficasse em pé. Dissemos para eles observarem os pontos que estavam demarcando em relação à sua ordem. Depois de algum tempo perceberam que o primeiro ponto marcado deve ser o centro da base circular do cone e o segundo corresponde ao vértice e dessa maneira eles conseguem colocar o cone na posição que desejarem.

Os estudantes prosseguiram desenvolvendo algumas atividades do produto selecionadas pelo professor, como a construção de prismas, cones e esferas. Foi possível registrar algumas figuras, que permaneceram na tela (Figura 3), construídas enquanto faziam testes para a execução das tarefas 3, 7 e 10 sugeridas no livreto.

Figura 3. Figuras construídas pelos estudantes



Os estudantes desenvolveram formas geométricas com base no que viram no livreto, tanto em relação ao manuseio do GeoGebra 3D quanto à construção de sólidos tridimensionais. Nesse momento, é possível aproximar-se da proposta do produto educacional para os estudantes: **um material auto-instrutivo, onde ele pode desenvolver, de forma independente, as construções de figuras tridimensionais**, cabendo ao professor apenas o auxílio na formulação de conjecturas, conclusões e justificativas.

3. Análises

Pretende-se evidenciar no trabalho proposto, um processo de ensino ativo e protagonizado pelo estudante, fazendo uso de um material dinâmico, facilitador e potencializador. Moreira (2013) defende em seus relatos: um material instrucional será facilitador e potencialmente significativo se estiver bem organizado, estruturado, aprendível, e se o aprendiz tiver conhecimentos prévios que lhe permitam dar significados aos conteúdos veiculados por esse material.

Para verificar a veracidade quanto ao produto educacional desenvolvido, que traz a abordagem dos sólidos tridimensionais através do uso do GeoGebra 3D, aplicamos um questionário aos alunos envolvidos. Primeiro perguntamos o que eles acharam do livreto mostrar os sólidos tridimensionais usando o software. As respostas mostram o quanto a ferramenta agradou.

Quadro 4 – Resposta dos estudantes sobre a primeira pergunta

<i>A visualização não deixa dúvida</i>
<i>No papel é mais difícil</i>
<i>Aqui sai perfeito</i>
<i>Muito Legal</i>
<i>Usar o GeoGebra é legal porque dá pra ampliar e reduzir</i>
<i>Dá pra fazer várias formas geométricas</i>

O fato do GeoGebra 3D causar agrado aos estudantes é importante no sentido de trazer a pré disposição para aprender citada por Moreira (2013) como elemento essencial para a articulação de um aprendizado significativo. O estudante, ao manifestar a necessária voluntariedade (pré disposição para aprender), tem a chance de caminhar na direção do aprendizado.

Continuamos com o questionamento de ser possível aprender a identificar os sólidos espaciais utilizando o GeoGebra 3D com autonomia. As respostas foram:

Quadro 5 – Resposta dos estudantes sobre ser possível aprender sólidos espaciais utilizando o GeoGebra com autonomia

<i>Sim</i>
<i>Não é difícil mexer</i>
<i>É bem melhor que escrever</i>
<i>É uma descoberta legal pra gente</i>
<i>Dá pra aprender sozinho</i>

Os relatos correspondem ao que se esperava, estreitando a proposta registrada no livreto: abordar os conhecimentos iniciais da Geometria Espacial com o GeoGebra 3D de forma que os estudantes tenham autonomia, ou seja, um produto auto-instrutivo com uso do software.

Perguntamos se na opinião deles o material, que leva o estudante a utilizar o GeoGebra 3D, facilita a identificação e aprendizagem dos sólidos tridimensionais, e se, por isso, acreditavam ser um material dinâmico, facilitador e potencializador na abordagem da geometria no espaço.

Quadro 6 – Resposta dos estudantes

<i>Sim. Porque temos mais atenção</i>
<i>Nos faz ter interesse em aprender</i>
<i>Por ser no computador é mais interativo</i>
<i>Sim. Porque é diferencial</i>
<i>Sim. É inovador</i>
<i>Sim. Descobrimos coisas que não sabíamos</i>
<i>Sim. A gente aprendeu muito</i>

As respostas foram todas positivas, com tendência favorável na utilização do GeoGebra 3D dentro do produto educacional proposto. Moreira (2012) defende que para a concretização de um aprendizado significativo são necessárias duas condições, um **material instrucional potencialmente significativo e facilitador**; e predisposição para aprender por parte do aprendiz.

Considerações Finais

A ideia de agregar o GeoGebra na versão 5.0 se ajustou de maneira bastante propícia ao conceito da geometria tridimensional, pois o software permite gerar sólidos de revolução a partir da janela 3D, onde é possível construir sólidos espaciais, como prismas, pirâmides, cones, cilindros, esferas e outros. A apresentação do programa despertou a participação interativa dos alunos, o que dinamizou a abordagem dos conceitos geométricos.

A geometria espacial, que engloba os sólidos tridimensionais, é bastante empregada no cotidiano, havendo aplicações em outras ciências e em inúmeros aspectos práticos da vida diária. Acreditamos na importância de conceder tarefa ao estudante, de forma que lhe permita selecionar e transformar a informação dada, construir hipóteses e tomar decisões, contando com uma estrutura cognitiva para assim o fazer.

No que tange o uso do software GeoGebra 5.0 na abordagem dos sólidos geométricos tridimensionais, vale registrar a autonomia na construção dos tais e sua identificação peculiar. Aos estudantes de geometria espacial vale a busca dessa autonomia, tendo em vista seu proveito no significado e na organização das experiências que permitem ao indivíduo ultrapassar o significado da informação.

Em conclusão, é relevante a situação na qual o aluno construa no auto-aprendizado diretrizes que estendam o conhecimento para além dos muros da escola. É importante que o aluno se enxergue inserido no mundo, desejando crescer no conhecimento das ciências que se situam tão evidentes em nosso dia-a-dia social.

Referências

CLAPHAM, C. & NICHOLSON, J. *The concise Oxford dictionary of mathematics*. OUP Oxford, 2009.

DOLCE, O. & POMPEO, J. N. *Fundamentos da Matemática Elementar - Geometria espacial posição e métrica*. Volume 10. São Paulo: Editora Atual, 2001.

FREIRE, Paulo. *Conscientização: teoria e prática da libertação – uma introdução ao pensamento de Paulo Freire*. 3ª edição. São Paulo: Cortez & Moraes, 1979.

MOREIRA, M. A. *O que é afinal Aprendizagem significativa?* Aula Inaugural do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais, Instituto de Física, Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá, MT, 23 de abril de 2020. Aceito para publicação, *Qurrriculum*, La Laguna, Espanha, 2012.

MOREIRA, M. A. *Aprendizagem significativa em mapas conceituais*. Porto Alegre: UFRGS, Instituto de Física, 2013.