

Cómo citar este artículo: Aldana-Bermúdez, E., & López-Mesa, J.H. (2016). Matemáticas para la diversidad: un estudio histórico, epistemológico, didáctico y cognitivo sobre perímetro y área. *Rev.investig.desarro.innov*, 7(1), 77-92.

doi: 10.19053/20278306.v7.n1.2016.5602

Matemáticas para la diversidad: un estudio histórico, epistemológico, didáctico y cognitivo sobre perímetro y área

Mathematics for diversity: a historical, epistemological, and cognitive study of a perimeter and area concepts

Eliécer Aldana-Bermúdez¹

Jorge Hernán López-Mesa²

Recibido: febrero 17 de 2016

Aceptado: junio 28 de 2016

Resumen

¹ Licenciado en Matemáticas, Doctor en Educación Matemática, Universidad del Quindío, Colombia. E-mail: eliecerab@uniquindio.edu.co

² Licenciado en Matemáticas y Computación, Magíster en Educación, Universidad del Quindío, Colombia. E-mail: jhlopez@uniquindio.edu.co

Este artículo es producto de una investigación concluida y financiada por la universidad del Quindío y tuvo como objetivo identificar elementos históricos, epistemológicos, didácticos y cognitivos que intervienen en el aprendizaje del concepto de perímetro y de área; el estudio se realizó durante el año 2014 con estudiantes de la Fundación Quindiana de Atención Integral en la ciudad de Armenia Colombia, que presentan dificultades cognitivas o Síndrome Down. Para ello, se utilizó el marco teórico de las situaciones didácticas de Brousseau y como metodología la ingeniería didáctica, mediante el diseño y aplicación de secuencias didácticas como apoyo a la inclusión en el sistema educativo desde una mediación interactiva del aprendizaje y la enseñanza de la matemática. Los resultados demuestran que las personas con Síndrome Down también logran aprender a un ritmo diferente las nociones y conceptos matemáticos.

Palabras clave: perímetro y área, Síndrome de Down, secuencias didácticas de enseñanza, ingeniería didáctica.

Abstract

This article is a product of a completed and founded research by the Universidad del Quindío and aims to identify historical, epistemological, didactical, and cognitive elements that are involved in learning the concepts of perimeter and area. The study was conducted in the year 2014 with students from the “*Fundación Quindiana de Atención Integral*” of comprehensive care in Armenia city, Colombia, who have cognitive difficulties or Down syndrome. Theoretical framework of didactic situations by Brousseau was used, and as a

methodology the didactic engineering was implemented. This was accomplished by means of the design and application of didactic sequences as support for the inclusion of disabled people to the educational system from an interactive mediation of learning and teaching of mathematics. The results demonstrate that people with Down syndrome also manage to learn mathematical concepts and notions at a different rhythm.

Keywords: perimeter and area, Down syndrome, didactic teaching sequences, teaching engineering.

1. Introducción

La experiencia como docentes ha permitido determinar la existencia de dificultades cognitivas para el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes de diferentes niveles de escolaridad. Estas dificultades cognitivas, desde el punto de vista social, son un problema al que no se le presta atención y que no encuentra eco en la sociedad; usualmente no se ofrecen las condiciones necesarias para la inclusión en el sistema educativo a estudiantes con dificultades cognitivas, lo cual reduce su permanencia en él. Además, es necesario el acompañamiento constante para resolver las dificultades de tipo cognitivo que tiene este tipo de población en su proceso de aprendizaje. En éste sentido, la Ley 115 (1994), expresa el deber ser de la educación para personas con limitaciones y su inclusión en el sistema educativo, con el propósito de crear espacios que fomenten ambientes de aprendizaje y apoyen proyectos y aulas especializadas.

Para crear ambientes y estilos adecuados de aprendizaje es necesario que los docentes analicen las dimensiones histórica-epistemológica, didáctica y cognitiva, de los objetos matemáticos del conocimiento que les permitan encontrar un método adecuado de enseñanza para que las personas con limitaciones sensoriales y/o cognitivas puedan aprender y de esta manera adquieran los conocimientos fundantes de la matemática, inmersos en los estándares prescritos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006).

Algunas personas han realizado investigaciones con estudiantes que presentan limitaciones cognitivas, como es el estudio de Machín-Verdés, Purón-Sopeña y Castillo-Mayedo (2009); estos autores reflexionaron sobre la intervención temprana que deben recibir los niños con Síndrome de Down (SD), y consideran desde una dimensión sociológica que se debe hacer una intervención temprana a las personas con Down, en términos de inserción social en la interrelación Down - familia - comunidad. A parte de las dificultades mencionadas por estos autores para los niños con SD, pueden aparecer otras según el contexto, pero en niveles diferentes, según el síndrome sea leve, moderado o alto.

Al respecto, Noda y Bruno (2010), presentan un estudio sobre las operaciones de suma y resta, realizado con un grupo de alumnos con Síndrome Down; para ello entrevistaron a un grupo de estudiantes con esta discapacidad mientras resolvían problemas aditivos simples y operaciones de suma y resta; el objetivo era analizar su conocimiento sobre los significados de estas operaciones, las estrategias y los procedimientos que ellos utilizaron, así como la relación entre dificultades expresadas y sus características cognitivas. Los resultados muestran que los estudiantes con SD usan los mismos niveles de estrategias que los

alumnos sin discapacidad, aunque sólo uno llegó al nivel más abstracto. El uso de los dedos o representaciones concretas (bolas) fue la estrategia básica en la realización de las operaciones.

Otras experiencias significativas como la de Alvarado (2011), ponen de manifiesto las características que presenta un alumno en el aspecto: evolutivo, la familia y en lo curricular, para que el maestro de apoyo pueda preparar estrategias de mediación que le permitan al aprendiz adquirir el conocimiento básico de su formación. Estos aspectos son importantes por la información y el conocimiento que le ofrece al docente de la población y deben ser consideradas como un punto de partida para entender y comprender el comportamiento de estas personas con discapacidad cognitiva.

Otro estudio pionero es el de Ramírez (2004), porque muestra la importancia de la inclusión del niño con SD en el sistema educativo, desde el desarrollo de las habilidades sociales y comunicativas, mediante una propuesta didáctica basada en enfoques de enseñanza experimental y modificabilidad cognitiva con la incorporación de recursos de hipertexto, generación de una integración escolar y social y contribución a que el sujeto se adapte mejor al medio, reconocimiento de la importancia de la aplicación de estrategias didácticas en el desarrollo de este tipo de poblaciones y la valoración del uso de herramientas tecnológicas en la estimulación de las destrezas y habilidades espaciales.

Ruiz-Rodríguez (2003) pone de manifiesto que para el escolar con SD, no basta con que asista a la escuela, sino que se le deben dar oportunidades para que aproveche al máximo el espacio escolar y que esto se logra cuando tiene la atención necesaria, una actitud favorable

y una adecuada formación a los educadores; para ello presenta un instrumento con estrategias que le permite a los formadores conocer a un niño con SD y saber actuar frente a la dificultad. Además, aborda la planeación para indicar qué, cuándo y cómo enseñarles, y profundiza en la adaptación curricular desde el centro, el aula y lo individual.

Además, Ruiz-Rodríguez (2013, p. 63), pone de manifiesto que “la atención es la puerta de entrada de la estimulación a nuestra consciencia”, de ahí el papel primordial que desempeña en el aprendizaje. Recordemos que los niños con SD tienen dificultades tanto para centrar su atención como para mantenerla; el autor muestra las peculiaridades de la atención en las personas con SD y aporta sugerencias prácticas de intervención para su entrenamiento y mejora.

Noda, Bruno, González, Moreno y Sanabria (2012), implementaron un trabajo con una pizarra digital especialmente diseñada para facilitar la interacción de los niños con el medio que facilitara los procesos y reemplazara el lápiz y el papel; ello con el propósito de observar los procesos y estrategias que aplican los niños en operaciones de suma y resta; para ello diseñaron interfaces del sistema y utilizaron como metodología el diseño iterativo centrado en el usuario; en conclusión los errores que se presentan en el desarrollo de las operaciones corresponden a procesos mal aprendidos que tienen que ver con el conteo y esto se verifica al repetir varias veces el procedimiento; además, un resultado en el análisis de los datos determina que se presentan mayor cantidad de errores en la resta, lo que indica que en esta población la operación de la resta tiene mayor grado de complejidad que la suma, lo cual es observable en las estrategias y los procedimientos empleados por los estudiantes en la solución de problemas.

En lo que atañe al uso y aplicación de tecnologías de la información o de los objetos virtuales de aprendizaje, OVA, Ortega (2008) afirma que los materiales de multimedia ofrecen diversas posibilidades en la enseñanza, en consecuencia, favorecen el aprendizaje de contenidos matemáticos a personas con SD. Este estudio permitió analizar las dificultades que enfrenta esta población en el aprendizaje de los conceptos básicos matemáticos y propone herramientas sencillas que ofrecen respuesta a las dificultades existentes en el aula, como un apoyo para favorecer ambientes de aprendizaje apoyados en didácticas flexibles.

Los orientadores deben tener una actitud abierta y flexible frente a estas poblaciones, considerando aspectos como su estado de ánimo, su comportamiento, el nivel de maduración mental y cronológica. A nivel social, estos aspectos están relacionados con el grado de limitación cognitiva que adolece el estudiante, el tiempo de atención y concentración es mínimo, requieren constantemente del refuerzo y estímulo, son muy conductistas, algunos muestran un estado de hipotermia (rigidez muscular), presentan dificultad para recibir y elaborar la información. Asimismo, muestran dificultad en el cálculo numérico, manifiestan timidez e individualismo y esto lo expresan mediante el lenguaje que utilizan.

Este estudio tiene como objetivo apoyar la inclusión educativa de personas con discapacidad cognitiva a partir de una didáctica de la matemática para todos y con todos, que contribuya a mejorar los estilos cognitivos y diseño universal de aprendizaje en la

educación y la construcción del conocimiento matemático para fortalecer la comprensión del pensamiento espacial y sistemas geométricos desde el concepto de perímetro y área.

Para ello, es necesario de una parte conocer aspectos epistemológicos, didácticos y cognitivos de estos dos conceptos; y de otra parte diseñar y aplicar secuencias de enseñanza y aprendizaje para mejorar en personas con discapacidad cognitiva la construcción de la noción de perímetro y área.

El artículo, en primer lugar, plantea como marco teórico las situaciones didácticas y como metodología una ingeniería didáctica. En segundo lugar, presenta un análisis de las dimensiones histórico-epistemológico, didáctico y cognitivo para que el docente investigador pueda comprender el sentido y el significado de los elementos conceptuales que se derivan de la génesis, desarrollo, aplicación y comprensión del objeto matemático en estudio desde los procesos de enseñanza y aprendizaje; a partir de algunas evidencias de las producciones de estudiantes, relacionadas con el uso de secuencias didácticas de aprendizaje, se da la discusión de los resultados; finalmente se presentan las conclusiones del estudio.

2. Materiales y métodos

2.1 Marco teórico

Esta investigación se apoya en las Situaciones Didácticas de Brousseau (1997), que corresponden a un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente

instrumentos u objetos virtuales de aprendizaje) y un sistema educativo (representado por el profesor), con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de construcción. Para ello, se consideran aspectos como: el contrato didáctico, la situación problema, la variable didáctica y la situación a-didáctica.

El contrato didáctico de Chevallard (1997), hace referencia a los compromisos y a los resultados que espera el profesor del alumno y viceversa; en otros términos, debe existir una regla o acuerdos claros que se tienen en la situación didáctica. El sustento teórico de la ingeniería didáctica proviene de la teoría de las situaciones didácticas según Brousseau, (1997) y de la teoría de la transposición didáctica de Chevallard (1997), que tienen una visión sistémica, al considerar la didáctica de las matemáticas como el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos, con objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto de Brousseau (1997).

Además, el estudio está apoyado en el aspecto teórico desde lo social cognitivo de Vygotsky (1979), el cual plantea que, el funcionamiento individual está determinado por el funcionamiento social y que la estructura de los procesos mentales de un individuo refleja el medio social del cual se deriva, y lo sitúa desde la zona de desarrollo próximo. Asimismo, en las manifestaciones de competencia cognitiva y cultural de las personas con limitaciones cognitivas de López-Melero (1999).

2.2 Metodología

Esta investigación es de tipo cualitativa e interpretativa, en cuanto se trata de analizar un fenómeno social y cultural a partir de un conocimiento previo de una realidad educativa; según Medina y Castillo (2003), es un estudio cualitativo interpretativo, porque utiliza un método apropiado para mirar los matices de comportamiento de los estudiantes, genera afirmaciones e interrogantes reflexivos con sus evidencias y corresponde a un estudio de caso con estudiantes que presentan Síndrome de Down, SD.

El diseño metodológico se apoya en la Ingeniería Didáctica y conceptualmente se sustenta en la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1997) y la teoría de la transposición didáctica de Chevallard (1997). En su proceso metodológico se distinguen cuatro fases: 1. Análisis preliminares, 2. Diseño y análisis a priori de las situaciones, 3. Experimentación y 4. Análisis a posteriori y evaluación. El estudio se realizó con seis estudiantes con SD y otros veinte que presentan diversos problemas cognitivos, que asisten a su formación en la Fundación Quindiana de Atención Integral de la ciudad de Armenia, Colombia.

3. Resultados y discusión

3.1 Dimensiones histórica-epistemológica, didáctica y cognitiva

En la dimensión histórica-epistemológica, el investigador indaga el concepto de área y encuentra que tiene su origen, desarrollo y evolución en procesos donde intervienen diversas culturas como los babilónicos, quienes mediante la construcción de tabletas cuneiformes en Illana-Rubio (2008), lograron dejar impreso testimonio de sus avances, por medio de dos formas, unas tablas con datos y otra que contiene problemas; lograron un

acercamiento a la noción de área y a unos valores que tienen alguna relación con una ecuación cuadrática, esta representación menciona el lado de una figura e indica que esta magnitud está relacionada con otro lado, que es igual lado al cuadrado; en este sentido consideramos que la expresión cuadrado debe tener un vínculo con el significado geométrico que implica una representación de tipo gráfico que corresponde a una figura geométrica. Sin embargo, estas soluciones omiten procedimientos, lo cual corresponde a una característica de la matemática utilizada en la cultura babilónica.

La información encontrada en las tablillas demuestra que hubo en esta cultura un conocimiento de la relación expresada en el teorema de Pitágoras, además la idea clara del concepto de medición y de forma general utilizaron como unidad de medida el estadio para distancias largas; esto prueba que el concepto de perímetro ya existía, por ejemplo, la medida del perímetro de la ciudad de Babilonia que era aproximadamente de 480 estadios, correspondiente a la medida de las murallas que protegían la ciudad.

Los datos encontrados demuestran que en su aplicación habían descubierto algunas propiedades geométricas de cuerpos planos como la noción de perímetro y área, y lo que se puede deducir en su contexto es que el área la asocian al concepto de lado al cuadrado y el perímetro lo relacionan con la longitud que encierra a una superficie. Esto implica el dominio de otros principios matemáticos como el conocimiento del concepto de medición; sin embargo, no hay evidencias en sus trabajos que establezcan una relación entre estos dos conceptos matemáticos.

La cultura egipcia tenía un conocimiento del teorema de Pitágoras porque lo utilizaban

como un caso especial del triángulo, en el cual las medidas de sus lados eran 3, 4 y 5, correspondientes a los valores que toman los lados adyacentes y opuestos al ángulo de 90° . Para algunos matemáticos, esto implica el conocimiento geométrico de este triángulo, es decir, con estas medidas los egipcios delimitaron y trazaron superficies utilizando ángulos rectos. Este método práctico, les garantizaba exactitud en su trabajo; y así mismo, empleaban esta técnica en la construcción en las bases de pirámides utilizando una cuerda que tenía 13 nudos, equidistantes dos a dos que permitía adjuntar los extremos de una figura.

En los problemas 42, 43 y 44 del papiro de Rhind, se plantea el cálculo explícito del área de un círculo, y en el problema 50 se resuelve para un círculo de diámetro 9 unidades. Para ello, dados los argumentos que aparecen en el papiro original, el razonamiento lógico seguido es el siguiente: como primer paso se considera el cuadrado circunscrito al círculo, su lado mide 9 unidades, cuya área es igual a $9^2 = 81$ unidades cuadradas, seguidamente se divide el cuadrado en pequeñas unidades cuadradas, luego en las esquinas se traza una diagonal de lado tres, formando un octágono irregular que corresponde a una aproximación del círculo y por último, al área del cuadrado se le resta el área de las esquinas obteniendo un valor de 63 u^2 . El conocimiento del perímetro lo formularon como una razón que implica la utilización del área, como lo refiere Morales (2002):

Los egipcios utilizaban una regla precisa relativa a la circunferencia: la razón entre el área de un círculo y su circunferencia es la misma que entre el área del cuadrado circunscrito al círculo y su perímetro. Según Boyer (1968), esta relación tiene una significación matemática mucho mayor que la aproximación a π . Además, podían calcular el área de

triángulos, rectángulos y trapecios.

Estos indicios no muestran un dominio y aplicación a nivel disciplinar del concepto de área, ni del perímetro; sin embargo, la utilización de la cuerda de 13 nudos, daba sentido a cierta regularidad en la medida, lo que les permitía calcular aproximadamente el área de una región y de esta manera aplicarla en la solución de un problema; es decir, se tenía un conocimiento de un concepto que no se generalizaba mediante un algoritmo, considerando las regularidades de unos elementos matemáticos.

Posteriormente, los griegos dejaron un gran legado que se concentra en los trabajos y tratados realizados por Euclides 300 a.C. Este matemático, en la primera proposición del libro I plantea algunas construcciones, teoremas de áreas de polígonos, el teorema de Pitágoras y sus congruencias; el libro XII hace relación al tema de cálculo de áreas y volúmenes, utilizando el método exhaustivo de Eudoxio (408-335 a.C.) quien con su método contribuye a la primera técnica matemática rigurosa de un algoritmo infinito y que es de vital importancia en el cálculo exacto de áreas y volúmenes.

El estudio de los conceptos de área y perímetro involucran el conocimiento de las características y propiedades de las figuras geométricas, que son los aspectos trabajados en la geometría euclidiana y están relacionados con formas, tamaños, distancias y ubicación, que son elementos fundamentales para llegar a la medición de longitudes, en el caso particular de esta investigación, la medición de perímetros y áreas no solo de figuras, sino también de elementos reales.

En el aspecto cognitivo se analizan las concepciones, dificultades y obstáculos que se presentan en la comprensión del objeto matemático; para ello, debemos considerar algunos aspectos que se estructuran en la geometría, como el conocimiento de las figuras planas, las características y propiedades que son los elementos trabajados en esta área disciplinar.

Rogalski (1979), advierte que en el aprendizaje de la noción de perímetro y área existen dificultades en los cambios que se presentan en las formas y las dimensiones de las figuras representadas, al igual que en la utilización de patrones establecidos en las unidades de medición; esto implica que los estudiantes deben asociar las unidades de longitud con ciertas medidas que se realizan en geometría, lo que constituye un obstáculo conceptual en el trabajo que se realiza con los estudiantes cuando se trata de medición de superficie.

Los estudiantes muestran dificultad en diferenciar los conceptos de perímetro y área cuando se realizan mediciones de contornos y superficies; porque no dan sentido a los valores de las longitudes que aparecen en los lados, ni logran reconocer e identificar las medidas de área y perímetro en figuras planas. Este problema surge de las condiciones y reglas presentes al tomar medidas variantes, como lo considera Moreira y Comiti (1994); y no logran asociar las longitudes de los lados y la forma de la figura, con las características que expresan el perímetro o el área. Otros estudios sobre las concepciones que tienen profesores de primaria para la enseñanza de estas nociones, muestran la falta de relación entre el concepto de perímetro y área, según Tierney, Boyd y Davis; citados en D'Amore (2007), porque acuden a la definición del concepto, lo que implica que los estudiantes aprenden de memoria y su aprendizaje se apoya en el cálculo de fórmulas y algoritmos matemáticos.

De acuerdo con Azhari, citado en D'Amore, (2007) se encuentran obstáculos de tipo epistemológico, como cuando existen dos relaciones ligadas mutuamente, el estudiante intenta aplicar la siguiente "Ley de conservación": si una determinada cosa crece, también esta otra, con la cual está relacionada, crece (y viceversa), es decir siempre existe un razonamiento intuitivo, de relación y por asociación. En el caso del perímetro estas dos condiciones se ajustan; sin embargo, el estudiante muchas veces no identifica este fenómeno, ni le dan sentido o explicación; esta relación se considera la parte fundamental del estudio del concepto de perímetro y área; por tanto, un estudiante logra la comprensión del concepto en la medida que explique situaciones en las cuales el perímetro de una figura cambia pero el área se conserva.

Estas dificultades están relacionadas con conceptos previos que el estudiante debe identificar y son la base teórica para comprender las nociones de perímetro y área. Además, con utilización de procedimientos inadecuados en la enseñanza de un conocimiento, partiendo de la premisa que el concepto de perímetro y área es complejo para los estudiantes y está ligado a otros conceptos y formas de representación.

La estructura matemática del concepto es transversal al pensamiento numérico, variacional, al pensamiento espacial y al métrico. Por ello, el tratamiento, comprensión y construcción está inscrito en diversos niveles de la educación: básica, media y superior a nivel del cálculo, como lo menciona Artigue (1990), los estudiantes en el análisis del Área desarrollan una "concepción Forma" que está inscrita en el pensamiento espacial y sistemas geométricos, lo mismo que una "concepción número", en el pensamiento numérico, es decir, a estos dos pensamientos, pero de forma independiente y por tanto la solución de

situaciones problemas por lo general no establecen relaciones entre estos pensamientos.

El estudio del concepto de perímetro y área se trabaja desde el pensamiento métrico (sistemas de medida) y desde la perspectiva de la medición de longitudes, para considerar patrones de medida, entorno, tamaño y forma; estos aspectos hacen parte del entorno y tienen diversos modos de representación, que el sujeto debe saber interpretar y tener la capacidad de reconocer por medio de sus propiedades.

A partir del análisis preliminar y de la literatura encontrada, este estudio permitió establecer cuatro categorías de análisis relacionadas con los elementos matemáticos: conteo, medición y comparación; reconocimiento espacial, y noción de perímetro y área, que permitieron hacer el análisis de la información aportada durante el trabajo de campo y de lo cual se obtuvieron los elementos que se presentan en la figura 1.



Figura 1. Noción de perímetro y área.

La categoría de reconocimiento espacial se construyó durante el análisis, y tiene fundamentos en las nociones del pensamiento espacial y sistemas geométricos; su nivel de rigor lo inscribimos al conocimiento de algunos elementos como: entorno, forma, tamaño, color, necesarios en el reconocimiento de figuras que permiten al estudiante un acercamiento a las características de la figura como el número de lados, de vértices y la visualización de algunas formas geométricas de la figura, para acercar al estudiante a la noción de perímetro y área. Las actividades realizadas por la población objeto de la investigación, tienen relación directa con la percepción visual, porque en los estudiantes con discapacidad cognitiva la base de su aprendizaje es de tipo sensorial, es decir, se asimila más fácil mediante la intervención de diferentes sentidos, porque les permite crear imágenes mentales de las representaciones de objetos reales y por tanto establecen relaciones entre las nociones geométricas (Gutiérrez, 1991).

3.2 Resultados fase preliminar

El estudio realizado en la fase preliminar muestra que si un estudiante no logra reconocer un sistema de conteo y sus diversas representaciones, le resulta complejo llegar a la noción de perímetro y área, que corresponden a un pensamiento asociado al sistema de medición. Lo que implica que los estudiantes no tengan los conocimientos y las nociones necesarios para hacer una aproximación al concepto de perímetro y área. En forma general, los estudiantes no hicieron la tarea debido a la falta de dominio del concepto de conteo. En este sentido podemos destacar los siguientes resultados preliminares:

La mayoría de estudiantes no asocia la región interna con una superficie, o la relaciona con un valor numérico que permita establecer su tamaño.

La región externa a la superficie la consideran como lo que está por fuera de la figura.

La falta de reconocimiento en los elementos presentes, como la división interna realizada en las tareas iniciales, o número de fichas que van colocando en el proceso de construcción de figuras, dificulta para identificar el concepto de superficie.

Las representaciones gráficas se convirtieron en el medio para reconocer elementos que configuran la forma de una superficie.

La dificultad para reconocer propiedades geométricas y métricas para el reconocimiento del perímetro y área, inciden en la construcción de estas nociones.

Los elementos nocionales para analizar una representación e identificar la medida de una superficie no están presentes en los esquemas iniciales de esta población.

En este estudio, en la intervención mediadora por parte del docente con el propósito de llegar a la construcción de la noción de perímetro y área, se diseñan 12 secuencias de enseñanza, con la implementación de tareas apoyadas en uso de material didáctico como el tangram, el ábaco, las regletas de Cousinaire, multifichas, pentominó, entre otros.

En didáctica de la matemática, la atención a los procesos comunicativos involucrados en el proceso de la enseñanza y del aprendizaje son fundamentales en la interacción de los actores, por tanto, es necesario comprender y explicar los factores que intervienen en los procesos: en el caso de este estudio, el desarrollo de habilidades que les permita a los estudiantes describir y reconocer el mundo que los rodea y dar significado a los objetos matemáticos mediante la utilización de los sentidos.

Para el desarrollo de esta investigación, los niños debían tener un conocimiento previo de principios del conteo. Con este propósito se planearon unas tareas que permitieron en una primera etapa el reconocimiento de algunas estructuras numéricas y de esta forma acercar a los estudiantes a las nociones de ordenación y seriación. En el desarrollo de estas actividades se valoró el trabajo práctico, donde los estudiantes tuvieron la oportunidad de manipular material didáctico para construir sus propios principios y las nociones matemáticas desde su experiencia y la intuición; a través de operaciones como: organizar, contar, clasificar, medir, ordenar y comparar.

Así mismo, el análisis de la categoría de la noción de perímetro, tiene en cuenta aspectos como entorno, frontera, región interna, región externa, giro y ángulo y noción de longitud; nociones que le permiten al estudiante desarrollar y organizar estructuras conceptuales de la noción del concepto de figura plana e identificar sus propiedades y características, para poder establecer relaciones entre los elementos matemáticos que configuran los conceptos de área y de perímetro.

En la práctica, el estudio del concepto de perímetro está presente en contextos relacionados

con el contorno de figuras, y se apoya en la representación de figuras geométricas asociadas con espacios cerrados, los cuales están limitados por bordes indicados por líneas que guardan una relación directa con los lados de una figura. Sin embargo, muchos estudiantes no logran percibir y comprender el sentido que tiene el concepto matemático (Hernández, 2006). Así, el significado de un concepto en algunos casos no es comprensible por el estudiante cuando se deriva de una definición, lo que consideran un ente abstracto, carente de sentido; por tanto, el profesor debe poner en contexto lo que comunica a los estudiantes y diseñar un plan de trabajo que le permita orientar en forma organizada unas secuencias de enseñanza, que generen desarrollo y construcción de la noción del concepto en Brousseau (1997).

En el mismo sentido, apoyados en la categoría de noción de área, se propone realizar el estudio de los elementos: región interna, región externa, superficie y representación, que conllevan al reconocimiento de las propiedades de figuras planas, y a establecer relaciones entre las nociones de perímetro y área.

Por medio de la representación, se buscaba favorecer el reconocimiento de los elementos que configuran al objeto matemático y a tener una percepción general de la figura; en este proceso se establecen relaciones entre elementos, y los estudiantes deben seguir unas etapas que implican la utilización de estructuras geométricas, utilización de símbolos o números, reconocer propiedades y características de las figuras, realizar acciones a las figuras y transformaciones para comprender lo que se presenta en diversas situaciones, utilizando representaciones, Godino (2003). Además, la comparación de eventos con diversos modos de representación permiten al estudiante encontrar fenómenos o relaciones entre las

nociones de perímetro y área y de esta manera interiorizar las propiedades invariantes del área, pero variantes en el perímetro.

Algunos estudios indican que la dificultad que tienen los niños al establecer relaciones entre el perímetro y el área, es común en los estudiantes y para ello se planean estrategias que admitan reconocer y construir diferencias entre las dos nociones. El hecho que dos figuras tengan la misma área induce a algunos niños a creer que tienen el mismo perímetro. Vinh-Bang y Lunzer, citados por Del Olmo, Moreno y Gil (1993), en su estudio observan las reacciones de los niños ante una tarea propuesta con rectángulos que tienen el mismo perímetro y apariencias muy diferentes. Los niños más pequeños se dejan llevar por su percepción y estiman que los perímetros han de ser diferentes; carecen de un “mecanismo” de compensación que no se presenta hasta los 8 o 10 años (Manotas-Mercado, & Rojas-Álvarez, 2008).

3.3 Resultados en el aula

A continuación, se muestran dos tareas realizadas por estudiantes durante la fase didáctica, sobre la comprensión del concepto de perímetro y área, utilizando el pentominó. El propósito de estas tareas son el conteo y el reconocimiento espacial como: forma, tamaño, región interna y externa. La figura 2 ilustra lo que hace el estudiante E13 durante la actividad escrita.

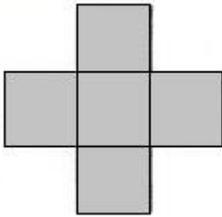
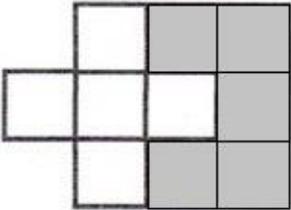
	Escriba el número de cuadrados presentes en la figura <u>5</u>
	Escriba el número de bordes que forman el contorno de la figura <u>12</u>
	Escriba el número de cuadrados presentes en la figura <u>10</u>
	Escriba el número de bordes que forman el contorno de la figura <u>8</u>

Figura 2. Resolución de la tarea 1, estudiante E13.

El estudiante identifica el número de cuadrados y de lados presente en la figura, realiza conteo uno a uno, identifica la pieza correspondiente al pentominó dentro del grupo de fichas. En relación al perímetro indica una medida de 12; que asocia con la cantidad de lados presente en la primera figura y 8 en la segunda figura; en este sentido el estudiante no asigna un valor o medida a cada uno de los lados porque no tiene interiorizada la noción de medida, y solo efectúa un proceso de conteo. Después de realizada la tarea por escrito se le hace al estudiante una entrevista para conocer más los argumentos que utiliza, y esto es lo que responde el estudiante frente al desarrollo de la actividad.

P: ¿Cuántos lados tiene la figura 1 presente en la gráfica?

E13: Doce lados (El estudiante hace el conteo uno a uno de los lados presentes en la figura)

P: ¿Cuántos cuadrados forman la figura y qué forma tiene?

E13: Hay cinco (El estudiante hace conteo uno a uno), es una cruz

P: ¿Qué nombre recibe la medida o longitud de la parte exterior de la figura?

E13: No sé.

P: ¿Cómo se llama el espacio que ocupan los cinco cuadrados, que forman la figura?

E13: No sé.

P: Observa la segunda figura ¿cuánto mide cada lado de esta figura, si la longitud de cada cuadrado pequeño es una unidad?

E13: (Indica con el dedo la parte superior) una unidad, (parte derecha), una unidad, (y así sucesivamente el mismo valor para cada lado).

Nótese que el estudiante le da sentido a la cardinalidad desde el conteo, pero pone en evidencia que tiene dificultad en este nivel de comprensión para identificar otras características propias de representación gráfica que aparece en la cuadrícula. Sin embargo, considerando los aspectos estudiados en el análisis, el sujeto reconoce elementos como el contorno de la figura, lo que le permite establecer una idea de la forma y hacer su respectiva representación; igualmente, es capaz de identificar la parte interna, y desde la noción de conteo referirse a la composición de cuadrados que dan forma a la figura.

En la segunda tarea se espera que los estudiantes identifiquen una ficha del pentominó y su representación gráfica utilizando una cuadrícula; luego se pide que identifiquen algunos elementos que involucran la construcción de la noción matemática de perímetro y área. Esta es otra forma como responde el estudiante E18, frente a la tarea 2, cuando se le presenta la siguiente situación: En cada una de las cuadrículas va a representar una ficha o pieza del

pentominó para que indique el número de lados, la forma y número de cuadrados internos de la figura 3.

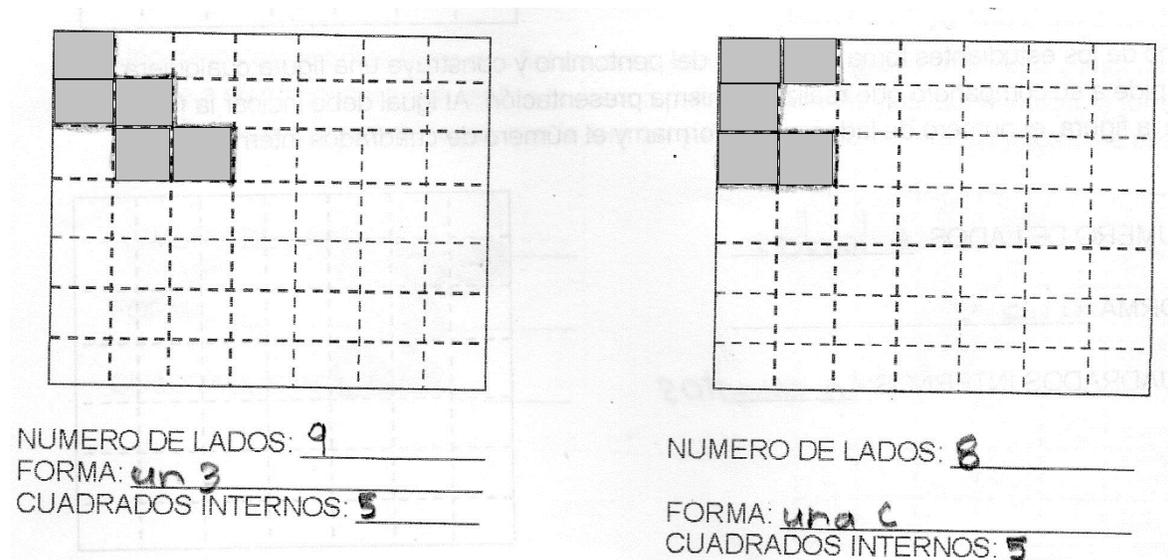


Figura 3. Resolución de la tarea 2 por E18.

El estudiante logra sin dificultad hacer un reconocimiento de los lados de la figura, e indica el número correspondiente de los lados de cada una de las figuras; así mismo hace el conteo de los recuadros que colorea y forman la figura de la pieza seleccionada del pentominó. En entrevista esto es lo que argumenta este estudiante:

P: ¿Cuántos lados tienen las figuras que aparecen en la gráfica?

E18: La primera figura tiene nueve lados (el estudiante hace el conteo).

P: ¿Cuántos lados tiene la segunda figura?

E18: Ocho lados (el estudiante hace el conteo).

P: ¿Qué tienen de similar estas dos figuras? (Se hace entrega de las dos piezas a los estudiantes para que las compare).

E18: Son figuras diferentes (observa las figuras, trata de sobreponerlas).

P: ¿Por qué son diferentes?

E18: Son diferentes, su forma es diferente, una parece una C (letra) y la otra como a un tres (forma).

P: ¿Cuántos cuadrados conforman la figura que parece a la izquierda?

E18: Cinco cuadros pequeños.

P: ¿Qué nombre damos al espacio que ocupan estos cinco cuadrados y que forman esta figura?

E18: No sé.

Durante este episodio de la entrevista el estudiante pone de manifiesto que además de realizar el conteo, también hace una medición y comparación intuitiva, porque establece relaciones entre las diferentes formas de la figura; lo que nos indica que el estudiante mediante la intervención del profesor logra de manera progresiva ir construyendo las nociones objeto de la investigación. El estudiante muestra un acercamiento a las nociones de conteo, reconocimiento espacial, de perímetro y área, sin considerar la noción de medición; sin embargo, no da sentido ni significado real a las propiedades de perímetro y área, centra su atención en procesos que lo llevan al reconocimiento de la forma, color y tamaño, que corresponden al propósito de la tarea.

Los estudiantes logran durante el proceso referenciar unas piezas que corresponden a unas formas geométricas mediante la comparación, porque establecen diferencias entre los

objetos físicos a los que reconocen en su entorno y los relacionan para dar sentido y significado a la noción estudiada. Este proceso lo hace desde un pensamiento intuitivo y concreto, mediante la manipulación de material real; en general el proceso lo realiza sobreponiendo, y comparando la forma, y de esta manera llegan a una comprensión de noción matemática.

De la forma como los estudiantes resuelven las tareas, se infiere que reconocen algunos elementos geométricos como el contorno o frontera, la región interna, pero no lograron reconocer que todas las piezas del pentominó tienen la misma cantidad de recuadros y por tanto existe una variación en su forma sin cambiar la superficie. Los estudiantes de manera intuitiva tienen una comprensión de la noción de perímetro y área, sin embargo, no se logra establecer una comparación entre los dos conceptos, porque no aplican la noción de medición, no relacionan elementos matemáticos en el pensamiento métrico, en el pensamiento espacial y los sistemas de representación.

También se utilizaron otras secuencias didácticas apoyadas en materiales didácticos como: el tangram, multifichas y regletas de Cousinarie, con el propósito que los estudiantes lograran identificar las propiedades de figuras planas como el perímetro y el área. Este acercamiento lo desarrollaron de forma intuitiva, mediante el reconocimiento de ciertos elementos y características en las figuras geométricas como la forma, el número de lados, y la longitud del lado.

De acuerdo con lo anterior, las nociones de medición y reconocimiento de figuras planas son constructos teóricos fundamentales para la comprensión de las nociones de perímetro y

área. En cuanto al concepto de perímetro, los estudiantes lo comprenden como el contorno o frontera de la representación geométrica; lo asocian con la longitud de cada uno de sus lados y lo representan como un único valor que se obtiene de la suma de todos los lados. Este proceso se logra sin hacer referencia a un patrón de medida específico; algunos errores derivados del proceso se presentan por el uso inadecuado del conteo, por ejemplo, dan valores a cada lado en forma correcta, pero al obtener la suma de ellos indican un resultado o valor incorrecto.

La noción de área la asocian con el espacio interior de la forma geométrica expresada y la obtienen de forma simple, utilizando las divisiones que aparecen en la representación gráfica; para ello, consideran los espacios cuadrados que forman la figura (en el caso de los materiales didácticos pentominó posee divisiones internas, en las multifichas depende de la cantidad de piezas utilizadas en la construcción geométrica); es decir, no tienen algoritmos aritméticos que permitan hallar mediante una fórmula el área de una región, en este nivel y contexto no existe una estructura formal del concepto.

La mayoría de estos estudiantes reconocen la noción de perímetro y área y la asocian con la información que suministra la frontera o contorno de la figura, lo hacen en forma natural considerando las características visibles que les proporcionan la forma, y para llegar a la construcción de estas nociones, se hizo necesario que ellos reconocieran primero las nociones de conteo y medición. De igual forma, algunos niños identifican las unidades del sistema métrico, pero no saben utilizarlas en forma apropiada: este estudio buscaba conocer los procesos que realizan los niños en la construcción del concepto, sin abordar de manera formal la utilización del sistema métrico decimal.

4. Conclusiones

La evolución y desarrollo de un concepto matemático es de gran importancia para los profesores en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, porque les facilita la comprensión del constructo teórico y les permite dimensionar la planificación de tareas; por tanto, el análisis histórico-epistemológico proporciona elementos de juicio que permiten reconocer los principios, propiedades y características que dieron fundamento al concepto matemático de perímetro y área. En el estudio se destacan algunos conceptos que corresponden a nociones previas que los estudiantes deben tener para llegar a la comprensión de perímetro y área, como son la noción de conteo, la noción de medición, el reconocimiento espacial y los sistemas de representación.

En lo didáctico, es necesario que el profesor tenga en cuenta las dificultades y características de la población y reconozca las condiciones a las que se enfrenta, para que pueda diseñar, planear y aplicar estilos adecuados de aprendizaje, a la vez que proporciona ambientes de trabajo que impacten al estudiante.

En el caso particular de niños con síndrome de Down es fundamental desarrollar el pensamiento concreto, que facilite un reconocimiento y comprensión del entorno, para así poder examinar características de las formas y establecer relaciones, asociaciones entre los objetos físicos.

Un ambiente apropiado de enseñanza apoyado en el uso de secuencias didácticas y el uso de materiales tecnológicos, fortalece en un escolar con discapacidad cognitiva las posibilidades de aprendizaje, porque contribuye al desarrollo del lenguaje, la comunicación, la representación de imágenes mentales de las nociones matemáticas y por tanto, la construcción de los conceptos matemáticos de perímetro y área desde la percepción y visualización.

En lo cognitivo, los estudiantes con dificultades cognitivas y en concreto, los que presentan Síndrome de Down llegan a la construcción de la noción de perímetro y de área mediante un desarrollo del pensamiento concreto e intuitivo, que se fortalece a través de procesos lógicos de comparación. Para estos procesos la base está en lo sensorial, como: vista espacial, representación espacial, e imaginación espacial; porque el sentido visual juega un papel importante para ellos, además, del reconocimiento espacial, el conteo uno a uno, y la medición; estos elementos matemáticos los relacionan sin llegar necesariamente a la construcción de un algoritmo formal para calcular área y perímetro.

Agradecimientos

Reconocimiento a la Universidad del Quindío por financiar el proyecto 668 y 739 en convenio con Colciencias; mediante *“Alianza de Instituciones para el Desarrollo de la Educación y la Tecnología, en Colombia AIDETC”*, 2014.

Referencias

Alvarado, M. (2011). Atención a la diversidad. *Innovación y Experiencias Educativas*. 42, 1-8. Recuperado de: http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_42/MARIA_ALVARADO_1.pdf

Artigue, M. (1990). Epistémologie at didactique (J.D. Godino & C. Batanero, Trad.). *Reserches en didactique des mathématiques*, 10 (23), 32-33. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Boyer, C. (1968). *A history of mathematics*. Nueva York, Estados Unidos: John Wiley y Sons, Inc.

Brousseau, G. (1997). La théorie des situations didactiques. Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal. Recuperado de: <http://www.cfem.asso.fr/actualites/Brousseau.pdf>

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica del saber sabio al saber enseñado*. Aique Grupo editor. Argentina. (Publicación original en 1997).

D'Amore, Bruno., & Fandiño, M. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10 (1), 39-68. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362007000100003

Del Olmo, M., Moreno, M., & Gil, F. (1993). Superficie y volumen: ¿Algo más que el trabajo con fórmulas? Madrid, España: Síntesis.

Godino, J., & Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. *Matemática y su didáctica para maestros. Proyecto Edumat-Maestros*. Recuperado de: http://matematicassinaloa.com/AreaEspecial/01_ProyectoEdumatMaestros/7_Algebra.pdf

Gutiérrez, Á. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. *3er Congreso Internacional en Educación Matemática*. Congreso llevado a cabo en Valencia, España.

Hernández, G. (2006). La organización conceptual que desarrollan los alumnos de primaria en la conformación del concepto de perímetro. *X Congreso Nacional de Investigación Educativa*. Congreso llevado a cabo en Ciudad de México, México.

Illana-Rubio, J.C. (2008). Matemáticas y astronomía en Mesopotamia. *Revista suma: Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 58, 49-61. Recuperado de: <http://revistasuma.es/IMG/pdf/58/049-061.pdf>

Ley 115. (1994). *Ley general de educación*, Bogotá D.C., Colombia, 1994, 08 de febrero.

López-Melero, M. (1999). *Aprendiendo a conocer a las personas con Síndrome de Down*: Málaga, España: Aljibe.

Machín-Verdés, M., Purón-Sopeña, E., & Castillo-Mayedo, J. (2009). Reflexiones sobre la intervención temprana en niños con síndrome de down considerando la familia y la comunidad. *Revista Habanera de Ciencias Médicas*, 8(1), 1-6. Recuperado de: http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1729-519X2009000100002

Manotas-Mercado, M.E., & Rojas-Álvarez, C.J. (2008). Conceptualización acerca del perímetro, área y volumen en tres alumnos universitarios. *Zona próxima electrónico*, 9. Recuperado. <http://rcientificas.uninorte.edu.co/index.php/ /article/viewArticle/1656 /4639>.

Medina, A., & Castillo, S. (2003). *Metodología para la realización de proyectos de investigación y tesis doctorales*. Madrid, España: Universitas.

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006). *Estándares básicos de competencias, en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Recuperado de: <http://www.mineduacion.gov.co/cvn/1665/article-116042.html>

Morales, L. (2002). Las matemáticas en el antiguo Egipto. *Apuntes de historia de las matemáticas* 1(1), 5-13. Recuperado de: <http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-1-1-egipto.pdf>

Moreira, P. & Comiti, C. (1994). Difficultés rencontrées par des élèves de cinquième en ce qui concerne la dissociation aire/périmètre pour des rectangles, *Petit x* 34, 5-29. Recuperado de: http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/34/34x1.pdf

Noda, A., Bruno, A., González, C., Moreno, L., & Sanabria, H. (2012). Suma y resta mediante el uso de una pizarra digital en alumnado con Síndrome de Down. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. (30), 15-40. Recuperado de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/30/Archivo_7_de_volumen_30.pdf

Noda, P., & Bruno, A. (2010). Operaciones básicas en alumnos con Síndrome de Down. *Revista PNA*, 4 (4), 143-159. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3704023>

Ortega, J. (2008). Síndrome de Down: contenidos matemáticos mediados por ordenador. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 16, 85-105. Recuperado de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2008/16/Union_016_010.pdf

Ramírez, D. (2004). Propuesta didáctica para potenciar el desarrollo de habilidades relacionadas con la comprensión lectora en adolescentes con Síndrome de Down. *Revista Española sobre la Discapacidad Intelectual*, 35 (3) 211. 49-81. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=981837>

Rogalski, J. (1979). Quantités physiques et structures numériques. Mesures et quantification: les cardinaux finis, les longueurs, surfaces et volumes. *Bulletin de l'apmep*. 320, 563-586. Recuperado de: <http://www.scielo.org.mx/scieloOrg/php/reflinks.php?refpid=S1665-2436200700010000300044&pid=S1665-24362007000100003&lng=en>

Ruiz-Rodríguez, E. (2003). Adaptaciones curriculares individuales para los alumnos con síndrome de Down. *Revista Síndrome de Down*, 20, 2-11. Recuperado de: <http://www.downcantabria.com/articuloE8.htm>

Ruiz-Rodríguez, E. (2013). Cómo mejorar la atención de los niños con síndrome de Down. *Revista Síndrome de Down*, 30 (2) 63-75. Recuperado de: <http://www.downcantabria.com/revistapdf/117/63-75.pdf>

Vigotsky, L. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona, España: Crítica.