Reflexiones sobre el concepto de Elasticidad y su interpretación Matemática y Económica

Reflections on the concept of elasticity and it´s Economic and Mathematic interpretation

Félix Marrero Prieto, PhD.
felix1949@gmail.com
Universidad Estatal Amazónica, Puyo
Elena Font Graupera, PhD.
fontelena13@gmail.com
UNIANDES
Carlos Lazcano Herrera, PhD.
clazcano24@gmail.com
UNIANDES

RESUMEN

Una de las aplicaciones más utilizadas de la Matemática en las Ciencias Económicas, al extremo de que su estudio está incluido en muchos cursos propios de Economía es el de elasticidad. Por otro lado, e inexplicablemente, muchos profesores de matemática, que incluso se desempeñan en la formación de economistas, no tienen una idea clara de este concepto, que desde todo punto de vista, se debe dominar por los matemáticos, y debe estar incluido en todos los programas de cálculo diferencial a especialidades económicas. Este trabajo presenta el concepto de elasticidad, y muestra una forma en que se puede abordar el tema teniendo en cuenta su base Matemática. Se presenta además una valoración desde el punto de vista práctico de la aplicación de este concepto, tanto desde el punto de vista técnico, como desde el punto de vista de su interpretación real para la toma de decisiones empresariales. Constituye entonces, una reflexión acerca de este tema, desde la perspectiva de los autores, basada en más de 30 años de experiencia profesional en la utilización de estos conceptos en el desarrollo de la docencia universitaria, investigaciones y consultorías.

PALABRAS CLAVE: Elasticidad Demanda, Monopolio, Costo Marginal, Competencia Perfecta.

ABSTRACT

One of the most used applications of mathematics in economics, to the extent that their study is included in many own courses of Economy is elastic. Moreover, inexplicably, many teachers of mathematics, he even played in the formation of economists have no clear idea of this concept, which from every point of view, must be mastered by mathematicians, and must be included in all programs of differential calculus to economic specialties. This paper presents the concept of elasticity, and shows how they can address the issue given its mathematical basis. It also presents an assessment from the point of view of practical application of this concept, both from a technical point of view and from the point of view of its actual performance for making business decisions. Then it constitutes a reflection on this issue from the perspective of the authors, based on over 30 years of professional experience in the use of these concepts in university teaching and development of research and consultancy.

KEY WORDS: Demand elasticity, Monopoly, Marginal Cost, Perfect Competition.

Recibido: Marzo 2015. **Aceptado:** Mayo 2015

INTRODUCCIÓN

Uno de los inconvenientes que muestra la utilización de las comparaciones de variables en cualquier modelo, es la necesidad de tener en cuenta las unidades de medida. Por ejemplo, dada la función y = f(x), la función promedio se define como la razón de las variables $\frac{y}{x}$. Cuando esta función se utiliza en la práctica, la misma tiene unidades de medida, y aunque muchas veces se ignora, no por ello deja de ser muy importante diferenciar entre “pesos por kilogramo” y “dólares por libra”. Pasa lo mismo, por ejemplo con $\frac{dy}{dx}$.

Dadas las variables reales x e y (y = f(x)), y sus incrementos Δx y Δy, las formas más usuales de comparación de unas variables con otras, con ellas mismas, y con sus incrementos son:

- $\frac{y}{x}$ Función promedio.
- $\frac{\Delta x}{x}; \frac{\Delta y}{y}$ Variaciones porcentuales de x e y, o tasas proporcionales de variación de x, y de y.
- $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ Variación de la función, por incremento de la variable independiente, llamada cociente incremental. Muchos autores de las ciencias económicas se refieren a esta función, como función marginal, al hacer el incremento de x igual a la unidad (Δx = 1).
- Al hacer tender el incremento de la variable independiente a 0, la razón de los incrementos resulta en el límite, si este existe, igual a la derivada de la función: $y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Por extensión, en las ciencias económicas, a la derivada de funciones como “utilidad”, “costo”, “ingreso”, “beneficio”, con respecto a cantidades de bienes producidos o vendidos, o cantidades de factores de producción, frecuentemente se le llama función marginal del bien o factor de referencia. También se suele llamar, cuando $x = x_0$, tasa instantánea de variación de y en x_0.
- Sea $y_0 = f(x_0)$ y consecuentemente, y_0' el valor que toma la función derivada en x_0. A la razón $\frac{y_0'}{y_0}$ se le llama tasa (proporcional o relativa) de variación de y. Obsérvese que si se toma Δx = 1, en lugar de y_0’, se tendría simplemente Δy, a lo que ya se hizo referencia anteriormente.

En este trabajo, de las razones matemáticas utilizadas en Economía, se trata específicamente el caso de la que representa el concepto de Elasticidad de una función.

Recibido: Marzo 2015. **Aceptado:** Mayo 2015
Universidad Regional Autónoma de los Andes UNIANDES

DESARROLLO

Determinar la elasticidad de la demanda es de gran importancia para el sector empresarial y también para el estado, puesto que permite anticipar el comportamiento del mercado ante una variación de factores como el precio de los bienes y servicios. (Gerencie.com, 2015)

Este concepto se utiliza con más frecuencia en la práctica en la toma de decisiones en la fijación de precios, fundamentalmente de productos de consumo. Se sabe que la fijación de precios depende más de la intuición, experiencia, conocimiento del mercado y los competidores, entre otros elementos, que de las diversas formas establecidas para ello como son: precio en función de los costos, con base a un margen de utilidad, con base en el comportamiento del consumidor, entre otros enfoques. La fijación de precios, más que una técnica, es un arte.

El conocer las características de la demanda, posibilita tomar decisiones más fundamentadas a la hora de establecer los precios. Al igual que los costos constituyen un punto de partida para ello, la elasticidad de la demanda respecto al precio puede ser la brújula que permita trazar el rumbo de esta decisión.

Pero, es indispensable conocer, en términos matemáticos, de qué se está hablando, qué se está utilizando para hacer estos análisis. No se puede aplicar a ciegas, se requiere comprender su significado desde el punto de vista matemático y cómo se llega al mismo.

A continuación, se presentan las definiciones que permitirán una mejor comprensión y aplicabilidad de este concepto.

<u>Elasticidad en un intervalo:</u>

Se define Elasticidad de una función en un intervalo (o también elasticidad de arco), a la razón de las variaciones porcentuales de las variables:

$$\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta x}}{\frac{y}{x}} = \frac{x}{y}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Observar que la elasticidad expresa la sensibilidad de la función ante un cambio relativo de la variable independiente. También se puede decir que expresa la variación porcentual de la función, ante una variación porcentual de la variable independiente, *a partir de un valor determinado de ésta*. Este indicador tiene la particular importancia de carecer de unidades de medida, lo que hace muy atractiva su utilización. (Simon y Blume, 1994)

Por ejemplo, sea la función dada por la siguiente tabla:

y	1	4	9
x	1	2	3

Recibido: Marzo 2015. **Aceptado:** Mayo 2015

Cuando **x** admite un incremento de 1 a 2 (Δx = 1), **y** lo admite de 1 a 4 (Δy = 3), y se tiene una elasticidad en ese intervalo de variación de **x** igual a 3; sin embrago, si **x** se desplaza de 2 a 1, entonces **y** varía de 4 a 1, ¡y la elasticidad es igual a 1,5!

Lo mismo pasa en el intervalo de variación [2; 3] de la **x**.

Si se hubiera trabajado con variaciones menores de la variable independiente, como muestra la tabla a continuación:

y	1	1,21
x	1	1,1

las elasticidades hubieran sido 2,1 (con Δx > 0) y 1,91 (con Δx < 0).

Y si Δx se toma aún menor, pues la diferencia entre las elasticidades cuando la x varía en el intervalo de izquierda a derecha o de derecha a izquierda es aún menor.

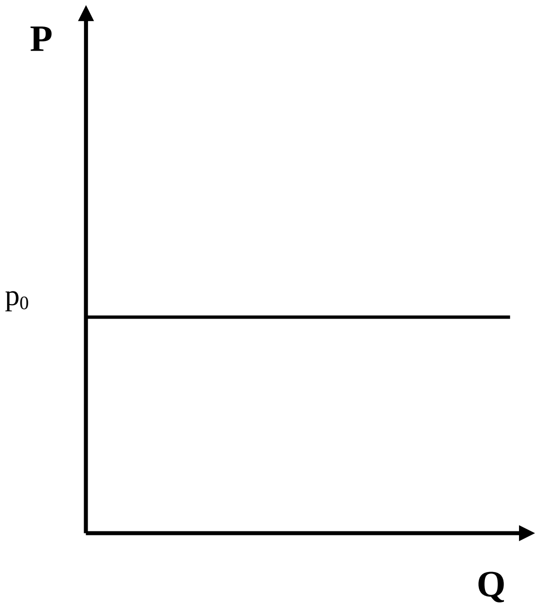
Es por esta razón que se suele trabajar con el concepto de Elasticidad puntual, en el punto x_0, que se define a partir de la definición de elasticidad en un intervalo, como el límite cuando Δx tiende a 0, es decir:

$$\varepsilon_{y,x}(x_0) = \frac{x_0}{y_0}\frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{\frac{dy}{dx}(x_0)}{\frac{y_0}{x_0}} = \frac{\text{Función marginal}}{\text{Función promedio}}$$

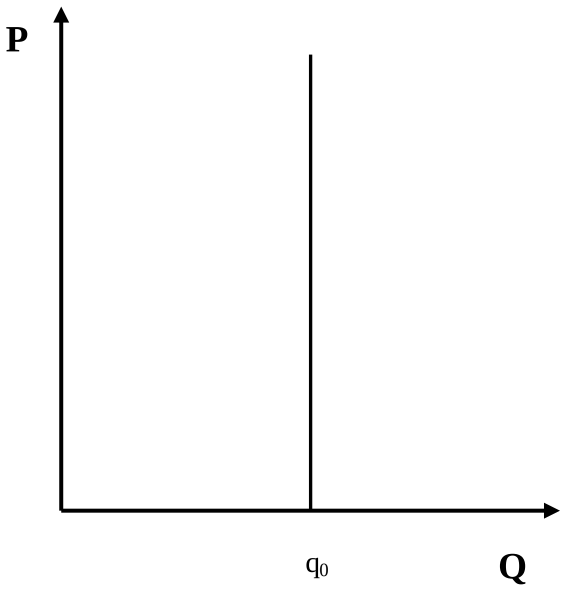
Una función se dice elástica, inelástica o de elasticidad unitaria, en un punto x_0, si en ese punto el valor absoluto de la elasticidad es mayor, menor o igual a 1 respectivamente.

A continuación se ofrecen los ejemplos de demanda perfectamente elástica - precio (la elasticidad tiende a infinito) y perfectamente inelástica - precio (la elasticidad es igual a 0):

Recibido: Marzo 2015. **Aceptado:** Mayo 2015
Universidad Regional Autónoma de los Andes UNIANDES



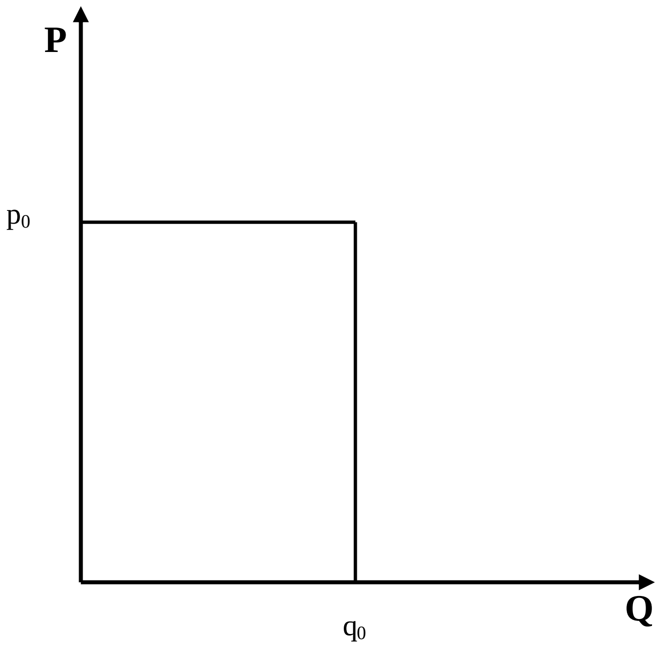
Demanda perfectamente elástica.



Demanda perfectamente inelástica.

Obsérvese que la variable precio (variable independiente), se ubica en el eje vertical. (Varian, 1992)

La demanda de insulina de un paciente diabético, que no tiene seguro médico, en una economía de mercado, se puede representar con el siguiente gráfico:

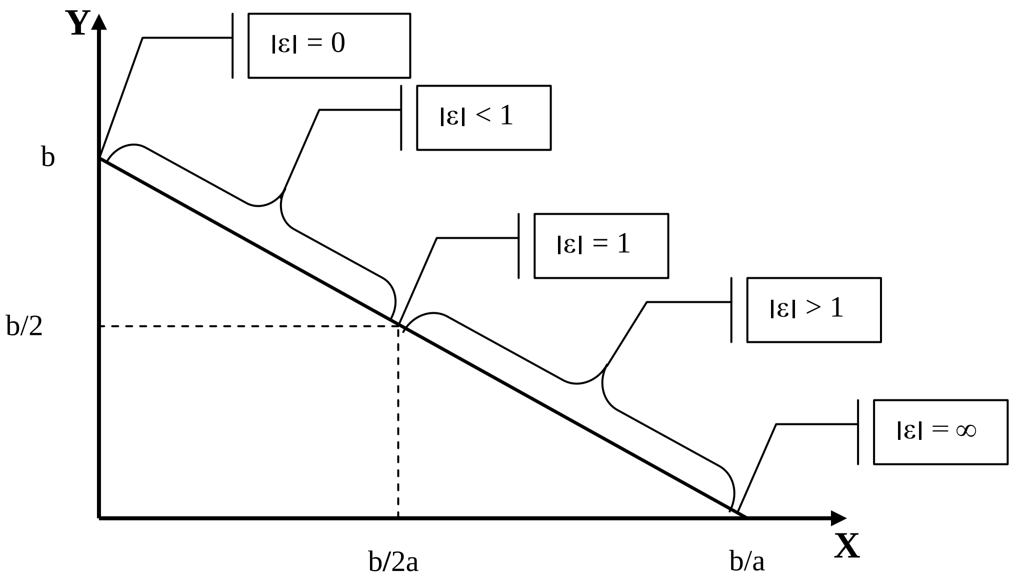


Para valores del precio menores que p_0, la demanda es perfectamente inelástica ($Q = q_0$). Para $P = p_0$, precio máximo que puede pagar el paciente para consumir lo que

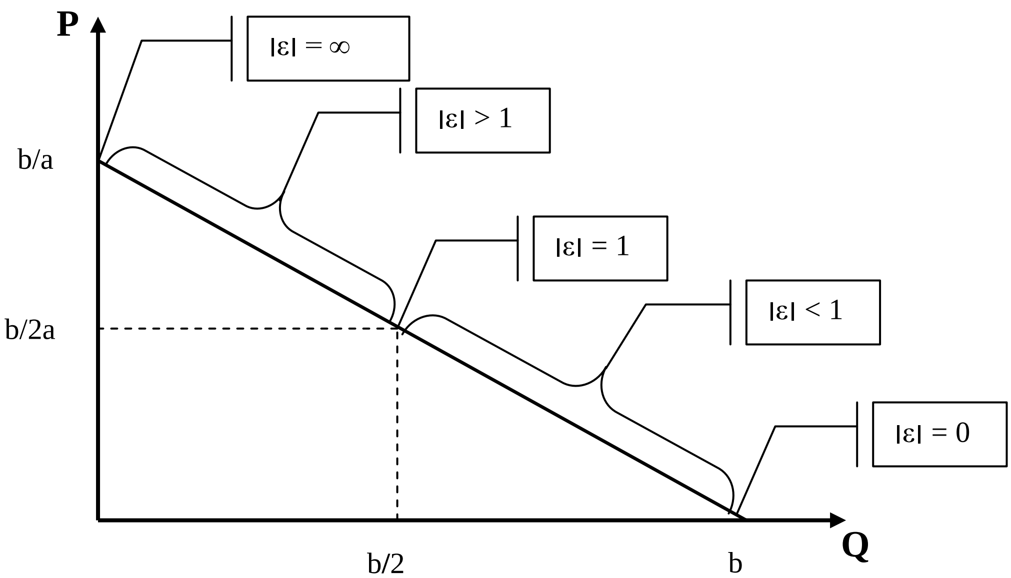
Recibido: Marzo 2015. **Aceptado:** Mayo 2015
Universidad Regional Autónoma de los Andes UNIANDES

necesita de insulina, q_0, la demanda es perfectamente elástica. Para valores del precio superiores a p_0, no hay demanda.

Cuando se tiene una función lineal del tipo $y = b - ax$, la elasticidad se comporta de la siguiente manera:



Sin embargo, en el caso de la función de demanda $Q = b - aP$, el gráfico sería:



Recibido: Marzo 2015. **Aceptado:** Mayo 2015
Universidad Regional Autónoma de los Andes UNIANDES

Sea la función $y = f(x)$. Ya se vio que la elasticidad de la función viene dada por la expresión $\varepsilon = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$. También es posible poner $\varepsilon = \frac{d\ln y}{d\ln x}$.

Para probarlo, teniendo presente que la variable x se puede poner como función de su logaritmo natural, $x = e^{\ln x}$ resulta $\frac{d\ln y}{d\ln x} = \frac{d\ln y}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\ln x} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}x = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \varepsilon$

Sea la función de varias variables, $y = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ se define la elasticidad parcial de la función con respecto a la variable x_i, al producto: $\varepsilon_{y,x_i} = \frac{x_i}{y}\frac{\partial y}{\partial x_i}$

Elasticidad Cruzada

Para una función de demanda de un bien, que depende no sólo del precio del propio bien, sino también del precio de otros bienes, la elasticidad precio cruzada de esa demanda es un caso particular de elasticidad parcial, en que la variable precio que se tiene en cuenta no es el precio del bien en cuestión, sino el de otro bien. Sea la demanda del bien A: $Q_A = f(P_A; P_B)$ La elasticidad cruzada de precios de la demanda del bien A vendrá dada por $\frac{P_B}{Q_A}\frac{\partial Q_A}{\partial P_B}$, y expresa en qué por ciento variará la demanda del bien A ante un cambio porcentual del precio del bien B.

Ya que la función tipo Cobb – Douglas $y = kx_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$ es muy utilizada en Economía, es muy frecuente que se aplique la derivada logarítmica, por lo que la elasticidad se calcula por la fórmula $\varepsilon_{x_i} = \frac{d\ln y}{d\ln x_i} = a_i$.

Lo cual no significa que si la demanda de un bien es inelástica respecto al precio, este puede incrementarse notablemente.

“La elasticidad es un concepto que la economía copia de la Física. Un material inelástico es aquel que podemos estirar y no conseguiremos que aumente su longitud. Pero si tiramos lo suficientemente fuerte, seguro que llegaremos a romperlo”. (Market in Cloud, 2015)

Al igual que en el concepto físico, se encontrará un punto de ruptura, que no es posible calcular en el caso matemático, ni se puede conocer tampoco si el precio está acercándose a este valor. Es por ello, que la situación de la elasticidad de la demanda no puede constituir el único elemento para la toma de decisiones de precio, se requiere tener en cuenta los factores restantes que pueden influir en su comportamiento.

La elasticidad es un concepto que también es utilizado no sólo en la fijación de precios, también es aplicable en otros campos de la Economía, como el modelo de mercado de monopolio en Microeconomía. En este modelo se muestra cómo para que el monopolista sea maximizador de beneficios, la demanda de mercado donde él actúa

Recibido: Marzo 2015. **Aceptado:** Mayo 2015

debe ser elástica. Ya que el ingreso marginal del monopolista debe igualarse al costo marginal, que es mayor que cero, se tiene que:

$$YM = \frac{d(P(Q)Q)}{dQ} = P + Q\frac{dP}{dQ} = P\left(1 + \frac{Q}{P}\frac{dP}{dQ}\right) = P\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_{Q,P}}\right) = P\left(1 - \frac{1}{\left|\varepsilon_{Q,P}\right|}\right) > 0 \Rightarrow \left|\varepsilon_{Q,P}\right| < 1$$

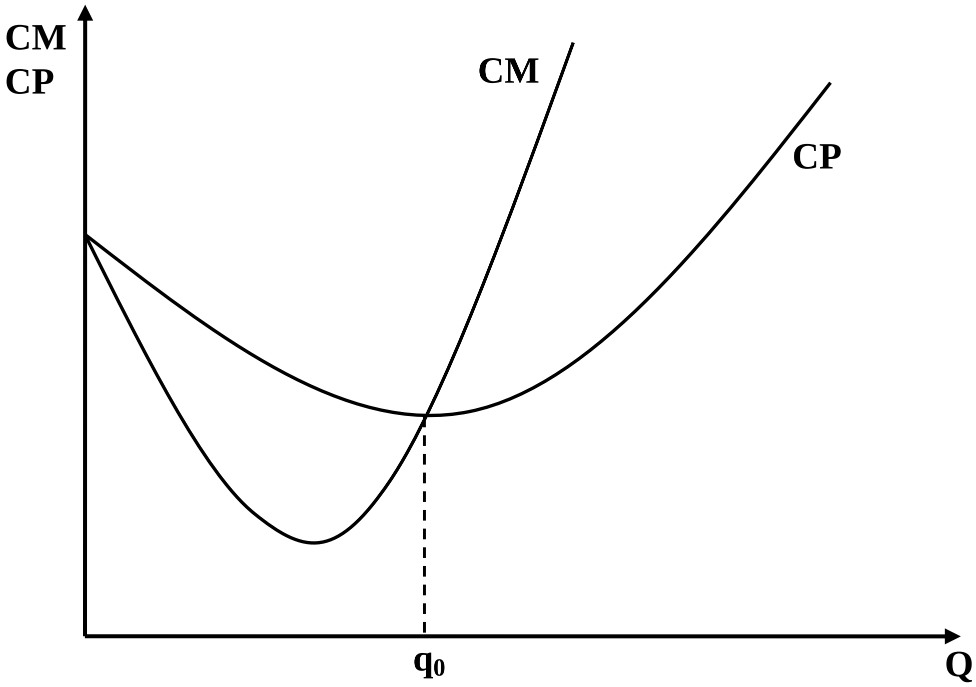
P(Q) representa la demanda inversa que afronta el monopolista, y por tanto, el referente que utilizará para fijar el precio del bien que produzca en una cantidad Q. $\varepsilon_{Q,P}$ representa la elasticidad precio de la función de demanda de mercado.

Para una función cualquiera $y = f(x)$, con $x > 0; y > 0$ también resulta útil estar al tanto de la relación entre los gráficos de las funciones marginal y promedio. En el segmento del eje X en que la función marginal "está por encima" de la promedio, la función $y = f(x)$ es elástica:

$$\frac{dy}{dx} > \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} > 1$$

Razonando de la misma forma, en el segmento en que la función marginal está por debajo de la promedio, la función es inelástica; y en el punto en que se cortan ambos gráficos, la función es de elasticidad unitaria.

Por ejemplo, sean los gráficos de las funciones de costos marginales (CM) y de costos promedios (CP) de una empresa, dados en su forma más general:



A la derecha de q_0, la empresa exhibe el segmento en que su función costos es elástica, es decir, ante un incremento de la producción, los costos se incrementan más que proporcionalmente, y consecuentemente, dicha empresa incrementaría su ineficiencia al aumentar los costos promedios. La parte del gráfico de los costos marginales correspondientes al segmento en que $q > q_0$, (donde los costos marginales son mayores que los promedios) no es otra cosa que la función de oferta de esa empresa, que se desempeñaría en un mercado de competencia perfecta. (Varian, 1994)

Si la empresa produce una cantidad ubicada a la izquierda de q_0, ella exhibe el segmento en que su función costos es inelástica, y en un mercado de competencia perfecta incurriría en pérdidas. La parte del gráfico de los costos marginales correspondientes al segmento en que $q < q_0$, es propio de las empresas con poder de mercado (monopolio, oligopolio), los costos marginales son menores que los promedios.

Es asimismo conveniente conocer este otro caso particular, especialmente útil en Microeconomía, que es la llamada Elasticidad de Sustitución.

Sea la función de 2 variables $z = f(x; y)$ Se conoce como tasa marginal de sustitución de y por x, para cada valor de z, a la derivada de y con respecto a x en cada curva de nivel z_0, es decir: $TMS_{y,x} = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}$.

A la razón $\dfrac{y}{x}$ se le conoce como intensidad de la variable y con respecto a la x.

Se define como Elasticidad de Sustitución, y se denota por la letra griega σ, a la elasticidad de la intensidad de una de las variables, sea $\dfrac{y}{x}$, con respecto a la tasa marginal de sustitución de esa variable con respecto a la otra, $TMS_{y,x}$. Es muy conveniente expresarla utilizando los logaritmos: $\sigma = \dfrac{d\ln\left(\frac{y}{x}\right)}{d\ln\left|TTS_{y,x}\right|};\ y > 0;\ x > 0$ (Sydsaeter y Hammond, 2005).

Por ejemplo:

Sea la función de producción $Q = \left(0{,}2K^{-1} + 0{,}8L^{-1}\right)^{-1}$. Determinar la elasticidad de sustitución (tomar en cuenta K/L, y $TTS_{K,L}$) Si la $TTS_{K,L}$ varía en un 10 %, ¿cómo se estimará la variación de la intensidad de capital? Nota, cuando se trata de una función de producción, en lugar de Tasa Marginal de Sustitución, se habla de Tasa Técnica de Sustitución o Tasa Marginal Técnica de Sustitución, y se denota TTS.

Se sugiere tomar la función $z = A\left(ax^{\rho} + by^{\rho}\right)^{\frac{m}{\rho}}$

Recibido: Marzo 2015. **Aceptado:** Mayo 2015

En esta función, $A > 0;\ \rho < 1;\ \rho \neq 0;\ a + b = 1;\ a > 0;\ b > 0;\ x > 0;\ y > 0$

Observar que $\left|TMS_{x,y}\right| = -\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \dfrac{b}{a}\left(\dfrac{x}{y}\right)^{1-\rho}$, de donde

$\ln\left|TMS_{x,y}\right| = \ln\dfrac{b}{a} + (1-\rho)\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$, y consecuentemente, $\sigma = \dfrac{d\ln\left(\frac{x}{y}\right)}{d\ln\left|TMS_{x,y}\right|} = \dfrac{1}{1-\rho}$, y en el caso que ocupa el problema propuesto, $\sigma = \dfrac{1}{2}$; y se estima que la variación de la intensidad de capital sea del 5 %.

Observar que las funciones del tipo $z = A\left(ax^{\rho} + by^{\rho}\right)^{\frac{m}{\rho}}$, tienen una elasticidad de sustitución *constante*, por lo que se llaman de esa forma: Funciones de Elasticidad de Sustitución Constante (del inglés, **CES**)

Cuando la función z es una función de producción, entonces:

- A, sirve como un indicador del estado de la tecnología.
- a y b son parámetros de distribución; tienen que ver con las participaciones del factor relativo en el producto.
- m determina el grado de homogeneidad de la función, es decir, el tipo de rendimiento de escala (compruebe que toda función CES es homogénea de grado m).
- ρ es el parámetro de sustitución.

Es interesante ver que si ρ = 1, los factores son perfectos sustitutos.
Si ρ → – ∞, en el límite se tiene una función de proporciones fijas (de Leontieff)
Si ρ → 0, en el límite se tiene una función tipo Cobb – Douglas.

Finalmente, es conveniente ver en un gráfico de curvas de nivel, que mientras mas pequeña sea la elasticidad de sustitución, mayor será la curvatura de la curva de nivel, lo que sugiere un estudio más detallado entre la elasticidad de sustitución y la segunda derivada de una variable con respecto a la otra, o lo es lo mismo, la derivada de la TMS. (Chiang y Wainwright, 2006)

CONCLUSIONES

El análisis de la elasticidad de la demanda, es un elemento esencial para la fijación de precios y las decisiones estratégicas referidas a las metas de participación de mercado establecidas para un producto o servicio. Al igual que los costos constituyen un punto de partida para ello, la elasticidad de la demanda respecto al precio puede ser la brújula que permita trazar el rumbo de esta decisión.

La base matemática conceptual de este elemento permiten realizar análisis más reales y de esta forma tomar decisiones más informadas, o sea, con menos riesgo.

Por otra parte, el conocimiento de la base matemática de las relaciones entre otras funciones básicas de una empresa, permite conocer la relación existente entre los costos marginales y los costos promedio, lo cual le establecerá las condiciones de competencia en que operará según el comportamiento de esta relación.

Y, también resulta del estudio de estas relaciones matemáticas entre variables, las que intervienen en el concepto de Elasticidad de Sustitución.

REFERENCIAS

Chiang, A., Wainwright, K. (2006) Métodos Fundamentales de Economía Matemática. 4ta. Edición, Ed. Mc Graw Hill Interamericana. México.

Perloff, J. Microeconomía. (2004). 3ra. Edición, Ed. Pearson Addison Wesley. Londres.

Simon, C., Blume, L. (1994). Mathematics for Economists. 1ra. Edición, Ed. Norton & Company, Inc. Manhattan.

Sydsaeter, K., Hammond, P. (2005). Matemáticas para el Análisis Económico. 1ra. Edición Ed. Félix Varela. La Habana

Varian, H. (1992) Análisis Microeconómico. 3ra. Edición, Ed. Antoni Bosch. Barcelona.

Varian, H. (1994) Microeconomía Intermedia. 3ra. Edición, Ed. Antoni Bosch. Barcelona.

Market in Cloud.(2015) La elasticidad de la demanda en el retail. Recuperado el 1 de marzo de 2015 a partir de http://marketincloud.com/la-elasticidad-de-la-demanda-en-el-retail/

Gerencie.com (2015) ¿Para qué nos sirve la elasticidad de la demanda? Recuperado el 27 febrero 2015 a partir de http://www.gerencie.com/para-que-nos-sirve-la-elasticidad-de-la-demanda.html

Recibido: Marzo 2015. **Aceptado:** Mayo 2015