

# Longitud de palabra, longitud hiperbólica y número de auto-intersección de curvas en superficies

Moira Chas<sup>1</sup> y Tomás Mejía (traductor)<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Stony Brook University, EEUU

<sup>2</sup>Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín, Colombia

**ABSTRACT.** Consider an oriented surface  $\Sigma$  with negative Euler characteristic, a minimal set of generators for the fundamental group of  $\Sigma$  and an hyperbolic metric with constant curvature  $-1$  on  $\Sigma$ . Each free homotopy class  $C$  of closed curves on  $\Sigma$  determines to three numbers : the word length (that is the number of letters needed to express  $C$  as a cyclic word on the generators and their inverses), the minimal number of self-intersections of a curve in  $C$ , and the geometric length. These three numbers can be explicitly computed (or approximated) by using a computer. In the first part of these notes, we will describe some relations existing between these numbers, and their statistical structure.

The second part of the notes is devoted to the description, from an elementary point of view, of a Lie algebra structure defined on the free  $\mathbb{Z}$ -module generated by the set of free homotopy classes of closed curves on a surface, as defined by Goldman in the eighties. This structure is defined by means of transverse intersection and composition of loops. We will focus on some relations between this algebra and the intersection and self-intersection structure of closed curves on a surface.

**Key words:** hyperbolic surfaces, geodesics, length, word length, intersection number, Goldman bracket.

**RESUMEN.** Consideremos una superficie orientable  $\Sigma$  con característica de Euler negativa, un conjunto minimal de generadores para el grupo fundamental de  $\Sigma$ , y una métrica de curvatura constante  $-1$  en  $\Sigma$ . Cada clase de homotopía (no basada)  $C$  de curvas cerradas orientadas en  $\Sigma$  determina tres números: la longitud de palabra (es decir, el mínimo número de letras necesarias para expresar a  $C$  como una palabra cíclica

en los generadores y sus inversas), el mínimo número de auto-intersección geométrica, y finalmente la longitud geométrica. Estos tres números pueden ser calculados explícitamente (o aproximados) usando una computadora. En la primera parte de estas notas describiremos relaciones entre estos números y su estructura estadística cuando la longitud se hace muy grande.

La segunda parte de estas notas esta dedicada a describir, desde un punto de vista elemental, una estructura de álgebra de Lie en el  $\mathbb{Z}$ -módulo libre generado por las clases de homotopía libre de curvas cerradas en una superficie, que fue definida por Goldman en los ochenta. Esta estructura se define mediante la intersección transversal y la composición de lazos. Nos concentraremos en particular en relaciones entre la mencionada álgebra de Lie y la estructura de intersección y autintersección de curvas cerradas en una superficie .

**Palabras clave:** superficies hiperbólicas, geodésicas, longitud geométrica, longitud de palabra, número de intersección, corchete de Goldman.

*2010 AMS Mathematics Subject Classification. Primary 57M50*

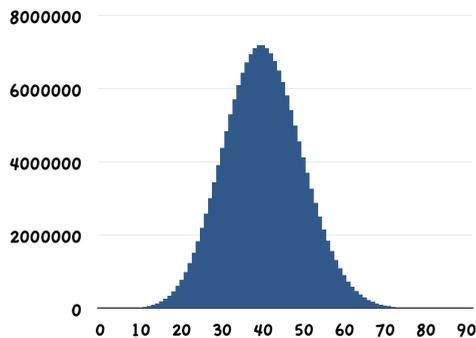
## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>79</b>
<b>2. Superficies: topología y geometría</b>	<b>80</b>
2.1. Topología: palabras de superficie . . . . .	80
2.2. Geometría: métricas hiperbólicas en superficies . . . . .	82
<b>3. Número de curvas cerradas en superficies: topología y geometría</b>	<b>83</b>
3.1. Clases de homotopía libre de curvas cerradas en superficies . . . . .	83
3.2. Topología: clases de homotopía libre de curvas y longitud de palabra . . .	84
<b>4. Auto-intersección de curvas cerradas en superficies</b>	<b>85</b>
4.1. Número de auto-intersección . . . . .	85
4.2. Número de auto-intersección y palabras de curvas . . . . .	86
<b>5. Relaciones entre la longitud de palabra y el número de auto-intersección</b>	<b>87</b>
<b>6. Número de geodésicas con una auto-intersección dada</b>	<b>89</b>
6.1. Crecimiento del número de geodésicas simples . . . . .	89
6.2. Número de geodésicas con auto-intersección mayor que cero . . . . .	91
<b>7. Estadísticas : longitud geométrica, de palabra y auto-intersección</b>	<b>92</b>

7.1. Muestreo de auto-intersección por longitud de palabra . . . . .	92
<b>8. El corchete de Goldman</b>	<b>94</b>
8.1. El $\mathbb{Z}$ -módulo de curvas . . . . .	94
8.2. El corchete de Goldman . . . . .	95
<b>9. La estructura de álgebra de Lie y número de intersección</b>	<b>99</b>
9.1. Número de intersección . . . . .	99
9.2. La estructura del álgebra de Lie de Goldman . . . . .	101

## 1. Introducción

La llegada de las computadoras ha permitido que se establezcan conjeturas por medio de la experimentación. Muchos patrones asociados a curvas en superficies pueden observados mediante cómputos. El patrón en la figura 1 es uno de éstos. En esta figura, se describe la distribución del número de auto-intersección de las clases de homotopía libre de curvas cerradas de longitud de palabra veinte en un toro con una punción (ver en la subsección 3.1 la definición de clase de homotopía libre, en la subsección 3.2 la de longitud de palabra y en la subsección 4.1 la número de auto-intersección). El histograma es, claramente, “casi” una distribución normal. Esto nos “dice” que si consideramos una población compuesta de todas las clases de homotopía libre del longitud de palabra veinte en el toro con una punción y escogemos una al azar, podemos calcular la probabilidad de que el número de auto- intersección sea un número dado.



**Figura 1.** Histograma de todas (cerca de 175,000,000) las clases de homotopía libre en el toro con una punción cuya longitud de palabra es  $L = 20$ , organizadas por número de auto-intersección. La media del número de auto-intersección es  $400/9 \sim 45$ .

Este figura llevó a la prueba [11] del siguiente resultado.

**1.1 Teorema.** En una superficie con frontera no vacía y característica de Euler negativa  $\chi$ , la proporción de palabras  $w$  con longitud de palabra  $L$  tales que

$$a < \frac{\text{SI}(w) - \kappa \cdot L^2}{\sigma L^{3/2}} < b$$

converge a  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  cuando  $L$  tiende a infinito, donde

$$\kappa = \frac{\chi}{3(2\chi - 1)} \text{ y } \sigma^2 = \frac{2\chi(2\chi^2 - 2\chi + 1)}{45(2\chi - 1)^2(\chi - 1)}$$

y donde  $\text{SI}(w)$  es el número mínimo de auto-intersecciones de representantes de  $w$  (ver sección 4.1). En otras palabras, cuando  $L$  es muy grande, la distribución de la auto-intersección de todas las clases de homotopía libre con longitud de palabra  $L$  se aproxima a una Gaussiana con media  $\kappa \cdot L^2$  y desviación estándar  $\sigma \cdot L^{3/2}$ .

**1.2 Observación.** El valor esperado del número de intersecciones de  $n$  cuerdas aleatorias en un círculo es  $\frac{n(n-1)}{6}$  y su varianza es  $\frac{n(n-1)(n+3)}{45}$ , [32, Capítulo 6] (aquí una cuerda aleatoria es determinada por dos puntos ubicados en la circunferencia de manera independiente y aleatoria, con distribución uniforme). Compárese con lo siguiente: el teorema 1.1 nos dice que cuando la característica de Euler  $\chi$  es muy grande (en valor absoluto), la media del número de auto-intersecciones de todas las clases con longitud de palabra  $L$  es cercana a  $\frac{L^2}{6}$  cuando  $L$  es grande, y la varianza es cercana a  $\frac{L^3}{45}$ .

## 2. Superficies: topología y geometría

### 2.1. Topología: palabras de superficie

En líneas generales, una superficie es un espacio tal que el paisaje alrededor de cada uno de sus puntos es como el plano euclídeo (más formalmente, una variedad compacta de dimensión dos). Una superficie con frontera es un espacio tal que el paisaje alrededor de cada uno de sus puntos es como el plano euclídeo o como el semi-plano superior  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } y \geq 0\}$ . Para definiciones precisas se puede encontrar, por ejemplo, en [19] (inglés) o [28] (castellano).

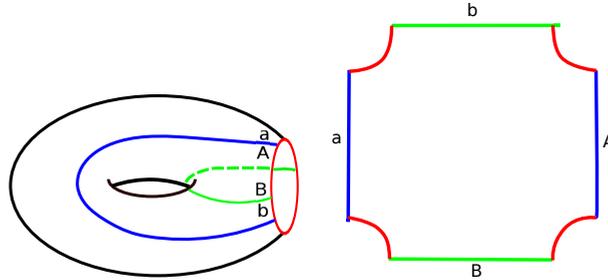
La definición de *característica de Euler* se puede encontrar en [23], ver también el ejercicio 2.1.1.

Consideremos una superficie orientable conexa  $\Sigma$  con frontera no vacía y característica de Euler negativa (hemos elegido trabajar con superficies con frontera para simplificar la discusión, pero varios aspectos discutidos en esta subsección pueden ser replicados para superficies cerradas). Consideremos un conjunto de arcos disjuntos de manera que :

- cada arco empiece y termine en la frontera,
- al remover la unión de los arcos la superficie siga siendo conexa (ver figura 2, izquierda),

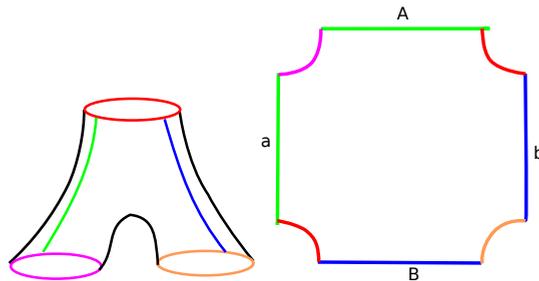
- c. la unión de los arcos sea maximal (con respecto a la inclusión) para las propiedades a. y b.

Nótese que la conexidad y la maximalidad implican que no puede ocurrir que dos de los arcos sean homotópicos mediante homotopías que mantengan los extremos en la frontera.

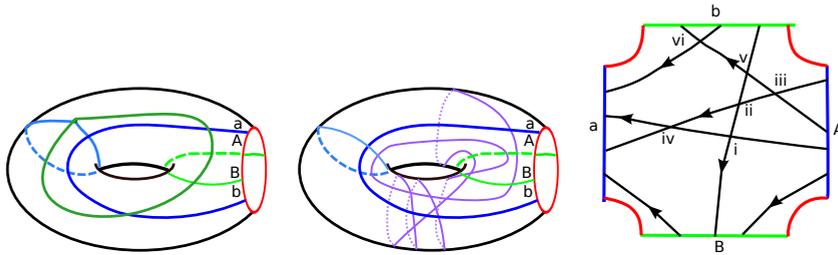


**Figura 2.** “Cortes” del toro.

Etiquetemos un lado de cada arco con la letra  $x$  y el otro lado con la letra  $\bar{x}$  (o  $X$  mayúscula; usaremos ambas notaciones indistintamente). La elección de arcos determina un conjunto minimal de generadores del grupo fundamental de  $\Sigma$ . En efecto, escojamos un punto base  $P$  en la superficie que esté en el complemento de los arcos elegidos. Un representante del generador etiquetado  $x$  es una curva que comienza en  $P$ , cruza el arco del lado etiquetado  $x$  al lado etiquetado  $\bar{x}$  y regresa a  $P$  sin cruzar ningún otro arco (ver figura 4, izquierda). Cortando la superficie a lo largo de estos arcos se obtiene un polígono en el que el número de lados es cuatro veces el número de generadores (ver figura 2). En la figura 2, las aristas están etiquetadas de manera alterna : una arista con etiqueta, luego una sin etiqueta). Leyendo las etiquetas de las aristas en orden cíclico se obtiene una palabra cíclica (*cíclica* significa que es cíclica salvo permutación). Esta es llamada la *palabra de superficie*. En el ejemplo de la figura 2 la palabra de superficie (escrita linealmente) es  $abAB$ . Otra escritura lineal de esta palabra es  $bABa$ , pero como palabras cíclicas son la misma (ver figura 6). En el ejemplo de la figura 3 la palabra de superficie (escrita linealmente) es  $aAbB$ .



**Figura 3.** “Cortes” del espacio de pantalones.



**Figura 4.** Dos representantes de generadores del grupo fundamental del toro con una componente de frontera y los correspondientes arcos etiquetados (izquierda), y un representante de la curva  $aaabaBB$  en el toro con una componente de frontera (medio) y en el “polígono”(derecha).

- 2.1.1 Ejercicio.** (a) Pruebe que, bajo las hipótesis de lo expuesto anteriormente, la característica de Euler de la superficie  $\Sigma$  es  $1 - n$ , donde  $n$  es el número de arcos escogidos.
- (b) Pruebe que el número (mínimo) de generadores del grupo fundamental de la superficie es  $n$ .

Nuestros ejemplos de un toro con una componente de frontera y el espacio de pantalones son excepcionales en el sentido en que hay (salvo isomorfismos obvios) una sola palabra de superficie para cada una de estas superficies. En general, más de una palabra de superficie puede corresponder a una misma superficie.

**2.1.2 Ejercicio.** En este ejercicio se piden palabras de superficie que deben ser *realmente* diferentes, es decir sin hacer la distinción entre  $x$  y  $X$ . Por ejemplo, las palabras  $abcABC$ ,  $AbcaBC$ ,  $bcaBCA$  no son *realmente* diferentes.

- (a) Encuentre dos (o más) palabras de superficie diferentes que correspondan a una superficie de género dos con una sola componente de frontera.
- (b) Encuentre dos (o más) palabras de superficie diferentes que correspondan a una superficie de género cero y cuatro componentes de frontera.

Hasta este punto no hemos usado el hecho de que una arista sea etiquetada en un lado con  $x$  y en el otro lado con  $\bar{x}$ . Ésto cobrará importancia cuando discutamos curvas en superficies. Veremos entonces que la palabra de superficie no sólo codifica la información topológica de la superficie (género y número de componentes de frontera) sino que también codifica implícitamente la estructura de la intersección de curvas en la superficie.

## 2.2. Geometría: métricas hiperbólicas en superficies

Una *métrica hiperbólica* en una superficie es una métrica con curvatura constante  $-1$ . Por una *superficie hiperbólica* nos referimos a una superficie con característica de Euler negativa y con una métrica hiperbólica completa (en el sentido en que toda sucesión

de Cauchy tiene límite), tal que si la superficie tiene frontera no vacía, entonces todas las componentes de frontera son geodésicas (ver [19] para la definición de geodésicas). Usualmente supondremos que la superficie es compacta, pero algunas de las afirmaciones de abajo admiten que dicha superficie hiperbólica posea finitas punciones. En este caso la métrica hiperbólica tiene que ser incrementada para recuperar la completitud. Cada punción produce un extremo con forma de cuerno infinitamente largo.

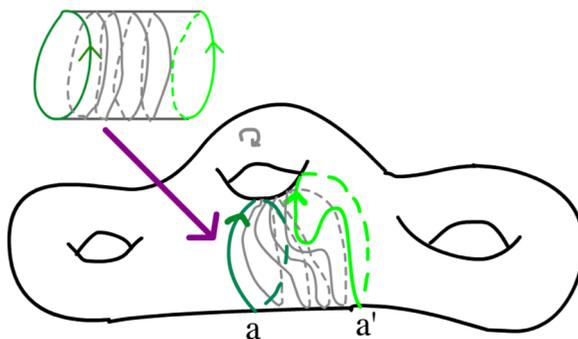
Si el polígono en la figura 2 se dibuja en el plano hiperbólico con ángulos rectos y con las condiciones de longitud naturales, entonces pueden pegarse los lados para obtener un toro con frontera suave geodésica. De manera similar pueden ser obtenidas las superficies cerradas y otras superficies con frontera con una métrica hiperbólica; para más detalles, véase [5, Capítulo 3].

### 3. Número de curvas cerradas en superficies: topología y geometría

#### 3.1. Clases de homotopía libre de curvas cerradas en superficies

Estamos interesados en estudiar clases de equivalencia de curvas cerradas dirigidas en la superficie  $\Sigma$  salvo deformación continua. Considere dos curvas cerradas orientadas  $a$  y  $b$  en  $\Sigma$ , esto es, dos aplicaciones  $a$  y  $b$  del círculo orientado en  $\Sigma$ . Las curvas  $a$  y  $b$  se dicen *libremente homotópicas* si existe una aplicación de un cilindro  $C$  a  $\Sigma$  tal que la restricción de esta aplicación a una de las componentes de frontera (orientadas) de  $C$  coincide con  $a$  y la restricción a la otra coincide con  $b$  (ver la figura 5)

El conjunto de clases de equivalencia bajo esta relación es el conjunto de *clases de homotopía libre de curvas cerradas en  $\Sigma$* , y será denotado por  $\pi_0$ .



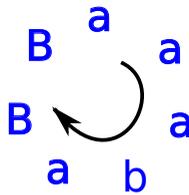
**Figura 5.** Una homotopía (libre) entre las curvas  $a$  y  $a'$ .

Existe una biyección natural entre  $\pi_0$  y el conjunto de componentes del espacio de aplicaciones del círculo a  $\Sigma$ , con la topología compacto-abierta. Ésta es la razón por la cual el conjunto de clases de homotopía libre es denotado por  $\pi_0$ . (Observar que  $\pi_0$  es  $\pi_0$  del espacio de aplicaciones del círculo a  $\Sigma$ , no  $\pi_0$  de  $\Sigma$ ). Esto es válido para espacios más generales que superficies, en específico, espacios arco-conexos. Aquí damos otra interpretación de  $\pi_0$  (ver [8]), que es válida en el contexto de espacios arco-conexos.

**3.1.1 Ejercicio.** Pruebe que hay una biyección natural entre  $\pi_0$  y el conjunto de componentes del espacio de aplicaciones del círculo a  $\Sigma$ , con la topología compacto-abierta.

### 3.2. Topología: clases de homotopía libre de curvas y longitud de palabra

Consideremos un representante de una clase de homotopía libre de curvas que intersecte la unión de los arcos en el menor número posible de puntos (las intersecciones se cuentan con multiplicidad). La clase de homotopía libre es etiquetada por una palabra cíclica reducida obtenida al llevar registro de los arcos (y lados) que la curva atraviesa a medida que se recorre la curva dirigida. (*Cíclica* quiere decir que las palabras se consideran salvo permutación cíclica, *reducida* significa que ninguna letra  $x$  y su inversa  $\bar{x}$  aparecen consecutivamente en la palabra, o alguna permutación cíclica de la palabra). En la figura 6 se exhibe un ejemplo de una palabra cíclica reducida, y en la figura 4, un representante de la palabra reducida de la figura 6 en el toro con una componente de frontera.



**Figura 6.** Una palabra cíclica reducida.

La clase de la curva en la figura 4 (derecha) es etiquetada con la palabra cíclica  $aaabaBB$  (observe que  $aaabaBB$  es una *palabra de curva*, en contraste con las *palabras de superficie* como por ejemplo  $abAB$ , que se asoció al toro con una componente de frontera). Por el ejercicio 3.1.1, la palabra cíclica  $aaabaBB$  etiqueta una clase de conjugación del grupo fundamental de  $\Sigma$ . Dado que el grupo fundamental de una superficie con frontera es un grupo libre, los elementos de éste pueden pensarse como palabras reducidas en los generadores y sus inversas, mientras que las clases de conjugación pueden pensarse como palabras cíclicas reducidas.

De esta manera, una vez que se haya elegido un conjunto de generadores del grupo fundamental, se puede asociar a cada clase de homotopía libre un entero positivo: el número de letras de la palabra más corta en la clase de conjugación.

El siguiente resultado no es difícil de probar.

**3.2.1 Proposición.** Sea  $\Sigma$  una superficie cuyo grupo fundamental es libre de rango  $d$ . El número total  $N(L)$  de clases de homotopía libre de longitud de palabra  $L$  es asintótico a  $(2d - 1)^L/L$ . Más explícitamente,  $\frac{(2d-1)^L/L}{N(L)} \rightarrow 1$  cuando  $L \rightarrow \infty$ .

#### 4. Auto-intersección de curvas cerradas en superficies

##### 4.1. Número de auto-intersección

A cualquier clase de curvas se le asocia naturalmente un número no negativo, el *número de auto-intersección*. Éste es el número de veces más pequeño que algún representante de la clase se cruza a sí mismo. Por ejemplo, el número de auto-intersección de las curvas en la figura 7 es 3. El *número de auto-intersección de una clase de homotopía libre de curvas*  $w$ , denotado por  $SI(w)$ , es el mínimo de todos los números de auto-intersección de curvas en  $w$ . En la figura 7, se exhiben tres representantes de la misma clase de homotopía libre. El número de auto-intersección de la clase es 3 (más adelante daremos una idea de por qué 3 es la respuesta).

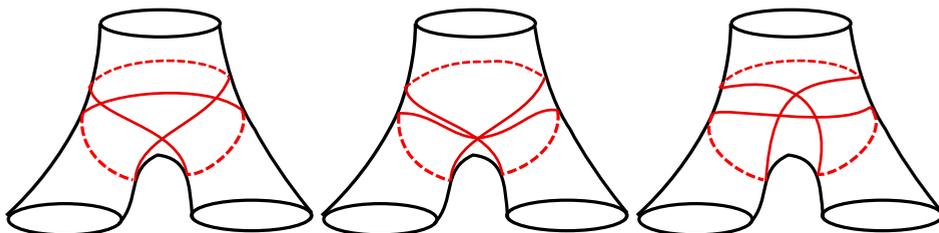


Figura 7. Tres representantes de la clase de homotopía libre en los pantalones.

**Nota :** Cada clase libre de homotopía tiene un único representante que es una geodésica (ver [15])

**4.1.1 Teorema** ([15]). *En una superficie que admite una métrica hiperbólica, el número de auto-intersección del representante geodésico de una clase libre de homotopía es igual al número de auto-intersección de la clase. En otras palabras, el número de auto-intersección de la geodésica es el mínimo número posible para cualquier representante.*

El teorema 4.1.1 fue notado por Poincaré para el caso de auto-intersección cero. En el caso general, éste resultado es consecuencia de [17, Teorema 2], donde se afirma que una curva  $a$  que tiene número de auto-intersección más grande que el mínimo, tiene un *bígono singular* o un *monógono singular* (las palabras “bígono” y “monógono” se usan para referirse a polígonos de dos lados o un lado respectivamente). Un *bígono singular* consiste de un par de arcos disjuntos del círculo cuyos extremos son enviados por  $a$  a los mismos puntos y sus imágenes encierran un disco (no necesariamente embebido) en la superficie. Ahora bien, nótese que si una curva tiene un bígono singular, entonces no habrá dos levantamientos de esta curva a la cubierta universal que encierren un bígono. Pero en la cubierta universal estos levantamientos son líneas rectas, y hay una única línea que pasa a través de cada par de puntos. Luego tendríamos una contradicción si el representante geodésico no tuviese el mínimo número de auto-intersecciones.

**4.1.2 Observación.** El hecho de que una geodésica realiza el mínimo número de intersección muestra de nuevo cuán entrelazados están el universo combinatorio y el universo geométrico.

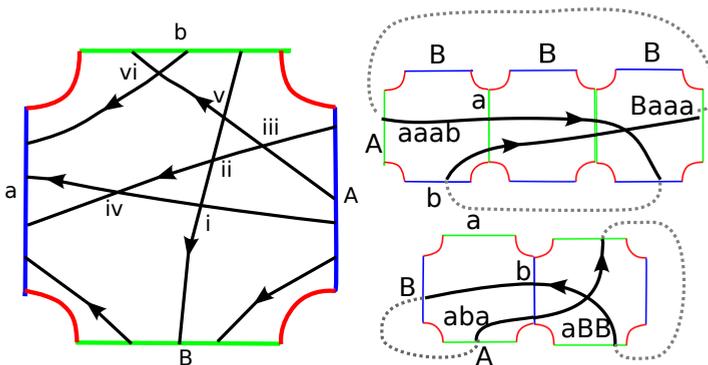
Hemos visto que se pueden asociar tres números a una clase de homotopía libre de curvas cerradas  $w$ : el número de auto-intersección  $SI(w)$ , la longitud de palabra  $WL(w)$  (suponiendo una elección dada de un conjunto de generadores para el grupo fundamental), y la longitud geométrica  $GL(w)$  (suponiendo una elección de una métrica hiperbólica en la superficie).

**4.1.3 Observación.** La clase de homotopía libre en la figura 7 presenta una característica muy interesante: el único “dibujo” que puede lograrse con un representante geodésico es el de la izquierda. Esto fue notado por Hass y Scott en [18], donde ellos dieron la siguiente prueba, debida a Agol. Si la curva de la derecha es el “dibujo” de una geodésica, entonces la superficie menos la curva tiene cinco componentes conexas; los tres “puños” (siguiendo con el lenguaje textil ahora que hablamos de pantalones), un triángulo y un hexágono. No es difícil ver que la suma de los ángulos interiores del hexágono equivale a  $6\pi$  menos el doble de la suma de los ángulos interiores del triángulo. Por otro lado, en geometría hiperbólica, la suma de los ángulos interiores del hexágono es menor que  $4\pi$ . Esto implica que la suma de los ángulos interiores del triángulo es mayor que  $\pi$ , una contradicción, dado que en geometría hiperbólica, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor que  $\pi$ . (La noción precisa de “dibujo” (picture) está dada en [18]).

**4.2. Número de auto-intersección y palabras de curvas**

Birman y Series [3] hallaron un algoritmo para determinar si una clase de homotopía libre (dada como una palabra cíclica reducida) de curvas en una superficie con frontera es *simple*, es decir, tiene número de auto-intersección 0. Cohen y Lustig [12] extendieron el método de Birman y Series para estudiar el número de intersección de una clase en una superficie con frontera. Lustig [24], usando argumentos análogos (aunque más intrincados), dio un algoritmo para determinar números de auto-intersección en una superficie cerrada.

**4.2.1 Observación.** A pesar de que los números de auto-intersección dependen únicamente de la topología de la superficie, las pruebas de algoritmo de Cohen-Lustig-Birman-Series usan geometría hiperbólica.



**Figura 8.** Un representante de la clase  $aaabaBB$  en el toro con una componente de frontera.

No explicaremos el algoritmo aquí pero mediante el siguiente ejemplo daremos una idea aproximada de una forma equivalente del algoritmo de Birman-Series-Cohen-Lustig que aparece en [6]. El “input” del algoritmo es una palabra de superficie y una palabra de curva en el alfabeto apropiado. El “output” es el número de auto-intersecciones de la clase de homotopía libre determinada por la palabra de curva.

**4.2.2 Ejemplo.** Consideremos el toro con una componente de frontera, y el representante de la palabra palabra cíclica  $aaabaBB$  en la figura 8. El punto de auto-intersección etiquetado  $i$  en la figura 8 está en la intersección del arco de la curva que va desde la arista etiquetada  $b$  hasta la arista etiquetada  $B$ , y el arco de la curva que va desde la arista etiquetada  $A$  hasta la arista etiquetada  $a$ . La primera arista corresponde a la sub-palabra  $BB$  de la palabra cíclica original  $aaabaBB$ , y la segunda arista corresponde a la segunda ocurrencia de la sub-palabra  $aa$  en  $aaabaBB$ . El lado derecho de la figura 8 es una ilustración de otro tipo de par de sub-palabras que tiene como consecuencia una intersección.

Nótese que el punto de intersección no depende de las propiedades “globales” de la palabra. De hecho, cualquier palabra que contenga las sub-palabras  $BB$  y  $aa$  tendrá un punto de auto-intersección en arcos análogos. En general, hay una correspondencia uno-a-uno entre las ocurrencias de ciertos pares de sub-palabras y los puntos de auto-intersección de un representante de una clase (que se interseca a sí mismo en el mínimo número posible de puntos). Los pares de sub-palabras de  $aaabaBB$  que corresponden a los puntos de auto-intersección de representantes minimales están listados en el cuadro 1.

	Par de sub-palabras
i	$aa, BB$
ii	$aa, BB$
iii	$aab, Baa$
iv	$Baaa, aaab$
v	$aba, aBB$
vi	$aba, BBa$

**Cuadro 1.** Pares de subpalabras de la palabra  $aaabaBB$  que determinan puntos de auto-intersección. Las etiquetas  $i, ii, \dots, vi$  corresponden a la figura 8.

**4.2.3 Observación.** Los pares de sub-palabras que determinan el número de auto-intersección de una curva dependen únicamente de la palabra de superficie. Por ejemplo, la palabra de curva  $aaabaBB$  tiene auto-intersección 7 en el toro con una componente de frontera asociado a la palabra de superficie  $abAB$  (figura 8) y auto-intersección 5 en el espacio de pantalones asociado a la palabra de superficie  $aAbB$ .

## 5. Relaciones entre la longitud de palabra y el número de auto-intersección

El algoritmo de Birman-Cohen-Lustig, o su forma equivalente [6] pueden ser implementados en un computador. Esto se hizo, dando lugar a los resultados que aparecen en las

figuras a continuación. En dichas tablas se organizan palabras cíclicas por longitud de palabra y auto-intersección. Más precisamente, denotemos por  $P(K, L)$  el número de clases de homotopía libre de curvas no dirigidas que no son potencias en el espacio de pantalones y con longitud de palabra  $L$  y número de auto-intersección  $K$  (nótese que hay exactamente el doble de curvas dirigidas que no dirigidas).

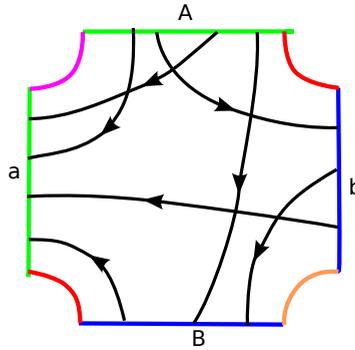


Figura 9. Un representante minimal de la clase  $aaabaBB$  en los pantalones.

Por ejemplo, en los pantalones con palabra de superficie  $aAbB$  hay exactamente dos clases de homotopía libre de curvas no dirigidas que no son potencias y con longitud de palabra uno y auto-intersección cero, precisamente  $a$  y  $b$ . En este caso,  $P(0, 1) = 2$ . De modo similar, hay una sola clase de homotopía libre de curvas no dirigidas que no es potencia con longitud de palabra 2 y auto-intersección 1, la “figura ocho”,  $aB$ . Entonces  $P(1, 2) = 1$ .

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	5	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	2	10	8	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	6	17	14	13	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	2	12	28	34	38	22	8	8	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	6	20	46	76	79	50	52	40	20	12	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	2	12	32	84	140	146	140	158	134	98	66	40	24	6	6	2	2	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	6	20	52	146	226	264	330	371	358	339	274	206	120	91	72	33	22	6	4	0
11	0	0	0	0	0	2	12	32	92	232	354	480	638	782	866	878	856	694	538	522	388	264	188	100	62
12	0	0	0	0	0	0	6	20	52	156	345	550	818	1116	1502	1818	1998	2080	1944	1888	1786	1482	1314	1032	716
13	0	0	0	0	0	0	2	12	32	92	244	506	852	1298	1888	2670	3374	4042	4458	4716	5078	4966	4768	4620	3974
14	0	0	0	0	0	0	0	6	20	52	156	360	737	1282	1989	3056	4443	5836	7369	8750	10054	11208	12055	12744	12822
15	0	0	0	0	0	0	0	2	12	32	92	244	524	1076	1870	3010	4738	7002	9602	12542	15784	19132	22398	25930	28954
16	0	0	0	0	0	0	0	0	6	20	52	156	360	758	1548	2686	4449	7092	10664	15032	20370	26594	33450	41478	50056
17	0	0	0	0	0	0	0	0	2	12	32	92	244	524	1100	2184	3840	6426	10328	15798	22666	31656	42538	55416	71432
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	20	52	156	360	758	1576	3050	5418	9116	14754	22761	33298	47451	65244	87852
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	12	32	92	244	524	1100	2216	4256	7550	12724	20718	32110	47774	69124	97002
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	20	52	156	360	758	1576	3086	5891	10412	17544	28578	44654	67144	98324

Cuadro 2. En la fila  $L$ , columna  $K$ , tenemos a  $P(K, L)$ , el número de clases de homotopía libre de curvas cerradas (no dirigidas) que no son potencias, en el espacio de pantalones, y tales que la longitud de la palabra es  $L$  y la auto-intersección es  $K$ .

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	5	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	8	4	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	4	8	16	20	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	12	8	16	24	56	12	28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	8	12	26	38	58	78	68	52	45	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	12	16	32	60	72	120	192	104	188	68	152	24	52	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	8	16	36	84	136	166	246	314	322	350	350	274	232	180	112	80	34	0	0	0	0	0	0
11	20	24	40	80	136	292	332	600	640	684	804	684	1024	488	852	264	536	132	296	40	84	0	0
12	8	20	52	104	184	330	524	704	1022	1348	1544	1790	1933	1896	1908	1806	1636	1410	1138	904	654	480	340
13	24	24	52	132	228	376	608	1040	1248	2232	2376	3524	3488	4484	4452	4664	5268	3992	5196	2880	4368	1876	3308
14	12	40	68	132	252	464	778	1290	1916	2624	3736	4992	6210	7670	9000	10234	11214	11886	12186	11818	11436	10788	9704
15	16	40	84	152	284	524	904	1444	2484	3580	4948	7380	8936	12700	13674	19420	19184	26108	24908	30180	29224	30628	31308
16	16	24	60	176	340	596	1072	1774	2808	4432	6600	9286	13138	17410	22406	28488	34735	41928	49332	56258	62838	68250	73080
17	32	48	80	184	356	708	1180	1992	3140	4904	8224	11700	17832	23620	32384	41108	52236	67324	77952	101244	106908	138092	136448
18	12	36	108	204	392	712	1272	2208	3816	6118	9382	14524	21072	29640	41840	56552	74910	97174	123214	152678	184688	219860	256646
19	36	32	92	240	448	840	1424	2612	4108	7080	10564	16408	25160	36272	53612	72332	102576	128732	177452	214540	281348	336756	415164
20	16	40	88	216	472	884	1632	2824	4704	7694	12434	19224	29104	43590	63098	89990	125784	171134	229774	301350	388639	492738	614798

**Cuadro 3.** En la fila  $L$ , columna  $K$ , tenemos a  $P(K, L)$ , el número de clases de homotopía libre de curvas cerradas (no dirigidas) que no son potencias, en el **toro con una punción**, y tales que la longitud de la palabra es  $L$  y la auto-intersección es  $K$ .

Las figuras 2 y 3 exhiben muchos patrones. En la subsección 7.1 discutiremos acerca uno de estos patrones.

### 6. Número de geodésicas con una auto-intersección dada

#### 6.1. Crecimiento del número de geodésicas simples

Para cada entero no-negativo  $K$ , denotemos por  $\mathcal{C}_\Sigma(L, K)$  al cardinal del conjunto de geodésicas en  $\Sigma$  con número de auto-intersección  $K$  y longitud geométrica a lo sumo  $L$ .

Por mucho tiempo, muchos investigadores intentaron determinar el crecimiento de  $\mathcal{C}_\Sigma(L, 0)$ . En 1985, Birman y Series [4] probaron que la unión de todas las geodésicas cerradas forma un conjunto muy “delgado”, más precisamente se tiene el resultado siguiente :

**6.1.1 Teorema.** *Para cada entero no-negativo  $k$ , el conjunto  $S_k$  de puntos en una superficie hiperbólica que yacen en una geodésica completa con número de auto-intersección a lo sumo  $k$  es nunca denso y tiene dimensión de Hausdorff uno.*

Para curvas simples, el teorema 6.1.1 fue observado por primera vez por Bill Thurston a mediados de los años setenta.

Birman y Series afirmaron que el número de geodésicas simples de longitud a lo sumo  $L$  está acotado por un polinomio de grado  $6g + 2b - 6$ , donde  $g$  y  $b$  son el género y el número de componentes de frontera de la superficie respectivamente.

En 2001, Rivin [30] probó lo siguiente

**6.1.2 Teorema.** *Sea  $\Sigma$  una superficie hiperbólica con género  $g$ ,  $b$  componentes de frontera y  $c$  punciones. Entonces existen constantes  $c(\Sigma)$  y  $d(\Sigma)$  tales que*

$$c(\Sigma) \cdot L^{6g+2b+2c-6} \leq \mathcal{C}_\Sigma(L, 0) \leq d(\Sigma) \cdot L^{6g+2b+2c-6}.$$

En su tesis doctoral [25] (ver también [26]), Mirzakhani probó lo siguiente

**6.1.3 Teorema.** *Sea  $\mathcal{M}_{g,n}$  el espacio moduli de superficies de Riemann hiperbólicas de género  $g$  con  $n$  cuernos. Entonces*

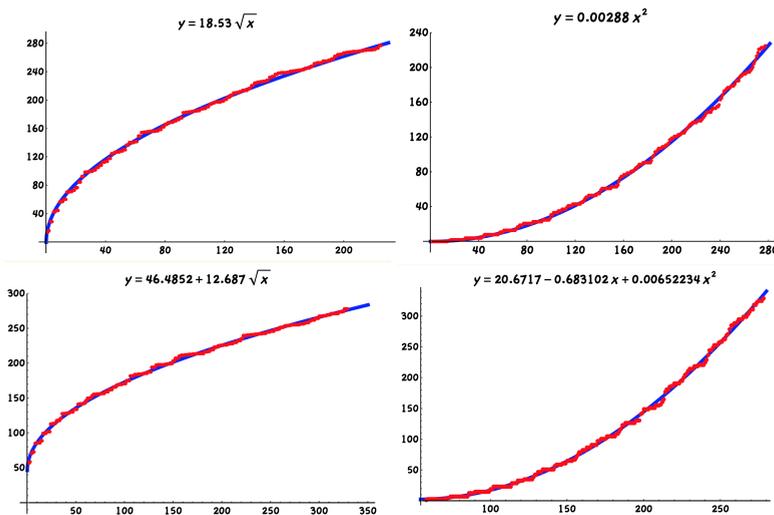
$$\mathcal{C}_{\Sigma}(L, 0) \sim c(\Sigma)L^{6g+2n-6}$$

donde  $c: \mathcal{M}_{g,n} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua y propia. (Recuerde que  $\sim$  quiere decir asintótico).

Mirzakhani también calculó el coeficiente del término de mayor grado.

El teorema 6.1.3 es parte del trabajo por el que Mirzakhani recibió la Medalla Fields en el año 2014. Otra parte se ocupa de flujos en espacios de Teichmüller de todas las superficies hiperbólicas con una topología fija, ver por ejemplo [1].

**6.1.4 Ejemplo.** Ilustramos el teorema 6.1.3 como sigue. En un toro con una cierta métrica hiperbólica, consideramos el conjunto de todas las geodésicas con longitud geométrica hasta 280. De este conjunto seleccionamos, usando el algoritmo descrito en la subsección 4.2, todas las geodésicas simples cerradas y calculamos la longitud geométrica de cada una de ellas. En esta métrica hay 225 geodésicas simples con longitud hasta 280. Ordenamos las longitudes de estas 225 geodésicas de mayor a menor:  $\{l_1, l_2, \dots, l_{225}\}$ .



**Figura 10.** Arriba a la izquierda: los puntos de la forma  $(i, l_i)$  del ejemplo 6.1.4 y la gráfica de la función  $g(x) = 18,53\sqrt{x}$ . Arriba a la derecha: los puntos de la forma  $(n, \mathcal{C}_{\Sigma}(n, 0))$  y la función  $f(x) = 0,00288x^2$ . Abajo a la izquierda: los puntos de la forma  $(i, l_i)$  del ejemplo 6.2.2 y la gráfica de la función  $g(x) = 46,4852 + 12,687\sqrt{x}$ . Abajo a la derecha: los puntos de la forma  $(n, \mathcal{C}_{\Sigma}(n, 1))$  y la función  $f(x) = 20,6717 - 0,683102x + 0,00652234x^2$ .

En la figura 10 graficamos los puntos de la forma  $(i, l_i)$  para cada  $i$  en  $\{1, 2, \dots, 225\}$ .

Definamos la función  $F(L) = \mathcal{C}_\Sigma(L, 0)$ , esto es,  $F(L)$  es el número de geodésicas simples en nuestro toro hiperbólico con longitud a lo sumo  $L$ .

Por el Teorema de Mirzakhani 6.1.3, esta función es asintótica a  $c(\Sigma)L^2$ . Si “pretendemos” que  $F(L) = c(\Sigma)L^2$ , entonces  $F^{-1}(i) = l_i$ , dado que  $i$  es el número de geodésicas simples de longitud a lo sumo  $l_i$ . Luego el conjunto de puntos de la forma  $(i, l_i)$  puede ser aproximado por una función  $g(x) = d \cdot \sqrt{x}$  para alguna constante  $d$ . Aproximamos esta constante por mínimos cuadrados y obtuvimos un valor de 18,53. La función  $g(x) = 18,53\sqrt{x}$  junto con los puntos está graficada en la figura 10.

Observemos que el resultado de Mirzakhani es asintótico, así que no es un “hecho” que siempre se pueda obtener una buena aproximación como la que mostramos en la figura 10.

**6.1.5 Observación.** El espacio de pantalones tiene un número finito de geodésicas con cada auto-intersección fija. Por lo tanto, un análisis similar al del ejemplo 6.1.4 no dará resultados interesantes.

## 6.2. Número de geodésicas con auto-intersección mayor que cero

Usando el enfoque de Mirzakhani, Rivin [31] probó:

**6.2.1 Teorema.** *Existe una constante  $c(\Sigma)$  dependiente de la estructura hiperbólica en  $\Sigma$  tal que:*

$$\mathcal{C}_\Sigma(L, 1) \sim c(\Sigma)L^{6g+2n-6}.$$

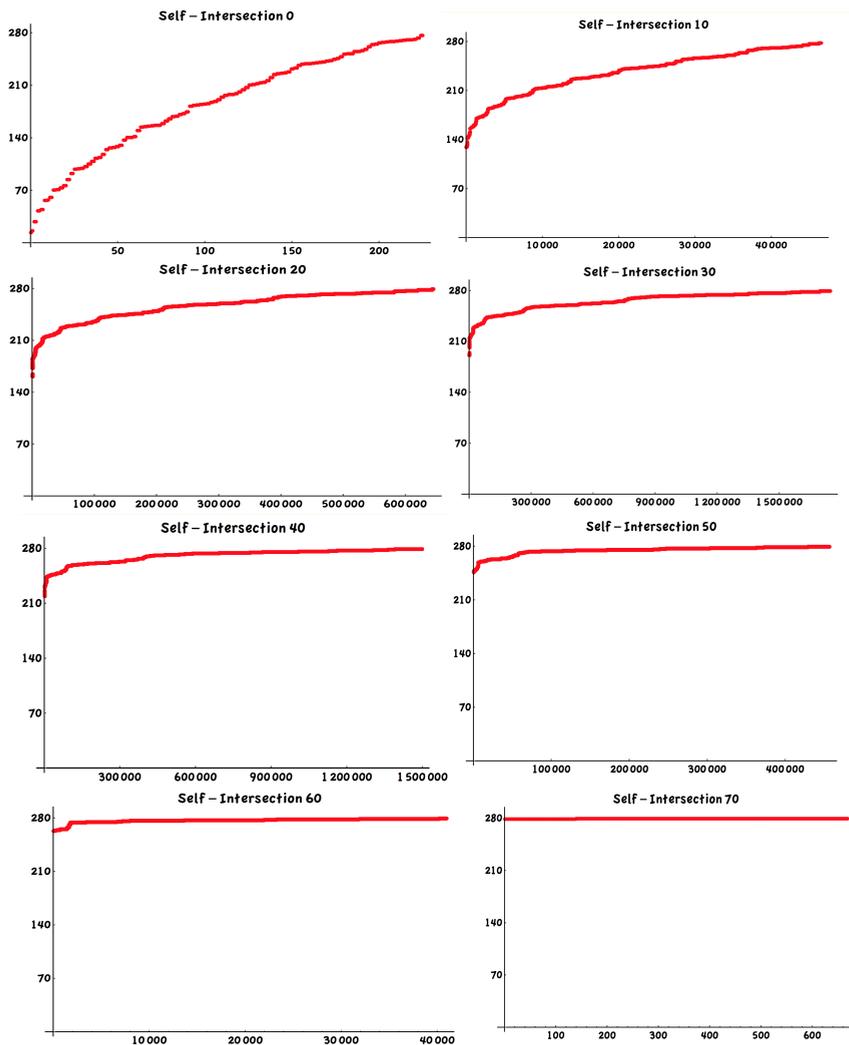
**6.2.2 Ejemplo.** Retomemos los cálculos que del ejemplo 6.1.4, pero ahora considerando geodésicas con auto-intersección uno. Hay 329 geodésicas con auto-intersección uno y longitud menor a 280, ver la figura 10. También repetimos los cálculos que hicimos en el ejemplo 6.1.4 considerando geodésicas con número de auto-intersección 10, 20, 30, 40, 50, 60 y 70. Los resultados se muestran en la figura 11. Observe que en esa figura, la escala del eje  $x$  varía considerablemente, dado que el número de geodésicas con un número de intersección fijo y hasta una cierta longitud, también varía considerablemente. Más aún, una consecuencia de [2, Theorem 1.1], es que una geodésica con número de auto-intersección “grande”, digamos 70, tiene que ser “suficientemente larga”. En nuestro ejemplo, hay alrededor de 600 geodésicas cerradas con número de auto-intersección 70 y longitud geométrica a lo sumo 280. La más corta tiene longitud 279,227 aproximadamente.

Los resultados anteriores, así como también los experimentos computacionales, sugieren que el crecimiento del número de geodésicas con número de auto-intersección dada es el mismo que el crecimiento de las geodésicas (pero el coeficiente del término de mayor grado es distinto). Este resultado fue probado recientemente (ver [27], [13]).

Fijemos ahora una superficie hiperbólica  $\Sigma$  y sea  $G(K, L)$  el número de geodésicas cerradas con número de auto-intersección  $K$  y longitud geométrica a lo sumo  $L$ .

**6.2.3 Teorema.** *Para cada superficie hiperbólica de género  $g$  con  $b$  componentes de frontera geodésicas y  $p$  punciones, y para cada  $K$ , la sucesión  $G(K, L)/L^{6g+2b+2p-6}$  converge a un número positivo  $d_K$  cuando  $L$  tiende al infinito.*

**6.2.4 Conjetura.** La sucesión  $\{d_K\}$  en el teorema 6.2.3 crece exponencialmente con  $K$ .



**Figura 11.** Para cada  $s \in \{0, 10, \dots, 70\}$ , ordenamos (de menor al mayor) las longitudes de las  $n(s)$  geodésicas con auto-intersección  $s$  y longitud geométrica a lo sumo 280,  $\{l_1, l_2, \dots, l_{n(s)}\}$ , y graficamos los puntos de la forma  $(i, l_i)$ .

## 7. Estadísticas : longitud geométrica, de palabra y auto-intersección

### 7.1. Muestreo de auto-intersección por longitud de palabra

La figura 12 muestra el histograma de todas las clases de homotopía libre que no son potencias en el toro con una punción, con longitud de palabra 4, 6, 8,  $\dots$ , 20, organizadas por número de auto-intersección. Los histogramas se representan a escala. Éstos sugieren que la distribución del muestreo de auto-intersección por longitud de palabra (apropiadamente normalizado) converge a una Gaussiana cuando la longitud de palabra tiende a infinito.

Probamos este resultado en conjunto con Steve Lalley [11]:

**Teorema A.** *En una superficie con frontera no vacía y característica de Euler  $\chi$ , la proporción de palabras  $w$  con longitud de palabra  $L$  tales que*

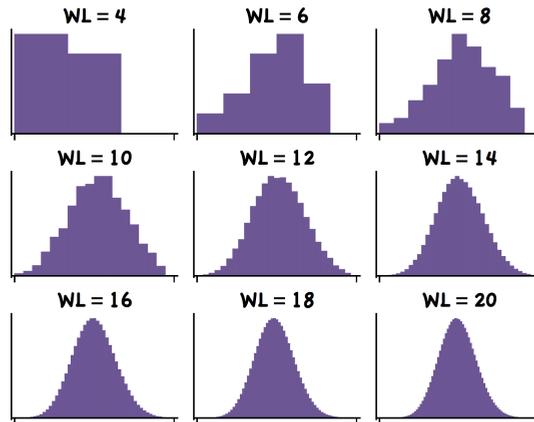
$$a < \frac{\text{SI}(w) - \kappa \cdot L^2}{\sigma L^{3/2}} < b$$

*converge cuando  $L$  tiende al infinito a  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ , donde*

$$\kappa = \frac{\chi}{3(2\chi - 1)} \text{ y } \sigma^2 = \frac{2\chi(2\chi^2 - 2\chi + 1)}{45(2\chi - 1)^2(\chi - 1)}.$$

*En otras palabras, cuando  $L$  es muy grande, la distribución de la auto-intersección de todas las clases de homotopía libre de longitud de palabra  $L$  se acerca a una Gaussiana con media  $\kappa \cdot L^2$  y desviación estándar  $\sigma \cdot L^{3/2}$ .*

**7.1.1 Observación.** Note que con longitud de palabra tan pequeña como 20 obtenemos un histograma que luce fuertemente como una Gaussiana. Desde luego, la población en este caso es extremadamente grande.



**Figura 12.** Histogramas de clases de homotopía libre de curvas cerradas en el toro punción con diferentes longitudes de palabra fija, organizadas por auto-intersección.

Recordamos ahora la observación hecha en la introducción.

**7.1.2 Observación.** El valor esperado de la intersección de  $n$  cuerdas aleatorias en un círculo es  $\frac{n(n-1)}{6}$  y la varianza es  $\frac{n(n-1)(n+3)}{45}$ , [32, Capítulo 6] (aquí una cuerda aleatoria es determinada por dos puntos colocados en la circunferencia de forma independiente y aleatoria, con distribución uniforme). Compare con lo anterior: cuando la característica de Euler  $\chi$  es muy grande, la media de las auto-intersecciones de todas las clases con longitud de palabra  $L$  es cercana a  $\frac{L^2}{6}$  cuando  $L$  es grande, y la varianza es cercana a  $\frac{L^3}{45}$ .

**7.1.3 Observación.** En el caso del espacio de pantalones y el toro con una componente de frontera, la media de la auto-intersección de todas las clases con longitud de palabra  $L$  es aproximadamente  $\frac{L^2}{9}$  para  $L$  grande, mientras que la auto-intersección máxima es aproximadamente  $\frac{L^2}{4}$ .

## 8. El corchete de Goldman

### 8.1. El $\mathbb{Z}$ -módulo de curvas

Fijemos una superficie  $\Sigma$  con o sin frontera, posiblemente no compacta. Nos interesamos ahora en las clases de homotopía libre de curvas, como se definió en la sección 3.1. Las letras minúsculas  $a, b, c, \dots$  se utilizarán para denotar curvas; las letras mayúsculas  $A, B, C, \dots$  denotarán clases de homotopía libre de curvas. La clase del lazo trivial es denotada por  $\circ$ . Si  $x$  es una curva,  $\mathcal{FH}(x)$  denota su clase de homotopía libre y  $\bar{x}$  la curva  $x$  recorrida en dirección reversa. Además, para cada entero positivo  $n$ ,  $x^n$  es la curva que recorre  $n$  veces a  $x$  en la misma dirección.

Recordemos que  $\pi_0$  denota al **conjunto** de clases de homotopía libre de  $\Sigma$  (ver subsección 3.1 para una discusión de esta notación). El objetivo de la negrilla en “conjunto” es enfatizar el hecho de que no hay a priori una estructura algebraica obvia en  $\pi_0$ , en contraste con la célebre estructura que Poincaré encontró para el conjunto de clases de homotopía (basadas) de curvas cerradas en un espacio, el grupo fundamental.

El módulo libre de combinaciones lineales sobre el anillo de los enteros con base  $\pi_0$  se denota  $\mathbb{Z}[\pi_0]$ . Luego un elemento de  $\mathbb{Z}[\pi_0]$  es una expresión lineal formal en clases de homotopía libre con coeficientes enteros. Un ejemplo de dicha combinación lineal utilizando la notación definida anteriormente es

$$3\mathcal{FH}(a) - \mathcal{FH}(\bar{a}) + \circ + 7B + \mathcal{FH}(a^3).$$

Nótese que la clase del lazo trivial no es cero; en símbolos,  $\circ \neq 0$ . Además, si  $a$  es cualquier curva entonces en general  $\mathcal{FH}(\bar{a}) \neq -\mathcal{FH}(a)$  y  $\mathcal{FH}(a^3) \neq 3\mathcal{FH}(a)$ . Más aún,  $\circ, \mathcal{FH}(a), \mathcal{FH}(\bar{a})$  y  $\mathcal{FH}(a^3)$  son en general miembros distintos de la base  $\pi_0$ .

**8.1.1 Ejercicio.** Sea  $X$  un espacio arco-conexo y considere  $x_0 \in X$ . Pruebe que hay una biyección entre el conjunto de clases de homotopía libre de aplicaciones del círculo orientado a  $X$  y el conjunto de clases de conjugación de elementos de  $\pi_1(X, x_0)$ , el grupo fundamental de  $X$  con punto base  $x_0$  (Indicación: muestre que hay una aplicación de  $\pi_1(X, x_0)$  al conjunto de clases de homotopía libre de aplicaciones del círculo a  $X$ , la cual es constante en clases de conjugación).

**8.1.2 Corolario.** Si  $\Sigma$  es una superficie conexa entonces hay una biyección entre el conjunto de clases de homotopía libre de curvas cerradas dirigidas en  $\Sigma$  y el conjunto de clases de conjugación de  $\pi_1(\Sigma, x_0)$ .

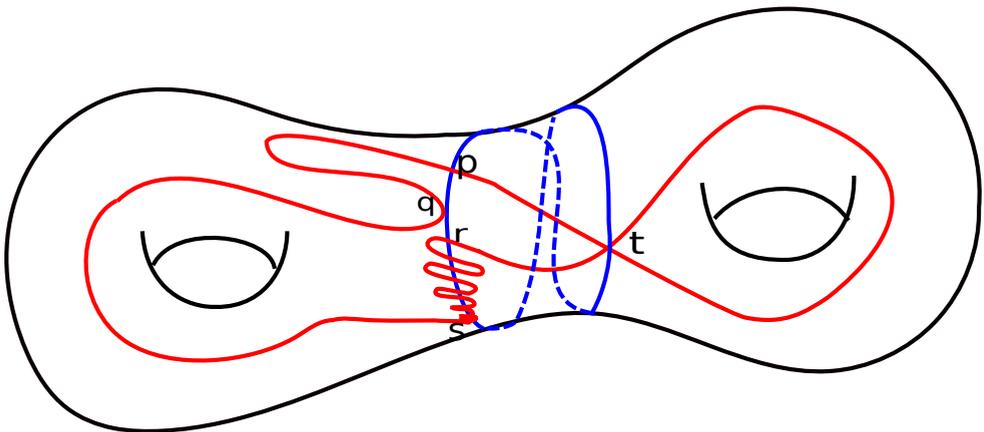
Si  $\Sigma$  es una superficie orientable con frontera no vacía entonces el grupo fundamental de  $\Sigma$  es libre. Considere un conjunto minimal  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de generadores de este grupo libre.

**8.1.3 Ejercicio.** Muestre que hay una correspondencia natural uno-a-uno entre palabras cíclicas reducidas y clases de homotopía libre de curvas en una superficie conexa y orientada  $\Sigma$  con frontera. (La palabra vacía se considera una palabra cíclica reducida y corresponde a la clase de conjugación de la identidad del grupo fundamental).

Por el ejercicio 8.1.3, si  $\Sigma$  es una superficie con frontera, podemos pensar a  $\mathbb{Z}[\pi_0]$  como el  $\mathbb{Z}$ -módulo libre cuya base consiste de palabras cíclicas reducidas en un conjunto (minimal) de generadores para  $\pi_1(\Sigma, x_0)$  y sus inversos.

## 8.2. El corchete de Goldman

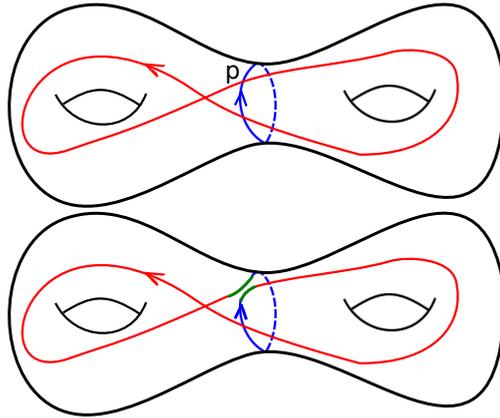
De aquí en adelante asumiremos que la superficie  $\Sigma$  es orientable y ha sido elegida una orientación. Nuestro siguiente propósito es definir un corchete de Lie  $[\cdot, \cdot]$  en  $\mathbb{Z}[\pi_0]$ . Recordemos que un corchete de Lie es una aplicación bilineal que es anti-simétrica y satisface la identidad de Jacobi en tres términos (es decir, para cada tripleta  $\alpha, \beta, \gamma$  en el módulo,  $[\alpha, [\beta, \gamma]] + [\gamma, [\alpha, \beta]] + [\beta, [\gamma, \alpha]] = 0$ ). Definiremos este corchete para cada par de elementos de la base  $\pi_0$ , y luego lo extenderemos a  $\mathbb{Z}[\pi_0]$  por bilinealidad.



**Figura 13.** Los puntos  $p$  y  $r$  son puntos transversales dobles. Los puntos  $q$  y  $s$  no son transversales. El punto  $t$  es transversal y no es doble, sino triple.

Consideremos dos clases de homotopía libre  $A$  y  $B$  y un par de representantes  $a$  y  $b$ . Podemos asumir (haciendo una pequeña homotopía de ser necesario) que  $a$  y  $b$  son representantes de  $A$  y  $B$  que se intersectan únicamente en puntos transversales dobles  $p_1, p_2, \dots, p_n$  (ver figura 13 para ejemplos de puntos transversales dobles). Hay finitos puntos de intersección en virtud de la transversalidad.

Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , denotemos por  $a \cdot_{p_i} b$  al lazo que comienza en  $p_i$ , recorre  $a$  hasta alcanzar  $p_i$  de nuevo, y luego “voltea” y recorre  $b$  (ver figura 14). Esto es,  $a \cdot_{p_i} b$  es el producto basado de lazos entre  $a$  y  $b$  con punto base  $p_i$ .



**Figura 14.** Producto basado de lazos (derecha) en el punto de intersección  $p$  de las curvas a la izquierda.

Cada punto de intersección  $p_i$  determina una orientación, yendo de la rama positiva de  $a$  a la rama positiva de  $b$ . Asociamos un signo  $s_i$  a  $p_i$ , haciendo  $s_i = 1$  si la orientación de la superficie  $\Sigma$  coincide con la orientación determinada por  $p_i$ , y  $s_i = -1$  en el otro caso.

Finalmente, el corchete de Goldman  $[A, B]$  se define como la suma sobre los puntos de intersección de  $a$  y  $b$  de las clases de homotopía libre con signo del producto de los lazos  $a$  y  $b$  basado en  $p_i$ . En símbolos,

$$[A, B] = \sum_{p_i \in a \cap b} s_i \cdot \mathcal{FH}(a \cdot_{p_i} b)$$

Dado que el corchete se definió usando representantes, se debe verificar que éste es, luego de agrupar términos, independiente de las elecciones.

**8.2.1 Teorema.** [16] *El corchete de Goldman está bien definido, es anti-simétrico y satisface la identidad de Jacobi. En símbolos, para cada tripleta de elementos  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}[\pi_0]$ ,*

$$[\alpha, \beta] = -[\beta, \alpha] \text{ y } [\alpha, [\beta, \gamma]] + [\gamma, [\alpha, \beta]] + [\beta, [\gamma, \alpha]] = 0.$$

*Demostración.* Aquí daremos un esbozo de la prueba de la buena definición del corchete y referimos al lector a [16] para una prueba más precisa: Dados dos pares de curvas  $a$  y  $b$ , y  $a'$  y  $b'$ , con  $a$  homotópica a  $a'$  y  $b$  homotópica a  $b'$ , existe una homotopía que deforma simultáneamente un par de curvas en el otro par. Para una homotopía típica hay finitos instantes de tiempo durante esta deformación  $(a, b) = (a_0, b_0), (a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) = (a', b')$  tales que la diferencia en los puntos de intersección entre  $(a_i, b_i)$  y  $(a_{i+1}, b_{i+1})$  puede ser descrita por las figuras 15 y 16. Dado que por los ejercicios 8.2.3 y 8.2.4 el corchete no cambia al reemplazar cada figura por la correspondiente, entonces el corchete no cambia a lo largo de toda la homotopía.  $\square$

**8.2.2 Ejercicio.** Pruebe que el corchete de Goldman satisface la identidad de Jacobi. (Pista: Empiece con un ejemplo concreto de tres curvas  $a, b, c$  que se intersectan de dos en dos posiblemente en más de un punto, y pruebe que los tres corchetes triples dan términos que se cancelan a pares. Luego generalice el argumento para todas las clases).

**8.2.3 Ejercicio.** Sean  $a$  y  $b$  dos curvas que se intersectan solamente en puntos transversales dobles y sean  $p$  y  $q$  dos de estos puntos. Supongamos que  $p$  y  $q$  yacen en la superficie como en la figura 15, lado izquierdo (Esta es la configuración de arcos llamada bigono singular en la subsección 4.1. Muestre que los términos del corchete de Goldman de  $\mathcal{FH}(a)$  y  $\mathcal{FH}(b)$  correspondientes a  $p$  y  $q$  se cancelan. (Asegúrese de considerar todas las posibles direcciones de las curvas  $a$  y  $b$ ).

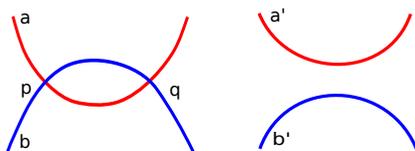


Figura 15. ejercicio 8.2.3.

**8.2.4 Ejercicio.** Sean  $a$  y  $b$  dos curvas que se intersectan solamente en puntos transversales dobles y que localmente cerca de algún punto consisten de las ramas del lado izquierdo o el lado derecho de la figura 16. Note que en cada caso una curva usa dos ramas y la otra una sola rama. El paso de izquierda a derecha es llamado un movimiento de punto triple. Considere todos los casos y muestre que el corchete no se altera por un movimiento de punto triple. (Por tanto debe mostrarse que los términos del corchete que corresponden a los puntos de intersección  $p$  y  $q$  son iguales a los términos del corchete correspondientes a los puntos  $r$  y  $s$ ).

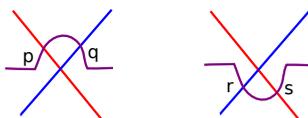


Figura 16. ejercicio 8.2.4.

Como se mencionó al principio, el conjunto  $\pi_0$  de clases de homotopía libre no posee una estructura algebraica obvia. En particular, curvas sin punto base no pueden ser multiplicadas (nótese que lazos con el mismo punto base sí pueden ser multiplicados : esto lleva a la definición del grupo fundamental). Al definir el corchete, se consideran todos los puntos donde es posible multiplicar (los puntos de intersección), y en cada uno de estos puntos se lleva a cabo la multiplicación. Entonces la combinación lineal de los resultados de la multiplicación produce el corchete de Goldman.

**8.2.5 Ejercicio.** Recordemos que el grupo fundamental del toro es un grupo libre abeliano en dos generadores,  $a$  y  $b$ . Pruebe lo siguiente:

- (a) Hay una biyección entre  $\pi_0$  y el conjunto  $\{a^i b^j; i, j \in \mathbb{Z}\}$ .
- (b) Calcule  $[a^i b^j, a^h b^k]$  para cada  $i, j, h, k \in \mathbb{Z}$ . (Pista: Calcule  $[a, b]$ ,  $[a^i, b]$ ,  $[a^i, b^k]$  y  $[a^i b^j, b^k]$ . La fórmula para el caso general involucra un determinante).
- (c) Pruebe algebraicamente que el corchete de Goldman para el toro satisface la identidad de Jacobi.

**8.2.6 Ejercicio.** Pruebe que el álgebra de Lie de Goldman de una superficie orientada  $\Sigma$  (no necesariamente conexa) es la suma directa de las álgebras de Lie para las componentes conexas de  $\Sigma$ .

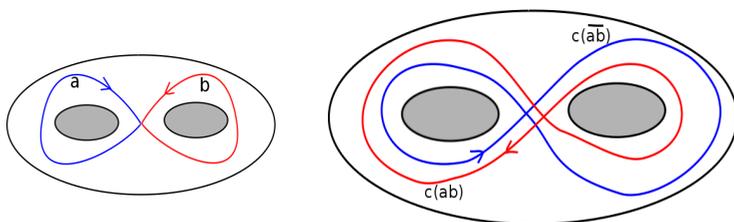
Supongamos que la superficie  $\Sigma$  es conexa. Dado que por el ejercicio 8.1.1 hay una biyección entre  $\pi_0$  y el conjunto de clases de conjugación de  $\pi_1(\Sigma)$ , podemos identificar a  $\pi_0$  con dicho conjunto de clases de conjugación.

Si  $\alpha \in \pi_1(\Sigma)$ , denotemos por  $c(\alpha)$  la clase de conjugación de  $\alpha$ .

**8.2.7 Ejercicio.** Muestre que el corchete de las dos clases representadas por las dos curvas en el lado izquierdo de la figura 14 tiene dos términos que no se cancelan. (Este ejercicio no es fácil. Puede hacerse usando el hecho de que el grupo fundamental de la superficie puede ser descrito como un producto libre con amalgamamiento).

**8.2.8 Ejercicio.** Considere el espacio de pantalones con generadores estándar  $a$  y  $b$  como en la figura 17. Muestre que para una de las dos orientaciones posibles del espacio de pantalones, lo siguiente es cierto:

- (a)  $[c(ab), c(\bar{b}\bar{a})] = c(b\bar{a}\bar{a}) - c(ab\bar{a}\bar{b})$ ,
- (b)  $[c(ab), c(aab)] = 0$ ,
- (c)  $[c(abab), c(ab)] = 3(c(bababbaa) - c(ababaabb))$ .



**Figura 17.** Un conjunto de generadores del grupo fundamental del espacio de pantalones (izquierda) y representantes de las clases en el ejercicio 8.2.8(3) (derecha).

Mostramos en el ejercicio 8.1.3 que para una superficie conexa con frontera hay una correspondencia uno-a-uno entre  $\pi_0$  y las palabras cíclicas reducidas en un conjunto minimal de generadores del grupo fundamental. Así, el corchete de Goldman determina un álgebra de Lie en el módulo generado por palabras cíclicas reducidas en un alfabeto finito. Este corchete fue descrito de manera puramente combinatoria en [6]. He aquí una

idea aproximada: El corchete de dos palabras cíclicas reducidas se calcula encontrando ciertos “cortes” o espacios entre letras de cada palabra (cada par de cortes corresponde a un punto de intersección minimal), abriendo cada palabra para obtener dos palabras lineales, y luego tomando la palabra cíclica reducida determinada por la concatenación de estas dos palabras. El ejercicio 8.2.8 ilustra estas ideas.

## 9. La estructura de álgebra de Lie y número de intersección

### 9.1. Número de intersección

Recordemos que el *número de intersección geométrica*  $i(A, B)$  (o simplemente *intersección de dos clases de homotopía libre*  $A$  y  $B$ ) es el número más pequeño de puntos de intersección transversal mutua de pares de representantes  $a$  y  $b$ , contados con multiplicidad. De manera equivalente, el número mínimo de intersección puede ser definido como el número más pequeño de puntos de intersección mutua de pares de representantes, dado que los pares considerados se intersecten solamente en puntos transversales dobles.

La *auto-intersección de una clase de homotopía libre*  $A$ ,  $SI(A)$  es el número más pequeño de cruces transversales de representantes de  $A$ , contados con multiplicidad.

Un resultado de Haas y Scott [17], rephraseado más abajo en el teorema 9.1.1, será usado para determinar los números mínimos de auto-intersección e intersección de clases de homotopía libre.

**9.1.1 Teorema.** [17] *Si  $a$  es una curva cerrada en una superficie orientable  $\Sigma$ , y el número de auto-intersección de  $a$  es estrictamente mayor que la auto-intersección mínima de su clase libre de homotopía, entonces una de las siguientes es cierta:*

- (a) *hay arcos disjuntos  $X$  y  $Y$  del círculo (parametrizando la aplicación  $a$ ) tales que  $a$  identifica los extremos de  $X$  y  $Y$ , y  $a|_{X \cup Y}$  define un lazo homotópico a un lazo trivial en  $\Sigma$ .*
- (b) *hay un sub-arco  $X$  del círculo tal que  $a$  identifica los extremos de  $X$  y  $a|_X$  define un arco nulhomotópico en  $\Sigma$ .*

Un elemento de  $\mathbb{Z}[\pi_0]$  puede ser escrito como una combinación lineal  $c_1 A_1 + c_2 A_2 + \dots + c_n A_n$ , donde cada  $A_i \in \pi_0$  y  $A_i \neq A_j$  si  $i \neq j$ . La *norma Manhattan* (o  $l_1$ -norma) de  $c_1 A_1 + c_2 A_2 + \dots + c_n A_n$ ,  $M(c_1 A_1 + c_2 A_2 + \dots + c_n A_n)$ , es el número de términos contados con multiplicidad, esto es,  $|c_1| + |c_2| + \dots + |c_n|$ .

Dado que el corchete de Goldman de dos clases  $A$  y  $B$  se define como una suma sobre los puntos de intersección de representantes, el número de términos no puede exceder el número de intersección  $i(A, B)$ . En efecto, se puede calcular el corchete como una suma sobre los puntos de intersección de dos representantes que se intersecten de manera minimal, y por ende hay a lo sumo  $i(A, B)$  términos. Luego de “asignar” un término a cada punto de intersección y tomar la suma algebraica, puede haber algunas cancelaciones en el proceso de agrupación. Por ello tenemos

**9.1.2 Proposición.** *Para cada par  $A, B$  de clases de homotopía libre,  $M[A, B] \leq i(A, B)$ .*

**9.1.3 Ejercicio.** Sean  $a$  y  $b$  como en el ejercicio 8.2.8. Pruebe lo siguiente (Recuerde que SI denota auto-intersección):

- (a)  $M[c(ab), c(aab)] < i(c(ab), c(aab))$ .
- (b)  $M[c(ab), c(\bar{a}\bar{b})] = i(c(ab), c(\bar{a}\bar{b}))$ .
- (c)  $M[c(ab), c((ab)^3)] = 2 \cdot 3 \cdot \text{SI}(ab)$ .
- (d)  $M(C, D) = i(C, D)$  donde  $C$  y  $D$  son las clases de homotopía libre de las dos curvas en la figura 14, izquierda.

(Pista: Pruebe mediante el teorema 9.1.1,  $\text{SI}(c(ab)) = 1$ ,  $i(c(ab), c(aab)) = 2$  y  $i(c(ab), c(\bar{a}\bar{b})) = 2$ ).

Por el ejercicio 9.1.3(1),  $M(A, B)$  y  $i(A, B)$  no siempre son iguales y por el ejercicio 9.1.3(2), no siempre son distintos. Una pregunta natural es si hay condiciones necesarias sobre  $A$  y  $B$  de tal forma que la igualdad  $M[A, B] = i(A, B)$  se cumpla. La primera respuesta a esta pregunta fue dada por Goldman, quien probó:

**9.1.4 Teorema.** [16] Si  $A$  tiene un representante sin auto-intersecciones y  $[A, B] = 0$  entonces  $A$  y  $B$  tienen representantes disjuntos. En otras palabras,  $[A, B] = 0$  si y sólo si  $i(A, B) = 0$ , dado que  $\text{SI}(A) = 0$ . Refraseado en nuestra notación, si  $\text{SI}(A) = 0$  y  $M[A, B] = 0$ , entonces  $i(A, B) = 0$ .

Hemos generalizado el resultado de Goldman como sigue:

**9.1.5 Teorema.** [7] Si  $A$  tiene un representante sin auto-intersección entonces la norma Manhattan del corchete de  $A$  y  $B$  equivale al número de intersección de  $A$  y  $B$ . En símbolos, si  $\text{SI}(A) = 0$  entonces  $M[A, B] = i(A, B)$ .

El ejercicio 9.1.3(4) ilustra el teorema 9.1.5.

La herramienta principal en la prueba del teorema 9.1.5 es escribir el grupo fundamental de  $\Sigma$  como un producto libre con amalgamamiento de las componentes de  $\Sigma \setminus a$  si  $a$  separa a  $\Sigma$ , o la extensión HNN de  $\Sigma \setminus a$  si  $a$  no separa. Como  $a$  es simple, las clases de conjugación y los términos del corchete pueden describirse combinatoriamente en términos de estas estructuras (la definición de producto libre con amalgamamiento o extensión HNN puede encontrarse, por ejemplo, en [7]).

Junto con Krongold hemos probado:

**9.1.6 Teorema.** [10] Si  $\Sigma$  es una superficie con frontera no vacía, y  $A$  es una clase de homotopía libre de curvas en  $A$  que no es una potencia propia, entonces la norma Manhattan del corchete de Goldman de  $A^p$  y  $A^q$ ,  $M[A^p, A^q]$  es  $2 \cdot p \cdot q$  multiplicado por el mínimo número posible de auto-intersecciones de representantes de la clase de homotopía libre  $A$ , dado que  $p$  y  $q$  sean enteros positivos distintos y alguno de ellos sea mayor que tres.

El ejercicio 9.1.3(3) ilustra el teorema 9.1.6.

**9.1.7 Ejercicio.** Muestre que para cada  $A \in \pi_0$ , los términos del corchete  $[A, \bar{A}]$  son clases de conjugación de conmutadores de elementos de  $\pi_1(\Sigma)$ . (El ejercicio 9.1.3(2) es un ejemplo de un corchete de la forma  $[A, \bar{A}]$ ).

Conjuntamente con Gadgil, hemos probado que el corchete de Goldman, junto con la operación de potencia, puede contar intersecciones y auto-intersecciones en todas las superficies orientables (con o sin frontera). Los siguientes dos teoremas son casos especiales de nuestros resultados.

**9.1.8 Teorema.** [9] Si  $a$  y  $b$  son dos clases de homotopía libre distintas en una superficie orientada (con o sin frontera), entonces existe una constante  $c \in \mathbb{R}$  tal que el número de intersección de  $a$  y  $b$  es igual al número de términos (contados con multiplicidades) del corchete  $[a, b^q]$  dividido por  $q$ , para todo  $q \geq c$ . En símbolos,  $M[a, b^q] = q \cdot i(a, b)$ , para todo  $q$  tal que  $q \geq c$ .

**9.1.9 Teorema.** [9] + Si  $a$  es una clase de homotopía libre en una superficie orientada (con o sin frontera) que no es la potencia de alguna otra clase, entonces existe una constante  $c \in \mathbb{R}$  tal que el número de auto-intersección de  $a$  es igual al número de términos (contado con multiplicidad) del corchete  $[a, a^q]$ , dividido por  $2 \cdot q$  para todo  $q \geq c$ . En símbolos,  $M[a, a^q] = 2 \cdot SI(a)$  para todo  $q \geq c$ .

**9.1.10 Ejercicio.** Otal [29] mostró que dados  $A$  y  $B$  en  $\pi_0$ , existe  $C \in \pi_0$  tal que  $i(A, C) \neq i(B, C)$ . Combine este resultado con uno de los teoremas en esta sección para probar que dadas dos clases de homotopía libre de curvas  $A$  y  $B$ , existe una tercera clase  $C \in \pi_0$  tal que  $[A, C]$  no es igual a  $[B, C]$ . (Pista: Para cualquier par de clases  $X, Y \in \pi_0$  que no sean potencias y cualquier entero positivo  $q$ ,  $i(X, Y^q) = q \cdot i(X, Y)$ ).

## 9.2. La estructura del álgebra de Lie de Goldman

El corchete de Goldman determina un álgebra de Lie de dimensión finita y no es mucho lo que se sabe acerca de su estructura. Esta álgebra de Lie no es, excepto por el caso del toro, una de las álgebras de Lie mejor entendidas como aquellas de Kac-Moody [21].

Respecto a la estructura de estas álgebras de Lie, Etingof [14] probó lo siguiente utilizando herramientas algebraicas.

**9.2.1 Teorema.** El centro del álgebra de Lie de Goldman de una superficie cerrada y orientada es el subespacio unidimensional generado por el lazo trivial  $\circ$ .

Kawazumi y Kuno [22] estudiaron el centro del álgebra de Lie de Goldman en una superficie de género infinito con una componente de frontera. Esta superficie es construida de la siguiente manera: se toman los puntos en la frontera de una superficie compacta orientada de género  $g$  con una sola componente de frontera, y se identifican con los puntos en una de las fronteras de una superficie de género 1 con dos componentes de frontera, obteniendo una superficie de género  $g + 1$  con una componente de frontera y

un embebimiento  $i_g: \Sigma_{g,1} \rightarrow \Sigma_{g+1,1}$ . La superficie  $\Sigma_{\infty,1}$  es el límite inductivo de estos embebimientos.

**9.2.2 Teorema.** *El centro del álgebra de Lie de Goldman de la superficie  $\Sigma_{\infty}$  es el subespacio unidimensional generado por el lazo trivial  $\circ$ .*

Si una superficie tiene frontera no vacía, no es difícil ver que las combinaciones lineales de clases de conjugación de curvas paralelas a las componentes de frontera están en el centro.

Recientemente, Kabiraj [20] probó lo siguiente:

**9.2.3 Teorema.** *El centro del álgebra de Lie de Goldman de una superficie compacta orientada (con o sin frontera) es finitamente generado, y su base consiste de combinaciones lineales de todas las clases de conjugación paralelas a las componentes de frontera (esto es, todas las potencias de componentes de frontera) y el lazo trivial  $\circ$ .*

Los métodos de Kabiraj son completamente diferentes a los de Etingof: él combina resultados de [9] con el hecho de que todos los levantamientos a la cubierta universal de geodésicas simples cerradas son disjuntos.

### Referencias

- [1] Jayadev Athreya, Alexander Bufetov, Alex Eskin, and Maryam Mirzakhani, *Lattice point asymptotics and volume growth on teichmüller space*, Duke Mathematical Journal **161** (2012), no. 6, 1055–1111.
- [2] Ara Basmajian, *Universal length bounds for non-simple closed geodesics on hyperbolic surfaces*, Journal of Topology (2013).
- [3] Joan S. Birman and Caroline Series, *An algorithm for simple curves on surfaces*, J. London Math. Soc. (2) **29** (1984), no. 2, 331–342.
- [4] Joan S Birman and Caroline Series, *Geodesics with bounded intersection number on surfaces are sparsely distributed*, Topology **24** (1985), no. 2, 217–225.
- [5] Peter Buser, *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, Springer, 2010.
- [6] Moira Chas, *Combinatorial Lie bialgebras of curves on surfaces*, Topology **43** (2004), no. 3, 543–568.
- [7] Moira Chas, *Minimal intersection of curves on surfaces*, Geom Dedicata **144** (2010), no. 1, 25–60.
- [8] Moira Chas, *The goldman bracket and the intersection of curves on surfaces*, Contemporary Mathematics - Geometry, Groups and Dynamics, **639** (2013), no. 2015, 73–84.
- [9] Moira Chas and Siddhartha Gadgil, *The Goldman bracket determines intersection numbers for surfaces and orbifolds*, arXiv preprint 1209.0634v1 (2012).
- [10] Moira Chas and Fabiana Krongold, *An algebraic characterization of simple closed curves on surfaces with boundary*, Journal of Topology and Analysis **2** (2010), no. 3, 395–417.

- [11] Moira Chas and Steven P Lalley, *Self-intersections in combinatorial topology: statistical structure*, *Inventiones Mathematicae* **188** (2012), no. 2, 429 – 463.
- [12] Marshall Cohen and Martin Lustig, *Paths of geodesics and geometric intersection numbers. I*, *Combinatorial group theory and topology* (Alta, Utah, 1984) (Princeton, NJ), *Ann. of Math. Stud.*, vol. 111, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1987, pp. 479–500.
- [13] Viveka Erlandsson and Juan Souto, *Counting curves in hyperbolic surfaces*, *Geometric and Functional Analysis* **3** (2016), no. 26, 729–777.
- [14] P Etingof, *Casimirs of the goldman lie algebra of a closed surface*, *International Mathematics Research Notices* (2006).
- [15] Benson Farb and Dan Margalit, *A primer on mapping class groups*, *Princeton Mathematical Series*, vol. 49, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [16] William Goldman, *Invariant functions on lie groups and hamiltonian flows of surface group representations*, *Inventiones mathematicae* **85** (1986), no. 2, 263–302.
- [17] Joel Hass and Peter Scott, *Intersections of curves on surfaces*, *Israel Journal of Mathematics* **51** (1985), no. 1, 90–120.
- [18] ———, *Configurations of curves and geodesics on surfaces*, *Geometry and Topology Monographs* (1999).
- [19] Nigel Hitchin, *Geometry of surfaces*.
- [20] Arpan Kabiraj, *Center of the Goldman Lie algebra*, *Algebr. Geom. Topol.* **16** (2016), no. 5, 2839–2849.
- [21] Victor G. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras*, third ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [22] Nariya Kawazumi and Yusuke Kuno, *The center of the Goldman Lie algebra of a surface of infinite genus*, *Q. J. Math.* **64** (2013), no. 4, 1167–1190.
- [23] Victor Kostyuk.
- [24] Martin Lustig, *Paths of geodesics and geometric intersection numbers. II*, *Combinatorial group theory and topology* (Alta, Utah, 1984) (Princeton, NJ), *Ann. of Math. Stud.*, vol. 111, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1987, pp. 501–543.
- [25] Maryam Mirzakhani, *Simple geodesics on hyperbolic surfaces and the volume of the moduli space of curves*, Ph.D. thesis, Harvard University, 2004.
- [26] ———, *Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces*, *Ann. of Math. (2)* **168** (2008), no. 1, 97–125.
- [27] ———, *Counting mapping class group orbits on hyperbolic surfaces*, arXiv preprint arXiv:1601.03342 (2016).
- [28] Joaquin Perez Munoz, *Curvas y superficies*.
- [29] Jean-Pierre Otal, *Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative*, *Ann. of Math. (2)* **131** (1990), no. 1, 151–162.

- [30] Igor Rivin, *Simple curves on surfaces*, *Geometriae Dedicata* **87** (2001), no. 1, 345–360.
- [31] \_\_\_\_\_, *Geodesics with one self-intersection, and other stories*, *Advances in Mathematics* (2012).
- [32] Herbert Solomon, *Geometric probability*, vol. 28, SIAM, 1978.

Recibido en agosto de 2017. Aceptado para publicación en mayo de 2018.

MOIRA CHAS  
MATHEMATCS DEPARTMENT  
STONY BROOK UNIVERSITY  
STONY BROOK, NEW-YORK  
e-mail: moira.chas@stonybrook.edu

TOMÁS MEJÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, SEDE MEDELLÍN  
MEDELLÍN, ANTIOQUIA, COLOMBIA  
e-mail: tmejia@unal.edu.co