Definición de tolerancias dimensionales en ensambles móviles a partir de índices de sensibilidad

Definition of dimensional tolerances in mobile assemblies from sensitivity index

Víctor Ruiz Rosas[1]*

[1] *Facultad de Ingeniería, Universidad Libre, Bogotá Colombia, * victore.ruizr@unilibrebog.edu.co*

Fecha de recepción del artículo: 14/05/2010 Fecha de aceptación del artículo: 13/06/2010

Resumen

Se muestra el desarrollo de los modelos matemáticos para realizar análisis de sensibilidad de mecanismos a las tolerancias dimensionales de los eslabones que lo conforman a partir de modelos de síntesis analítica basados en coordenadas generalizadas. Se llegó a plantear un índice de comportamiento, basado en el número de condición de la matriz de sensibilidad, el cual puede emplearse como un criterio que permita seleccionar configuraciones de mecanismos que ofrezcan menos errores al pasar por las posiciones de precisión, cuando se presentan cambios en las dimensiones de los eslabones.

Palabras clave

Síntesis de mecanismos, sensibilidad en mecanismos, número de condición

Abstract

It is showed the development of mathematical models to perform sensitivity analysis of mechanisms to the dimensional tolerances of the links that form the basis of analytical synthesis models based on generalized coordinates. It was to propose a performance index based on the condition number of the sensitivity matrix, which can be used as a criterion for select configurations of mechanisms that provide fewer errors when passing through the positions of accuracy, when changes occur in the dimensions of the links. An example of using this index.

Key Words

Mechanisms Synthesis, Mechanisms sentivity, condition number

Introducción

En los modelos de síntesis dimensional de ensambles móviles, los resultados obtenidos en ocasiones son inflexibles frente a condiciones que pueden presentarse en la fabricación del mecanismo tales como las tolerancias dimensionales y la ubicación de los pivotes y apoyos, lo que puede hacer que una solución analítica no funcione adecuadamente en la realidad.

De igual forma es necesario precisar que una pieza no puede ser fabricada exactamente con sus dimensiones nominales teniendo en cuenta la variabilidad inherente al proceso de fabricación. Las tolerancias juegan un papel muy importante para conseguir el ajuste deseado, así como en el rendimiento mismo del producto.[1]. Una apropiada asignación de las tolerancias entre los componentes de un ensamble mecánico, reduce el costo de fabricación en gran medida y mantiene la posibilidad de intercambiabilidad entre piezas dentro del ensamble.

La síntesis de tolerancias dimensionales se ha venido trabajando en ensambles mecánicos como como lo muestran En general, una gran cantidad de modelos llevan a obtener los márgenes de error dimensionales más apropiados para una cadena eslabonada, a partir de criterios de mínimo costo, capacidad interoperabilidad, etc. Los métodos de solución del problema han definido dos tendencias, los basados en modelos determinísticos[2] y [3], [4], [5]. y los métodos basados en heurísticas [6], [7] [8], que no llevan a obtener óptimos globales pero que pueden lograr resultados muy precisos sobretodo en ensambles muy complejos.

Lo anterior lleva a plantear tareas que busquen mejorar o refinar las soluciones de tal forma que se llegue a una alternativa adecuada, en términos de minimizar los errores producidos por condiciones no analíticas. Teniendo en cuenta todos estos aspectos, el propósito del proyecto fue desarrollar algoritmos para la resolución de problemas relacionados con la síntesis de mecanismos planares de cuatro barras unidos con pares inferiores, y que permitieran hacer un análisis de sensibilidad a errores dimensionales de los eslabones, con el fin de seleccionar soluciones robustas, de forma tal que no se vean afectadas considerablemente las características de movimiento requeridas en el problema.

El método presentado en este artículo se basa en el análisis a partir de la información obtenida del modelo cinemático del ensamble y sus variaciones calculadas por medio de matrices derivadas parciales.

Sensibilidad a las tolerancias dimensionales de mecanismos sintetizados

Los cambios pequeños en las longitudes de los eslabones de un mecanismo, causadas por errores en la fabricación o el montaje, dan lugar a variaciones en la característica de movimiento del mecanismo ensamblado. Se requiere entonces, un análisis que establezca cómo y cuánto un mecanismo puede afectarse por los cambios dimensionales y de montaje (ubicación de apoyos) y verificar su sensibilidad a este tipo de modificaciones, esto es, qué tan crítico puede ser un error externo frente al funcionamiento final del mecanismo. Este análisis dentro del proyecto busca por un lado determinar el comportamiento del mecanismo frente a modificaciones externas, y por otro lado llegar a establecer las configuraciones de mecanismos menos sensibles a dichas variaciones y que por lo tanto generen menos error frente a las posiciones prescritas en el problema de síntesis analítica.

De acuerdo con el método de linealización directa (DLM), [9], [10] y [11], se desarrolló un modelo que permite realizar análisis de sensibilidad a la tolerancia dimensional, en mecanismos de cuatro barras, Se consideran dos tipos de variables dentro del análisis, de manufactura o independientes y de ensamble o dependientes. Las variables de manufactura corresponden a las magnitudes que cambian de manera independiente debido a errores en la fabricación. Dentro de ellas se encuentran todas las longitudes de los eslabones incluyendo el eslabón fijo. Las variables de ensamble identifican los cambios en posición y orientación de un elemento en el montaje debido a los cambios en las variables de manufactura. En este grupo se incluyen, los vectores que definen la posición de precisión y los ángulos que determinan las orientaciones del eslabón acoplador y el de salida.

La metodología utilizada plantea un circuito de vectores a lo largo de todo el ensamble. Para que el ensamble funcione adecuadamente la suma de los vectores a lo largo del circuito debe ser igual a cero. Si se presentan variaciones en la longitud de los vectores o en sus orientaciones, el ensamble igualmente se verá modificado, tal como se aprecia en la figura 1. Para trabajar el modelo de sensibilidad a la tolerancia, en una aproximación inicial, se verificaron los efectos de las variables de manufactura sin tener en cuenta variaciones en la ubicación de los apoyos. las ecuaciones de ciclo vectorial que se plantean para el análisis de sensibilidad, son completamente correspondientes con las ecuaciones en coordenadas generalizadas utilizadas para la síntesis analítica.

Para describir completamente el comportamiento de ensamble [12], se hizo necesario definir dos ciclos de restricciones, el primero, de acuerdo con la figura 1, es el *ABCDA* que analiza todo el ensamble del mecanismo y el segundo *ABPA* se plantea sobre el eslabón acoplador y el vector que define la posición de precisión. Las expresiones vectoriales que se obtienen en cada caso se ven en la Ec. (2) y la Ec.(3).

$$\underline{H_1} = \underline{L_1} + \underline{W_a} + \underline{L_2} + \underline{W_b} = 0 \qquad (2)$$

$$\underline{H_2} = \underline{W_a} + \underline{Z_a} + \underline{L_P} = 0 \qquad (3)$$

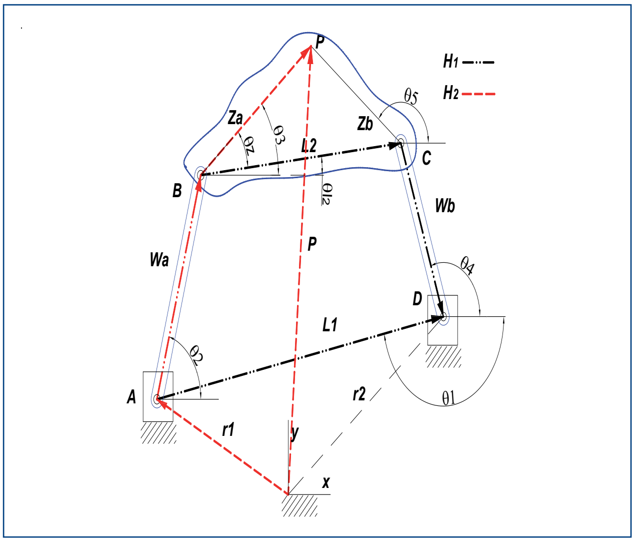


Figura 1. Ciclos para análisis de sensibilidad en un mecanismo de cuatro barras sintetizado analíticamente

Al analizar el mecanismo se identifica que las variables que se modifican de manera independiente son $\Theta_{2,}$ Θ_{Z}, *Wa*, $L_{2,}$ W_b, *Za*, L_1. Las variables dependientes son $\theta_3, \theta_4, \theta_{PA}, L_{PA}$

Las ecuaciones de lazo se desarrollan en términos de sus componentes rectangulares con respecto al marco fijo, obteniendo un sistema de ecuaciones escalares que conformarán la matriz de ciclos.

El método de linealización directa define las variaciones en el ensamble Ec.(4):

$$\Delta H = [A]\Delta X + [B]\Delta U = 0 \qquad (4)$$

Donde: ΔH representa las variaciones en el ciclo vectorial, ΔU expresa las variaciones de las variables de ensamble (dependientes), ΔX las variaciones en las variables de manufactura (independientes), *[A]* corresponde a la matriz de derivadas parciales de la matriz de ciclos, con respecto a las variables independientes y *[B]* es la matriz de derivadas parciales de la matriz de ciclos con respecto a variables dependientes. En general la ecuación expresa que cualquier error en las variables independientes causará modificaciones en los valores de las variables dependientes y en la característica de movimiento general del sistema.

Se intenta analizar entonces, los cambios en las variables dependientes, debidos a los cambios en las variables independientes, a partir de la Ec.(4): deduce que, Ec.(5):

$$\Delta U = -[B]^{-1}[A]\Delta X \qquad (5)$$

Las matrices A y B se calculan de acuerdo con la Ec.(6) y Ec.(7), [12]:

$$[A] = \begin{bmatrix} \dfrac{H_x^i}{\partial X_j} & \dfrac{H_y^i}{\partial X_j} \end{bmatrix}^T \qquad (6)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \dfrac{H_x^i}{\partial U_j} & \dfrac{H_y^i}{\partial U_j} \end{bmatrix}^T \qquad (7)$$

Donde *i* indica el número de ciclos y *j* el número de variables dependientes o independientes de acuerdo con la matriz considerada. La matriz de sensibilidad a la tolerancia se define como, Ec. (8).

$$[S] = -[B]^{-1}[A] \qquad (8)$$

Esta matriz indica la sensibilidad de un mecanismo o ensamble con respecto a los cambios que se presentan de manera independiente en los eslabones. Algunos índices alrededor de esta matriz indican un nivel de sensibilidad que permita tomar decisiones frente a una solución, todos ellos están alrededor de la singularidad de la matriz.

Teniendo en cuenta las Ecs. (5) y (8), los cambios en las variables dependientes en términos de las independientes se expresan como, Ec.(9):

$$\Delta U_i = [S][\Delta X] \qquad (9)$$

En términos de las variables involucradas en el sistema, el análisis de sensibilidad final con el cual se trabajó corresponde a la Ec.(10):

$$\begin{bmatrix} d\theta_3 \\ d\theta_4 \\ dP_x \\ dP_y \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} d\theta_2 \\ d\theta_Z \\ dWa \\ dl_2 \\ dWb \\ dZa \\ dxa \\ dya \end{bmatrix} \qquad (10)$$

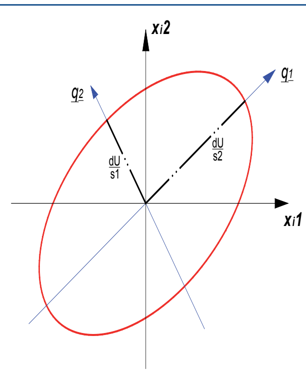
Criterios de sensibilidad a partir del número de condición de la matriz de sensibilidad

Con el fin de predecir el comportamiento de un ensamble ante cambios en sus dimensiones se utiliza la información que se pueda obtener de la matriz de sensibilidad. El criterio de sensibilidad más común está alrededor de la singularidad de la matriz, de tal forma que puede afirmarse que un mecanismo es muy sensible a cambios pequeños, cuando la matriz de sensibilidad está cercana a la singularidad y poco sensible a grandes cambios cuando no hay singularidad.

Número de condición

La distribución del comportamiento es caracterizada por el conjunto de números singulares y sus correspondientes autovectores, que gráficamente puede representarse por medio de un hiperelipsoide que para más simplicidad se verifica en dos dimensiones.[13]

En la figura 2 se muestra el comportamiento del conjunto de variables dependientes dU para cambios de dos variables independientes x_1 y x_2, Para la matriz de sensibilidad S obtenida anteriormente se encuentran que $\sigma_{min.}$ y $\sigma_{máx.}$ corresponden al menor y mayor valores singulares de S y q_1 y q_2 a sus correspondientes autovectores. Las longitudes de los semiejes son inversamente proporcionales a los valores singulares de S y definen un comportamiento menos sensible en la dirección de q_1 y más sensible en la dirección de q_2.



Fuente: Caro et al. (2004) Tolerance synthesis of mechanisms. A robust design approach.

Figura 2. Elipsoide de sensibilidad

De acuerdo con lo anterior se puede expresar la sensibilidad como la razón entre las variables dependientes frente a las independientes y estará esta relación entre sus valores singulares mínimo y máximo.Ec. (11)

$$\sigma_{\min} \leq S = \frac{dU}{dX} \leq \sigma_{\max} \qquad (11)$$

De la expresión anterior se puede definir el número de condición como la relación entre el máximo y el mínimo valores singulares. Teniendo en cuenta que los valores singulares son siempre positivos y que la relación está dada entre el mayor y el menor valores singulares, se obtendrán siempre valores mayores a la unidad. Ec. (12).

$$C = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \geq 1 \qquad (12)$$

El número de condición de una matriz indica su cercanía a la singularidad de tal manera que si este número tiende a la unidad, se dice que la matriz es menos sensible, de igual forma entre mayor sea el número de condición, la matriz tiende más rápidamente a la singularidad y será mucho más sensible.

Para el caso de los mecanismos de cuatro barras obtenidos mediante síntesis analítica, el criterio del número de condición se trabaja a partir de la matriz de sensibilidad obtenida por la relación entre las variables dependientes e independientes en el ensamble. Teniendo en cuenta que los ensambles de los mecanismos trabajados en el proyecto no son estáticos, el análisis de condición y sensibilidad debe hacerse en cada una de las posiciones para las cuales se hizo la síntesis, esto en atención a que el mecanismo puede ser poco sensible en una posición, pero muy sensible en otras.

Número de condición ponderado

El estudio del número de condición condujo al establecimiento de las configuraciones sintetizadas menos sensibles a las tolerancias dimensionales, concentrándose especialmente en buscar mecanismos para los que se obtengan cambios mínimos en las posiciones de precisión, con el fin de cumplir con los requisitos de un problema de síntesis cinemática.

Con el fin de obtener un solo número de condición que agrupe el comportamiento del mecanismo en toda su trayectoria, se buscó hacer un promedio ponderado de los números de condición en cada posición de precisión, teniendo en cuenta que de acuerdo con la función final del mecanismo, será más importante el paso exacto por una posición que otra, si bien este criterio depende completamente del diseñador del mecanismo, con el objetivo de validar el índice propuesto, se estableció que las posiciones más importantes son la inicial y la final y por lo tanto tendrán pesos mayores en el momento de calcular el número de condición ponderado. En general, este indicador puede expresarse como, Ec.(13):

$$c^* = \sum_{i=1}^{n} p_i c_i^* \qquad (13)$$

Donde p_i es la ponderación sobre el 100% del número de condición en la *i*-ésima posición.

Inverso del número de condición ponderado

Teniendo en cuenta que el número de condición en ocasiones puede ser muy grande, el obtener su inverso es útil para manejar los valores en una escala entre cero y uno, de forma que puede ser más fácilmente interpretado y representado. El inverso del número de condición ponderado está definido por la Ec.(14):

$$rc^* = \frac{1}{c^*} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i c_i^*} \qquad (14)$$

Un caso particular tenido en cuenta en los dos índices formulados, fue dar el mismo peso a los números de condición en cada posición, para verificar el efecto de la ponderación en los números de condición.

Resultados

Para verificar la utilidad de los índices se plantearon diferentes problemas de síntesis cinemática, estableciendo las configuraciones más adecuadas en cada caso, para las cuales el número de condición es mínimo. Se muestran los resultados obtenidos para un problema de síntesis de movimiento en tres posiciones. Las tolerancias manejadas fueron de 0,1 mm en las longitudes de los eslabones y de 1° en las orientaciones

En la figura 3 se muestra el análisis de sensibilidad en una posición, utilizando el índice inverso al número de condición, para tres diferentes mecanismos, el mecanismos obtenido de la síntesis está en azul, mientras que el mecanismo con tolerancias se presenta en rojo, el error en posición se muestra en color negro. Nótese que a medida que el inverso al número de condición aumenta la magnitud del error disminuye, se aprecia la diferencia significativa entre las soluciones (a) y (d) de la figura.

Los resultados obtenidos evidencian que es posible determinar un mecanismo que se comporte adecuadamente ante los errores que puedan presentarse en las dimensiones de los eslabones.

En cuanto a la ponderación, es de resaltar que los valores de C^* cuando las ponderaciones son iguales se comportan de forma muy similar a cuando se tienen ponderados diferentes en cada posición, sin embargo se considera la ponderación importante

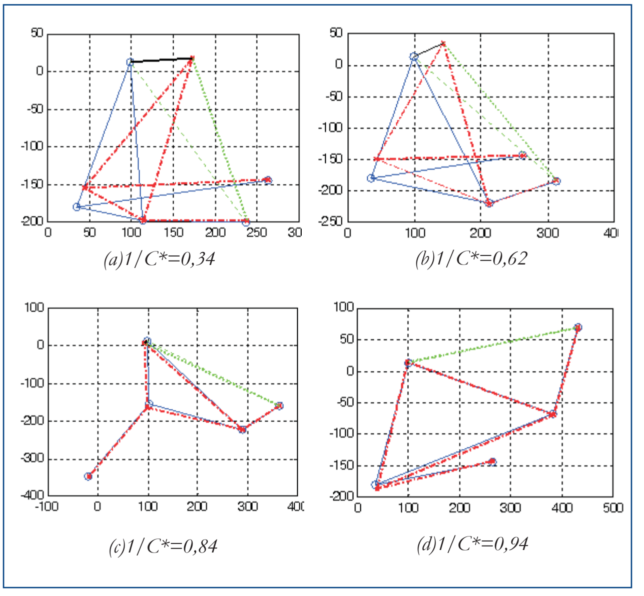


Figura 3. Análisis de sensibilidad en la posición 100, 0 para tres mecanismos sintetizados.

cuando son más relevantes unas posiciones con respecto a otras y por lo tanto se buscan menos errores en ellas.

Conclusiones

Es posible establecer el nivel de tolerancias asociadas a un conjunto de eslabones que conforman un ensamble mecánico para obtener un nivel de sensibilidad que permita garantizar un buen funcionamiento si implicar grandes costos en la manufactura.

El proceso de obtención de la solución se complementó con un análisis de sensibilidad que llevó a plantear indicadores del comportamiento de los mecanismos, basados en el número de condición de la matriz de sensibilidad. Se comprobó que estos números podían determinar regiones donde se pueden sintetizar mecanismos poco sensibles a las tolerancias dimensionales y que presentan errores menores en las posiciones de precisión.

Referencias

K. G. Merkley, K. W. Chase, E. Perry. (2001) An Introduction to Tolerance Analysis of Flexible Assemblies Brigham Young University Provo, UT,

Sacks, E. & Joskowicz, L. (1997) Parametric Kinematic Tolerance Analysis of Planar Mechanisms *Computer-Aided Design, 29(5), 333–342.*

Martin,D & Murray,A. (2002) Developing classifications for synthesizing, refining, and animating planar mechanisms. Proceedings of DECT'02 ASME 2002 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference Montreal, Canada, 2002

M. Siva Kumar & B. Stalin (2009) Optimum tolerance synthesis for complex assembly with alternative process selection using Lagrange multiplier method International Journal of Advanced Manufacturing Technology (2009) 44:405–411

Chase K, Gao J & Magleby S (1997). General 2-D Tolerance Analysis of Mechanical Assemblies with Small Kinematic Adjustments. Brigham Young University

Andrew Kusiak and Chang-Xue Feng (1995) Deterministic tolerance synthesis: a comparative study. Computer-AidedDesign,Vol. 27, No. 10, pp, 759-768.

Laperriere L., EIMaraghy H. (2000) Tolerance Analysis and Synthesis Using Jacobian Transforms CIRP Annals - Manufacturing Technology Vol 49 Issue 1 359-362

Haoyu Wang, Nilmani Pramanik, Utpal Roy, Rachuri Sudarsan, Ram D. Sriram*, Senior Member, IEEE*, and Kevin W. Lyons. (2006) A Scheme for Mapping Tolerance Specifications to Generalized Deviation Space for Use in Tolerance Synthesis and Analysis. IEEE Transactions On Automation Science And Engineering, Vol. 3, No. 1, January 2006 81-91

Wua F, Dantan JY., Etienne A., Siadat A., Martin P. (2009) Improved algorithm for tolerance allocation based on Monte Carlo simulation and discrete optimization. Computers & Industrial Engineering 56 (2009) 1402–1413

Gao J, Chase K, Magleby S (1998). Global coordinate method for determining sensitivity in assembly tolerance analysis. Brigham Young University Provo, UT

Chase K W. Gao J., Magleby S, Sorensen C. (2002) Including Geometric Feature Variations in Tolerance Analysis of Mechanical Assemblies:Brigham Young University..

Faerber, P. Tolerance Analysis of Assemblies using kinematically derived sensitivities: Brigham Young University. ADCATS Report No. 99-31999.

Caro,S , Bennis F., Wenger P. (2005) Tolerance Synthesis of Mechanisms: A Robust Design Approach. Journal of Mechanical Design. Volume 127, Issue 1, 86