ID: 0123-8264.hop.20104

ÏbērAM
Investigación | Research

Procesos de generalización

Una vía de acceso al pensamiento algebraico temprano en Educación Básica

HOP Volumen 20 #1 enero - junio

Generalization processes:
A gateway to early algebraic thinking in Basic Education

Maria Crisitanne **Butto Zarzar**
Joaquín **Delgado Fernández**
Aldo **Bazán Ramírez**

Casa abierta al tiempo

hop20

IBEROAMERICANA
CORPORACIÓN UNIVERSITARIA

HORIZONTES
PEDAGÓGICOS
ISSN-l: 0123-8264 | e-ISSN: 2500-705X
Publicación Semestral

Photo by/Foto: Ernesto Eslava

HORIZONTES
PEDAGÓGICOS
ISSN-L: 0123-8264 | e-ISSN: 2500-705X

ID: 0123-8264.hop.20104

Title: Generalization processes
Subtitle: A gateway to early algebraic thinking in basic education
Título: Procesos de generalización
Subtítulo: Una vía de acceso al pensamiento algebraico temprano en educación básica
Alt Title / Título alternativo:
[en]: Generalization processes: A way of access to the early algebraic thinking in basic education
[es]: Los procesos de generalización: Una vía de acceso al pensamiento algebraico temprano en educación básica
Author (s) / Autor (es):
Butto Zarzar, Delgado Fernández, & Bazán Ramírez
Keywords / Palabras Clave:
[en]: generalization processes; early algebraic thinking; primary school
[es]: procesos de generalización; pensamiento algebraico temprano; educación básica
Proyecto / Project:
Introducción temprana al pensamiento algebraico en entornos tecnológicos de aprendizaje: un estudio teórico-experimental en el nivel básico
Financiación / Funding:
SEP-Conacyt número 145906
Submited: 2017-09-04
Acepted: 2018-01-17

Resumen

Se reportan resultados de un estudio sobre los procesos de generalización como una vía de acceso a la introducción temprana al pensamiento algebraico, con 109 estudiantes de educación básica de escuelas públicas, México. El trabajo experimental consistió de tres etapas: 1. Evaluación inicial sobre procesos de generalización, 2. Validación de un instrumento sobre procesos de generalización, 3 Entrevista clínica abierta. Los resultados muestran que los alumnos logran comprender ideas básicas de variación proporcional, describir un patrón y formular una regla general, a medida que transitaban del pensamiento aditivo al multiplicativo En lo que respecta al instrumento de evaluación, éste posee validez convergente y divergente de constructo.

Abstract

Results on a study on generalization processes as a route to the *early introduction of algebraic thinking*, with 109 children of a public primary school in México are reported. The experimental setup consisted of three stages: 1.Initial evaluation of generalization processes, 2. Validation of an instrument on generalization processes, 3. Clinical open interview.

Results reveal that children accomplish an understanding of basic ideas on proportional variation, they describe a pattern from a given sequence and formulate a general rule, as a transit from additive to multiplicative thinking is observed. As far as the evaluation instrument is concerned, it has convergent and divergent construct validity.

Citar como:

Butto Zarzar, M. C., Delgado Fernández, J., & Bazán Ramírez, A. (2018). Procesos de generalización: Una vía de acceso al pensamiento algebraico temprano en educación básica. ***Horizontes Pedagógicos issn-l:0123-8264, 21*** (2), 25-36. Obtenido de: https://revistas.iberoamericana.edu.co/index.php/rhpedagogicos/article/view/1269

Dra Maria Crisitanne **Butto Zarzar**, MSc BEd
ORCID: *0000-0001-8913-2832*

Source | Filiacion:
Universidad Pedagógica Nacional

BIO:
Doctora en Ciencias Especialidad en Matemática Educativa, Cinestav [mx]
Maestria en Psicología Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco [br]
Licenciatura en Pedagogía, Universidade Federal de Pernambuco [br]
Académica Investigadora Titular, Universidad Pedagógica Nacional Unidad Ajusco [mx]

City | Ciudad:
México DF [mx]

e-mail:
cristianne@upn.mx

Dr Joaquín **Delgado Fernández**

Source | Filiacion:
Universidad Autónoma Metropolitana

BIO:
Profesor Titular, Departamento de Matemática - UAM-Iztapala

City | Ciudad:
México DF [mx]

e-mail:
joaquindelgado@gmail.com

Dr Aldo **Bazán Ramírez**, Psi
ORCID: *0000-0002-0229-4431*

Source | Filiacion:
Universidad Autónoma del Estado de Morelos

BIO:
Doctor en Psicología, UNAM [mx]
Psicologo, Universidad Nacional Federico Villareal [pe]
Centro de Investigación Transdisciplinar en Psicología - Universidad Autónoma del Estado de Morelos

City | Ciudad:
Cuernavaca [mx]

e-mail:
abazanramirez@gmail.com

HORIZONTES PEDAGÓGICOS
ISSN-L: 0123-8264

Procesos de generalización

Una vía de acceso al pensamiento algebraico temprano en Educación Básica

Generalization processes: A gateway to early algebraic thinking in Basic Education

Maria Crisitanne **Butto Zarzar**
Joaquín **Delgado Fernández**
Aldo **Bazán Ramírez**

La transición de la aritmética al álgebra es un paso importante para acceder a ideas más complejas dentro de las matemáticas escolares (Butto Zarzar & Delgado Fernández, 2012, pág. 20); sin embargo, una dificultad que la mayoría de los estudiantes presentan al iniciarse en el estudio del álgebra, consiste en que ésta ha sido vista como una transición lineal, es decir, como una extensión de los cálculos numéricos al cálculo literal. Esto se debe, en parte, a que este contenido matemático se enseña, por lo general, a partir de fuentes de significados limitadas: usualmente, se toma como base el dominio numérico, dejando de lado ideas importantes que se interconectan con otros dominios matemáticos, por ejemplo, las ideas geométricas.

Autores como Booth (1984), Kieran (1980), Kieran y Filloy (1989), Mason, Graham, Pimm y Gowar (1985), Filloy y Rojano Ceballos (1985a; 1985b), y Ursini (1990) señalan que los estudiantes suelen usar métodos no-algebraicos para resolver problemas de enunciado, y muestran dificultades para comprender y manejar conceptos propios del álgebra (incógnita, número general y variable). Asimismo, tienen dificultades para comprender que las operaciones en álgebra pueden no llevar a un resultado numérico y que a la larga pueden quedar como operaciones suspendidas. Los estudios de los autores mencionados evidenciaron, además, que un bagaje exclusivamente aritmético puede resultar un obstáculo para el aprendizaje del álgebra (Filloy Yagüe & Rojano Ceballos, 1985a; 1985b). En este orden de ideas, algunos autores sostienen que es básico que los alumnos puedan pensar y percibir la simbología y las operaciones arittico, puedan construiruevo modo de pensamiento aritmionalmente en la escuela primariaansar y percibir la simbolog del len usar dméticas de manera distinta a como se práctica tradicionalmente en la escuela primaria, para que sobre ese nuevo modo de pensamiento aritmético, puedan construir las nociones básicas del álgebra.

Iniciación temprana al álgebra

En estudios sobre una iniciación temprana al álgebra se han identificado temas curriculares de la escuela elemental que pueden ser explorados para inducir en los alumnos de ese nivel escolar algunas ideas algebraicas básicas. Desde esta orientación, se identifican relaciones temáticas y obras en la Tabla 1.

Tabla 1 Temas clave en la Iniciación temprana al álgebra

Temática	Autores
Importancia de desarrollar las generalizaciones de los niños como un propósito de la instrucción escolar	(Davidov, 1972)
Sentido de las operaciones	(Slavit, 1999)
Tratamiento de las operaciones y las funciones	(Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2000; 2001)
Generalización y formalización progresiva	(Blanton & Kaput, 2002)
El álgebra como una herramienta de representación y resolución de problemas	(Da Rocha Falcão, 1993)
Dialéctica entre la teoría y la práctica: un proyecto de iniciación temprana al álgebra; *Álgebra en la escuela elemental*	(Schliemann, y otros, 2003)
Reificación	(Sfard & Linchevski, 1994)

Fuente: elaboración propia

Los estudios sobre álgebra temprana tratan de dar explicaciones plausibles sobre las dificultades que enfrentan los estudiantes, cuando se inician en el estudio de dicho lenguaje, en la escuela secundaria. Una de estas explicaciones es la falta de antecedentes en los educandos para tratar numéricamente problemas matemáticos de tal manera que los lleven a ideas algebraicas como la generalidad, la expresión de una generalización o la idea de variación y función.

Actualmente, la literatura en esta área abarca un espectro amplio de acercamientos, algunos de los cuales resultan antagónicos entre sí, como es el caso de quienes proponen una iniciación a través de experiencias conceptuales del álgebra (a partir de la generalización o de la modelación) sin el uso ***prematuro*** de una simbolización formal, o de quienes plantean una iniciación temprana al álgebra mediante la utilización de su simbología para representar situaciones concretas o familiares para el estudiante.

De acuerdo con lo señalado por Butto Zarzar y Delgado Fernández (2012), el álgebra temprana se refiere a la introducción del pensamiento algebraico en edades que van del cuarto al sexto grado de primaria y primero de secundaria (9-12 años). Según lo que concluimos en el trabajo mencionado, el álgebra temprana pone énfasis en los procesos de pensamiento que conducen a las ideas algebraicas, incluso aunque no sean totalmente acabadas, pero de tal modo que ofrezcan verdaderos medios para acceder con soltura a las ideas algebraicas más elaboradas.

En el ***currículum mexicano***, la enseñanza y el aprendizaje del álgebra se pospone al ciclo de educación secundaria (primero a segundo año); esto se hace argumentando la dificultad inherente a este contenido matemático, inaccesible a edades tempranas. Desde una perspectiva psicogenética, el enfoque de álgebra temprana en el niño se sitúa en una etapa de su desarrollo cognitivo en la cual no se han desarrollado completamente el pensamiento lógico formal y la abstracción sobre lo concreto; en cambio la conservación de la cantidad, la reversibilidad y las operaciones concretas están bien consolidadas.

Para los autores el tema parece contradecir las investigaciones originales que afirman que el pensamiento algebraico corresponde más bien a la etapa de las operaciones formales, situadas alrededor de los 15-16 años. Sin embargo, ***estudios posteriores a Piaget han permitido dilucidar etapas más finas en el desarrollo cognitivo del niño y entender otros factores que permitirían abordar el desarrollo del pensamiento algebraico en edades más tempranas***, con los enfoques pertinentes y al tomar en cuenta otros factores que han demostrado influir en el desempeño de las tareas.

En este orden de ideas, Brizuela y Martínez (2012) argumentan que es pertinente estudiar las posibilidades cognitivas que ocurren cuando los estudiantes son expuestos a situaciones específicas, pues lo que los estudiantes son capaces de hacer va mucho más allá de sus características individuales, por ello, es preciso estudiar con detalle las situaciones a las que los niños son expuestos, así como también el uso que hacen de las herramientas físicas y psicológicas que tienen a mano y cómo las utilizan para resolver problemas.

Por otra parte, es importante diferenciar los términos de álgebra temprana y pre-álgebra, al respecto Butto Zarzar y Delgado Fernández (2012) señalan que:

> *En el primero se hace énfasis a los procesos de pensamiento que conducen a las ideas algebraicas, incluso cuando no sean totalmente acabadas, pero que ofrezcan verdaderos medios para acceder con soltura a las ideas algebraicas más acabadas. Ello está fundamentado por la **psicología piagetiana** que señala los diversos estadios en el desarrollo del pensamiento matemático del niño. El enfoque de **pre-álgebra**, en cambio, enfatiza los contenidos matemáticos previos a la introducción formal de los conceptos algebraicos, tales como propiedades de exponentes, polinomios, productos notables, entre otros.*
> (Butto Zarzar & Delgado Fernández, 2012, pág. 14)

Nota: Destacado intencionalmente por el editor

Procesos de generalización

De acuerdo con lo señalado internacionalmente por Butto Zarzar y Delgado Fernández (2012), Bednarz, Kieran y Lee (1996) reconocen cuatro acercamientos a la enseñanza del álgebra:

1. La generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas
2. La modelización de situaciones matemáticas y de situaciones concretas
3. El estudio de situaciones funcionales
4. A partir de la resolución de problemas y ecuaciones.

Por su parte, Wheeler (1984/1989 ; citado en Mason, Graham, Pimm, & Gowar, 1985) señala el carácter artificial de la división anterior; pues considera que los cuatro aspectos son fundamentales en un programa de álgebra elemental. Sin embargo, en el campo de la didáctica esta división resulta útil para conocer en cuál de los cuatro aspectos pone el énfasis un tratamiento escolar del álgebra.

En el currículo mexicano, este contenido (patrones y generalización) no aparece con un gran énfasis en la escuela primaria; sin embargo, sí existe una presencia amplia del razonamiento proporcional; a partir de esto, se asignan significados a la comparación cuantitativa y cualitativa de cantidades; las ideas de variable y de relación funcional aparecen en una etapa más avanzada que conduce, a su vez, hacia procesos de generalización.

De acuerdo con Pegg y Redden, (1990 , citados en Durán Ponce, 1999; Butto Zarzar & Delgado Fernández, 2012), el descubrimiento de patrones requiere trabajar tres procesos:

1. actividades con patrones numéricos
2. expresar las reglas que caracterizan patrones numéricos particulares mediante oraciones, involucrando a los estudiantes para hacer aclaraciones y precisiones
3. propiciar que los estudiantes expresen en forma abreviada dichas reglas.

También se señala que las complejidades en la introducción al algebra giran en torno a los patrones numéricos entre la descripción y la notación, lo que para su abordaje requiere de:

- *Desarrollar en forma escrita las reglas que caracterizan un patrón numérico*
- *Comparar diferentes alternativas correctas y que son originarias de un mismo patrón*
- *Generar patrones numéricos cuando se da una regla; encontrar varias reglas para un mismo patrón;*
- *Socializar con los estudiantes el surgimiento de patrones numéricos*
- *Explicar la creación de reglas que caracterizan patrones numéricos.*

(Butto Zarzar & Delgado Fernández, 2012, pág. 63).

De las dificultades

Los estudios realizados con estudiantes australianos por Mac Gregor y Stacey (1993), revelan que cuando se trabaja con patrones numéricos, los niños muestran dificultades para describir y expresar algebraicamente el patrón; y sus resultados evidencian que la enseñanza del álgebra -*basada en el estudio de patrones*-,no lleva a los estudiantes -*de manera automática*- a un mejor entendimiento de los conceptos algebraicos; en efecto, los estudiantes que participaron en estos estudios, reconocen y expresan verbalmente ***lo general*** pero muestran dificultades para simbolizarlo. Entonces, estos resultados les permitieron a Mac Gregor y Stacey argumentar la necesidad de trabajar en una etapa previa a la simbolización, en la que se debe hacerse énfasis en la descripción verbal que hacen los estudiantes acerca de una situación.

Autores representativos en la literatura coinciden en que esta fase debe atenderse detenidamente, pues las descripciones verbales serán la base para la construcción de un patrón (Rojano Ceballos, 2001; English & Warren, 1998; Stacey & MacGregor, 2001). Otro aspecto que se debe trabajar es la tendencia natural de los estudiantes sobre las relaciones de recurrencia, cuando trabajan en secuencias numéricas y geométricas; cuando los estudiantes identifican una relación recursiva y cuando se muestran renuentes a buscar una relación explícita (English & Warren, 1998); pero dicha relación recursiva puede no ser fácilmente transferible a una representación simbólica.

Reggiane (1994), observa que ***la generalización*** es un término utilizado en las matemáticas para indicar el paso de lo particular a lo general y para observar la generalidad en casos particulares. Así, diversos estudiosos han investigado las componentes del pensamiento algebraico y examinado tanto las dificultades de los niños como los contextos del álgebra. También, han estudiado la relación entre el lenguaje algebraico y el lenguaje de la programación, señalando la contribución de este último para llegar a un uso correcto de la variable. Reggiane resalta también la coexistencia de dificultades específicas correspondientes al ambiente de la programación con la dificultad conectada al requisito de la formalización. Estas dificultades se podrían revelar en el uso de cualquier idioma formal -*confrontando la relación entre el término y el concepto*- y las dificultades más profundas relacionadas al articular las estructuras involucradas; dificultades que se pueden atribuir a la generalización, y que son consecuentes con los planteamientos de Noss, Healy y Hoyles (1997).

Las investigaciones antes mencionadas describen algunas limitaciones en habilidades espontáneas para pasar de lo particular a lo general, y recomiendan estimular a los niños con procedimientos guiados. Específicamente, el estudio de Ursini (1996) busca evidenciar la comprensión de la generalidad en niños entre 11-12 años, Ursini plantea una actividad con un procedimiento guiado paso a paso, que apunta a estimular la *Zona de Desarrollo Próximo* (***ZDP***). Esto requirió de la estimulación e intervención externa para que la ***ZDP*** fuera activada y, a pesar de que los niños no habían sido introducidos al álgebra, se cree que éstos se encontraban en una etapa *pre-algebraica*.

Generalización

De acuerdo con Castro, Rico y Castro (1995), se puede generalizar en problemas que involucren patrones de tipo lineal o cuadrático mediante expresiones algebraicas. En este sentido, Radford (2006) distingue dos tipos de generalizaciones: una de tipo aritmética y otra de tipo algebraica. Los procedimientos inductivos, basados en la formulación de reglas mediante ensayo y error en actividades con patrones, no conducen a una generalización; el autor comenta que, en esos casos, los procedimientos inductivos llevan a un tipo de razonamiento probable, y se ajustan más a una hipótesis. Para Radford (1996), las reglas que rigen una secuencia y su representación simbólica pueden deducirse a través del álgebra. También sugiere que la acción de generalizar incluye dos elementos interrelacionados: percibir una regularidad en una secuencia y formar un concepto general.

Para que la generalización pueda ser considerada como algebraica, Radford (2003) señala que la expresión debe satisfacer cualquier término de la secuencia; de no ser así, la generalización es sólo aritmética. La tarea de generalizar se hace más complicada cuando se le pide al estudiante relacionar variables y expresar esta relación en un lenguaje algebraico; las propias variables y el lenguaje algebraico son en sí mismos generalizaciones, por lo tanto, cuando se generaliza mediante estos elementos se logra un mayor nivel de abstracción.

No todas las actividades que realizan los estudiantes, cuando tratan de reconocer un patrón, están relacionadas con la generalización (Radford, 2010). En uno de sus estudios comenta que los estudiantes usan sistemáticamente dos estrategias: el reconocimiento de patrones y el ensayo y error. También explica que la estrategia de ensayo y error lleva a la producción de reglas que deben ser planteadas como hipótesis, y no como leyes de construcción de los elementos de la sucesión. Y subraya que *es imprescindible favorecer el desarrollo de actividades para el uso de* ***estrategias de generalización***, en lugar de estrategias que evoquen el ensayo y error.

Por su parte, Kaput (1999; 2000) propuso tres enfoques para acceder al pensamiento algebraico:

1. el estudio de estructuras y sistemas abstractos para construir relaciones y hacer cálculos, incluyendo las que surgen en la aritmética y el razonamiento cuantitativo, el álgebra como una generalización de la aritmética
2. el estudio de la variación, de relaciones y funciones
3. un grupo de lenguajes de modelación para expresar y apoyar el razonamiento sobre las situaciones que se quieren modelar.

Kaput, Blanton y Moreno (2008) argumentan que al usar ***la generalización*** como *un enfoque para acceder al álgebra* puede hacer avanzar el ***pensamiento algebraico***; para ellos la generalización es un

HOP 20 (1) pág. 25-36
HORIZONTES PEDAGÓGICOS
ISSN-L: 0123-8264

medio que permite a los estudiantes usar conceptos y procedimientos matemáticos para expresar, manipular y abstraer ideas matemáticas.

En síntesis, los procesos de generalización consisten en descubrir un patrón o regla a partir de una secuencia de objetos, que pueden ser numéricos o geométricos. Las investigaciones al respecto muestran que un niño puede comprender una regla, aun cuando no pueda expresarla en lo que llamamos un lenguaje algebraico; sin embargo, es capaz de construir una tabla y extrapolar o interpolar correspondencias.

Estos antecedentes en el estudio de la generalización orientan a esta investigación para validar los constructos de los procesos de generalización como una vía para acceder de forma temprana al pensamiento algebraico en estudiantes de grados 4° y 5° de primaria y 1° de secundaria, así mismo, identificar su desempeño en relación al grado escolar a través de mediciones cobre los procesos de generalización.

Metodología

Estudio de tipo observacional, longitudinal y comparativo. Bajo la modalidad de panel, pues estudió a tres grupos de individuos y fueron los mismos a lo largo de un año.

Participantes

Los participantes se tomaron de una muestra aleatoria que corresponde a **109** niños, estudiantes de escuelas públicas de dos entidades federativas: Estado de México y Distrito Federal; de primaria participaron: **33** de 4° grado y **38** de 5° grado; y **38** de 1° grado de secundaria.

Los grupos provenían de un nivel socioeconómico medio. El criterio de inclusión fue que todos los niños hubieran concluido el ciclo escolar.

Instrumento sobre procesos de generalización

Fue diseñado un cuestionario de evaluación inicial sobre procesos de generalización, con cuatro factores o dominios:

1. Secuencia aritmética creciente y decreciente
2. Secuencia aritmética y geométrica
3. Relación cuadrática lineal
4. Variable o número general.

Posterior a la aplicación del cuestionario sobre procesos de generalización, se utilizó una entrevista clínica individual. De acuerdo a Delval (2001), la entrevista clínica es un método para investigar cómo piensan, perciben, actúan y sienten los niños. Se trata de descubrir aquello que no resulta evidente de lo que los sujetos hacen o dicen. La entrevista tuvo como objetivo indagar sobre cómo resolvieron el cuestionario de proceso de generalización los estudiantes.

La Tabla 2 presenta la estructura del instrumento utilizado e incluye las cuatro dimensiones (factores), descripciones, indicadores y el contenido matemático evaluado.

Niveles de logro para los procesos de generalización

Las respuestas de los estudiantes pueden corresponder a tres diferentes niveles de logro (Alto, Medio e Inicial). Los niveles de logro para los procesos de generalización son una especie de ruta del proceso de aprendizaje inicial del estudiante en lo referente al tipo de pregunta, esto es, al contenido matemático que presentan los estudiantes en una determinada tarea explorada en el instrumento; estas respuestas pueden servir de guía para el docente (Ministerio de Educación, 2007).

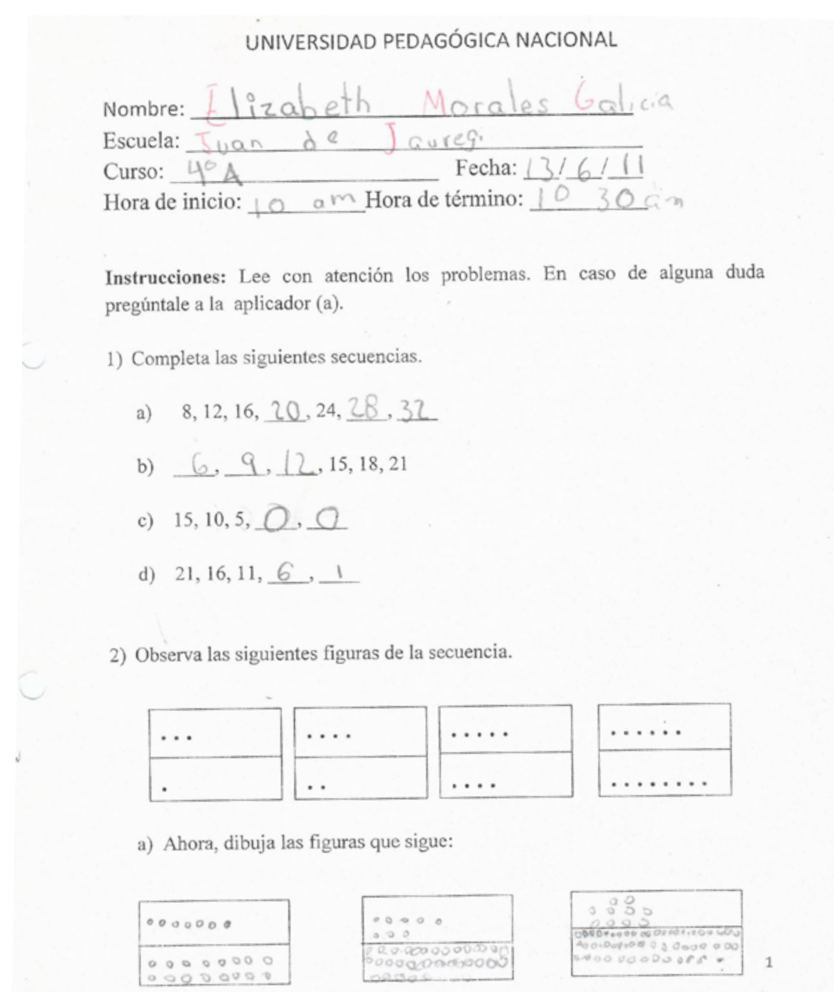
Niveles de logro alto

Se caracteriza por la comprensión de los procesos de generalización, y se expresa en un ***pensamiento pre-algebraico***.

Secuencia de puntos

Se les presentan a los alumnos dos secuencias de puntos (una en la parte superior y otra en la parte inferior de los recuadros) y se les pide que dibujen los recuadros correspondientes a los dos términos subsiguientes de ambas secuencias.

El Gráfico 1 evidencia una respuesta algebraica para los dos casos. En la primera secuencia (3, 4, 5, 6), la respuesta es correcta 7, 8), y en la segunda secuencia (16, 32, 53), los dos primeros números, los alumnos multiplican (16, 32), que es lo que corresponde a la secuencia con término general 2n, pero, lo alumnos no responden de manera correcta el tercer término.


UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Nombre: Elizabeth Morales Galicia
Escuela: Juan de Jauregui
Curso: 4°A Fecha: 13/6/11
Hora de inicio: 10 am Hora de término: 10 30 am

Instrucciones: Lee con atención los problemas. En caso de alguna duda pregúntale a la aplicador (a).

1) Completa las siguientes secuencias.

a) 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32

b) 6, 9, 12, 15, 18, 21

c) 15, 10, 5, 0, 0

d) 21, 16, 11, 6, 1

2) Observa las siguientes figuras de la secuencia.

a) Ahora, dibuja las figuras que sigue:

1

Gráfico 1 Ejemplo de nivel de logro alto

HOP 20 (1) pág. 25-36
HORIZONTES PEDAGÓGICOS
ISSN-L: 0123-8264

Tabla 2 Descripción del instrumento para evaluar Procesos de Generalización

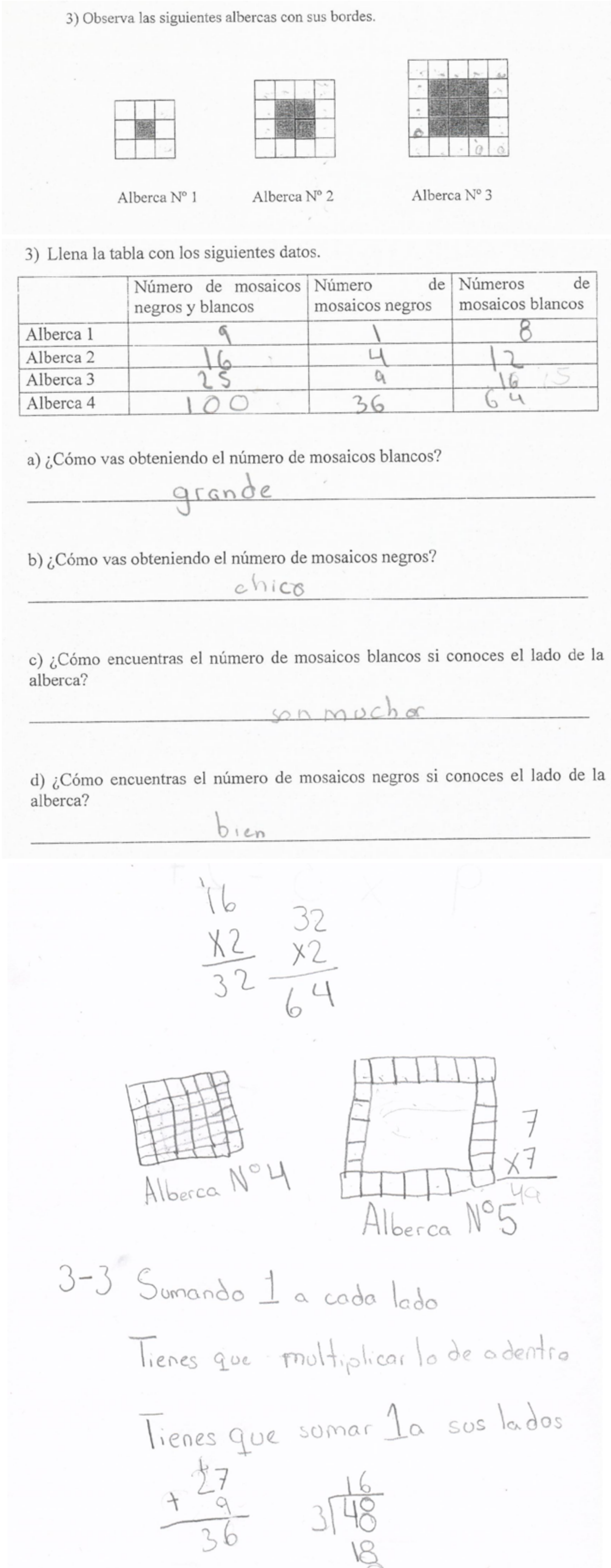
D. G.	Descripción y clave de la dimensión (variable)	Indicadores	Contenido matemático
1. Secuencia aritmética creciente y decreciente SeArCyD	Secuencia aritmética creciente, la cual evalúa que la secuencia de números sea la esperada. SeArCre1 y 2	Secuencia aritmética creciente (a)	Reconocer la secuencia aritmética creciente de 4 en 4
		Secuencia aritmética creciente (b)	Reconocer la secuencia aritmética creciente de 3 en 3
	Secuencia aritmética creciente, la cual evalúa que la secuencia de números y que sea la esperada. eArDec1 y 2	Secuencia aritmética decreciente (a)	Reconocer la secuencia aritmética decreciente de 5 en 5
		Secuencia aritmética decreciente (b)	Reconocer la secuencia aritmética decreciente de 5 en 5
2.Secuencia aritmética y geométrica SecAG	Secuencia aritmética y geométrica creciente, la cual evalúa que la secuencia de figuras, sea la esperada. SecArit y SecuGeom	Secuencia aritmética creciente (a)	Reconocer la secuencia aritmética creciente de la figura
		Secuencia geométrica (b)	Reconocer la secuencia geométrica de la figura
3.Relación cuadrática lineal "Las albercas"	Relación cuadrática y lineal, la cual evalúa; que los estudiantes identifiquen la secuencia y logren llegar a la solución esperada. ReCuLi e encuentra compuesta por siete indicadores.	Relación cuadrática lineal ReCuLi 1 (1)	Relación cuadrática lineal en la cual, se observa y dibujar la secuencia de figuras (albercas).
		Relación cuadrática lineal ReCuLi 1 (2)	Relación cuadrática lineal en la cual, se observa y dibujar la secuencia de figuras (albercas).
		Relación cuadrática lineal ReCuLi 2 (3)	Relación cuadrática lineal en la cual, se pide que completen una tabla con los datos solicitados (cuadros blancos y negros).
		Relación cuadrática lineal ReCuLi 3 (4=a)	Relación cuadrática lineal, en la cual, se solicita que expresen como va obteniendo el número de mosaicos blancos.
		Relación cuadrática lineal ReCuLi 4 (5= b)	Relación cuadrática lineal, en la cual, se solicita que expresen como va obteniendo el número de mosaicos negros.
		Relación cuadrática lineal ReCuLi 4 (6=c)	Relación cuadrática lineal, en la cual, se solicita que expresen como va obteniendo el número de mosaicos blancos si conoce el lado de la alberca.
		Relación cuadrática lineal ReCuLi 4 (7=d)	Relación cuadrática lineal, en la cual, se solicita que expresen como va obteniendo el número de mosaicos negros, si conoce el lado de la alberca.
		Relación cuadrática lineal ReCuLi 5 (8 (gráfica cuadros blanca)	Relación cuadrática lineal, en la cual, se solicita que realice una gráfica de los cuadros blancos.
		Relación cuadrática lineal ReCuLi 6 (9 gráfica cuadros negros)	Relación cuadrática lineal, en la cual, se solicita que realice una gráfica de los cuadros negros.
		Relación cuadrática lineal ReCuLi 7 (Pregunta 10)	Relación cuadrática lineal, en la cual, se pregunta si varían de la misma manera y porque lo creen.
		Relación cuadrática y lineal ReCuLi 7 (Pregunta 11)	Relación cuadrática lineal, se pregunta cuál de las dos graficas crece más rápido y que justifiquen su respuesta
4. Variable o número general (Triángulos y Palitos) VarNumG	Variación de número general, la cual evalúa, si los estudiantes logran identificar la secuencia y si pueden justificar su respuesta por medio de una regla, está compuesta por cuatro incisos.	Variable o número general VarNumG 1 (Triángulos Fig. 1)	Variación de número general, en la cual se solicita que observen como están formado los triángulos y que contesten cuantos triángulos forman la primera figura.
		Variable o número general VarNumG 1 (Triangulo Fig 1)	Variación de número general, en la cual se solicita que escriban de cuantos palitos está formada la primera figura
		Variable o número general VarNumG 1 (Triángulos Fig 2)	Variación de número general, en la cual se solicita que observen como están formados los triángulos y que contesten cuántos triángulos forman la segunda figura.
		Variable o número general VarNumG 1 (Triángulos Fig 2) Variable o número general4 (Palitos Fig. 2)	Variación de número general, en la cual se solicita que escriban de cuantos palitos está formada la segunda figura.
		Variable o número general VarNum G 2 (5, Tabla)	Variación de número general, en el cual se solicita que completen los datos de la tabla.
		Variable o número general VarNumG3 (Pregunta 6)	Variación de número general, en el cual se pregunta cuantos palitos se necesita para la figura número 12.
		Variable o número general VarNumG 3 (Pregunta 7)	Variación de número general, en el cual se pregunta si tiene 48 palitos cuántas figuras podrá realizar.
		Variable o número general VarNumG 4 (Pregunta 8)	Variación de número general, en el cual se solicita que justifiquen sus respuestas por medio de una generalidad o una regla.

Nota: **D.G.**: Dominios de Generalización; Fuente: elaboración propia

Nivel de logro medio

Se caracteriza por la comprensión de los procesos de generalización, pero con dificultades para generalizar y expresar una regla en términos pre-algebraicos. El Gráfico 2 muestra una de las preguntas del cuestionario, a la cual se da una respuesta pre-algebraica.

HOP 20 (1) pág. 25-36
HORIZONTES PEDAGÓGICOS
ISSN-L: 0123-8264


3) Observa las siguientes albercas con sus bordes.

Alberca Nº 1 Alberca Nº 2 Alberca Nº 3

3) Llena la tabla con los siguientes datos.

	Número de mosaicos negros y blancos	Número de mosaicos negros	Números de mosaicos blancos
Alberca 1	9	1	8
Alberca 2	16	4	12
Alberca 3	25	9	16 15
Alberca 4	100	36	64

a) ¿Cómo vas obteniendo el número de mosaicos blancos?
grande

b) ¿Cómo vas obteniendo el número de mosaicos negros?
chico

c) ¿Cómo encuentras el número de mosaicos blancos si conoces el lado de la alberca?
son mucho

d) ¿Cómo encuentras el número de mosaicos negros si conoces el lado de la alberca?
bien

16 X2 32
32 x2 64

Alberca Nº4
Alberca Nº5
7 x7 49

3-3 Sumando 1 a cada lado
Tienes que multiplicar lo de adentro
Tienes que somar 1a sus lados
27 + 9 36
3⟌48 16 18

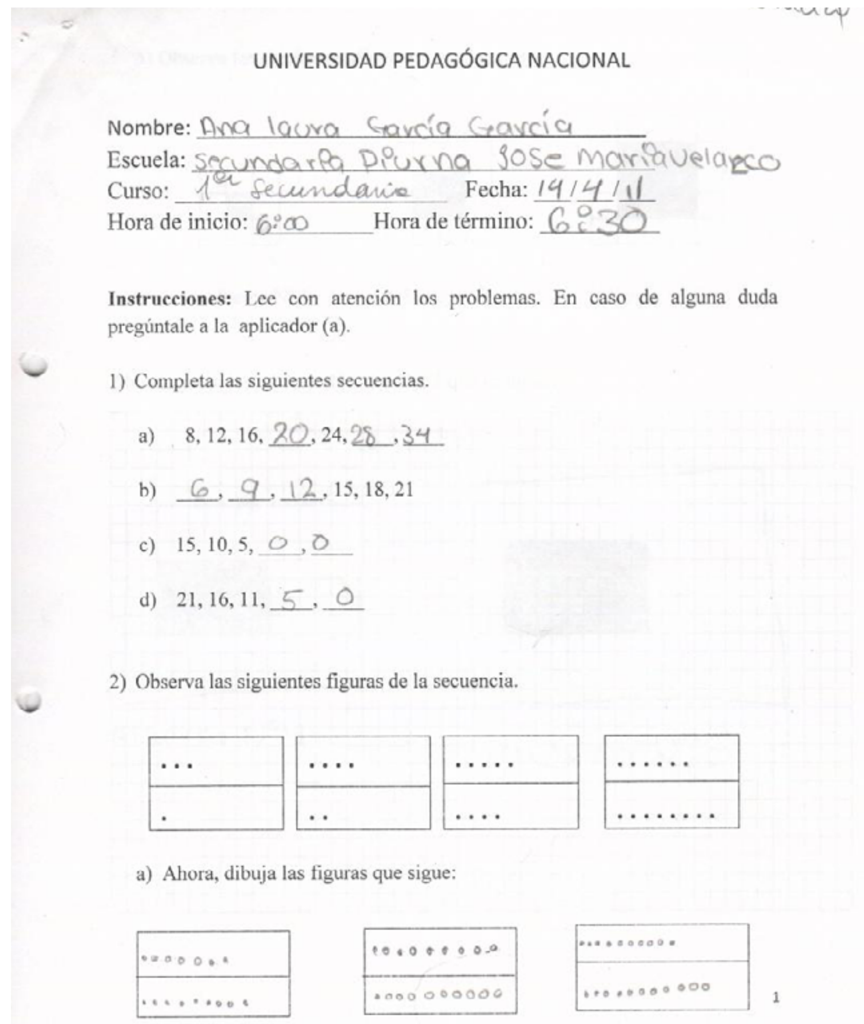
Gráfico 2 Ejemplo de nivel de logro medio

Nivel de logro inicial

Se caracteriza por la falta de comprensión de los procesos de generalización; el pensamiento matemático se expresa en términos aditivos o aritméticos.

Secuencia de puntos

Se les presenta a los alumnos dos secuencias de puntos (una en la parte superior y otra en la parte inferior de los recuadros) y se les pide que dibujen los recuadros correspondientes a los dos términos subsiguientes de ambas secuencias. general 2n.


UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Nombre: Ana laura García García
Escuela: Secundaria Diurna José María Velasco
Curso: 1a secundaria Fecha: 14/4/11
Hora de inicio: 6:00 Hora de término: 6:30

Instrucciones: Lee con atención los problemas. En caso de alguna duda pregúntale a la aplicador (a).

1) Completa las siguientes secuencias.

a) 8, 12, 16, 20, 24, 28, 34
b) 6, 9, 12, 15, 18, 21
c) 15, 10, 5, 0, 0
d) 21, 16, 11, 5, 0

2) Observa las siguientes figuras de la secuencia.

a) Ahora, dibuja las figuras que sigue:

1

Gráfico 3 Ejemplo nivel de logro inicial

El Gráfico 3 ilustra una respuesta aditiva para los dos casos. En la primera secuencia (3, 4, 5, 6), la respuesta es correcta 7, 9 y 10), mientras que en la segunda secuencia (9, 10, 11) las respuestas son incorrectas, el estudiante continúa sumando en lugar de multiplicar (16, 32), que es lo que corresponde a la secuencia con término 0.

Validación y procedimiento

El instrumento para evaluar procesos de generalización fue construido desde las cuatro dimensiones de procesos de generalización, fue sometido a valoración de contenido por dos expertos en enseñanza de las matemáticas, ello sirvió para hacer ajustes en el instrumento.

Posteriormente, el instrumento fue aplicado a una muestra piloto conformada por **50** estudiantes de primero de secundaria, distintos a los alumnos que conformaron la muestra del estudio. Los evaluadores tomaron nota de los problemas y/ o dudas más frecuentes de los alumnos, con el objetivo de mejorar las instrucciones, así como aquellas preguntas del instrumento en las que los niños presentaban mayores dudas.

A partir de las observaciones de los expertos y los resultados de la prueba piloto, se rediseñó el instrumento y al término del siclo escolar 2011-2012 (junio de 2012), tres evaluadores aplicaron de manera colectiva, la versión final del ***Instrumento Sobre Procesos de Generalización*** a **109** niños, en dos sesiones de 40 minutos de duración cada una.

HOP 20 (1) pág. 25-36
HORIZONTES PEDAGÓGICOS
ISSN-L: 0123-8264

Resultados

Consistencia interna en la medición de procesos de generalización

En lo que refiere a la consistencia interna, se obtuvo un coeficiente general *Alpha de Cronbach*: α=0.83, lo cual significa que hay buena consistencia interna del instrumento para medir indicadores de procesos de generalización con estas tareas y en cuatro diferentes dimensiones. Pero con la finalidad de identificar el nivel de consistencia interna en cada uno de los cuatro constructos o factores de procesos de generalización, fueron calculados los coeficientes *Alpha de Cronbach* en cada factor; en dos de los factores se obtuvo un buen indicador de consistencia interna (Relación Cuadrática y Variable o número general, ambos con un coeficiente *Alpha de Cronbach* de **0.80** y **0.73** respectivamente) y en dos factores fueron obtenidos con índices aceptables de consistencia interna (Secuencia aritmética creciente y decreciente=**0.64** y Figuras de secuencia=**0.58**).

Validez de constructo de procesos de generalización

Para el análisis factorial confirmatorio se utilizó el programa **EQS6** (Bentler & Wu, 2002), para comprobar la organización de las tareas o indicadores de acuerdo con los cuatro dominios de generalización, y estructurados con base en los fundamentos teóricos del ***pensamiento algebraico*** sobre ***Procesos de Generalización***. Para ello se planteó un modelo de análisis factorial confirmatorio (Gráfico 4), con el propósito de obtener la validez convergente y divergente de constructo. Se indica con círculos las cuatro dimensiones (constructos), y con rectángulos amarillos se exponen los indicadores o variables manifiestas de cada dimensión de generalización.

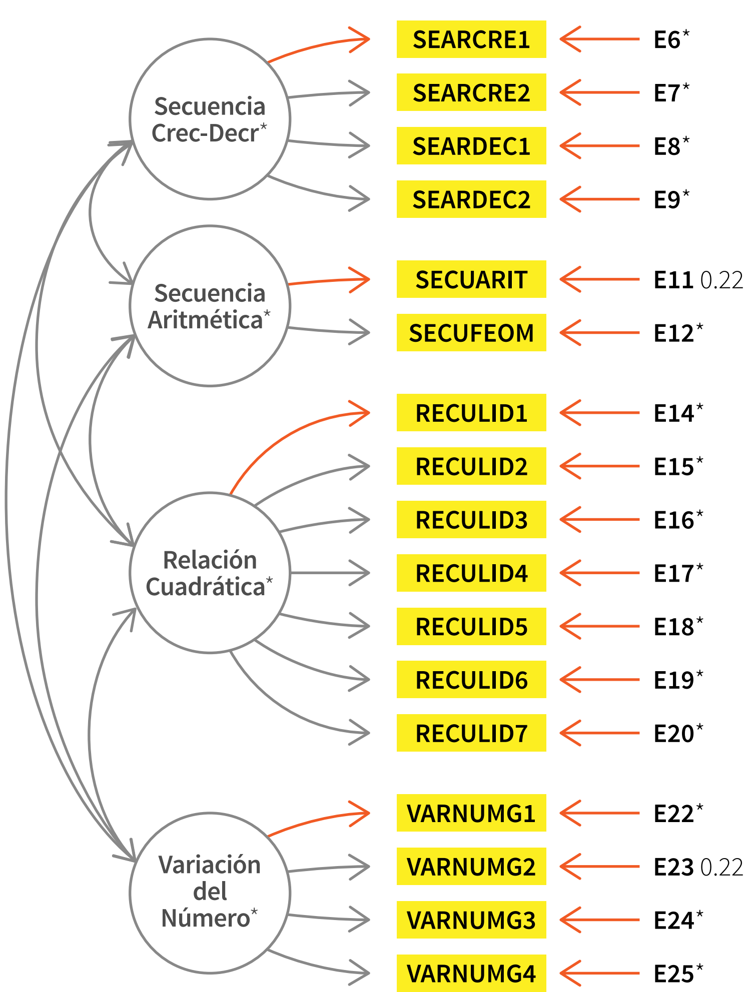


Gráfico 4 Modelo hipotético de validez convergente y divergente de constructo en la medición de procesos de generalización: Análisis Factorial Confirmatorio

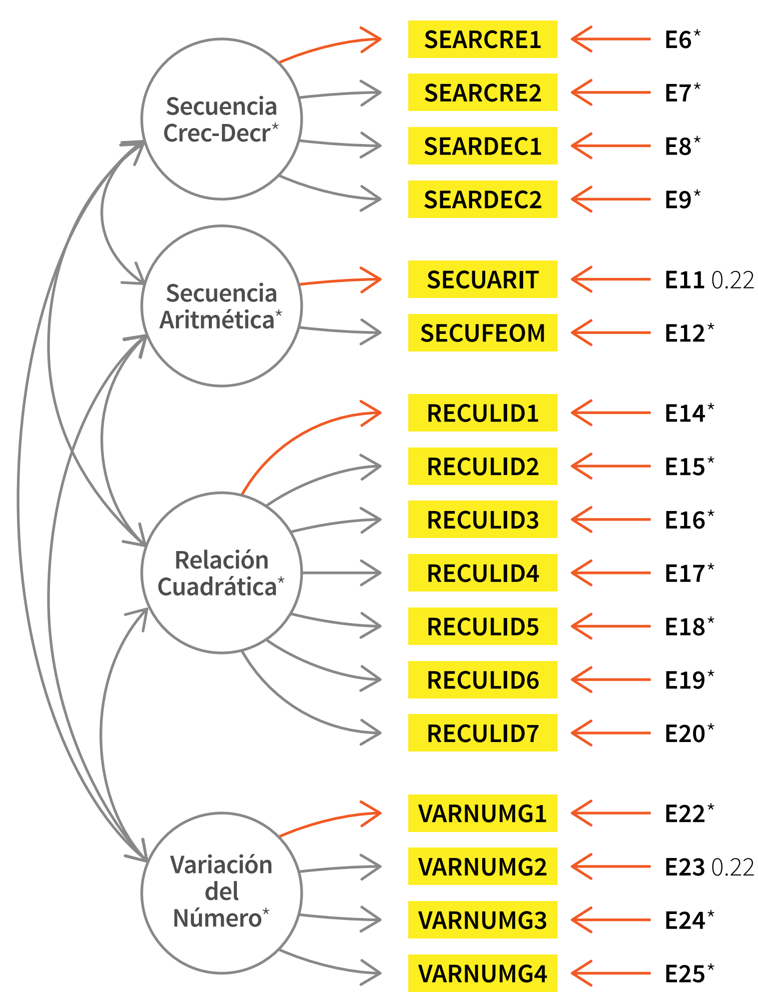


Gráfico 5 Modelo resultante de validez convergente y divergente de constructo en la medición de procesos de generalización: Análisis Factorial Confirmatorio

El modelo supone que hay validez convergente cuando se obtienen pesos factoriales significativos y similares entre cada constructo (indicado en círculo) y sus indicadores (representados en rectángulos). Por otra parte, se obtienen índices de covarianza bajos o no significativos entre cada constructo (o dimensión de generalización. Las flechas de un sentido (de los círculos a los rectángulos) indican que estas variables son indicadores de ese constructo o factor. Las flechas direccionales entre círculos indican que un factor o variable latente influye en otro factor o variables latente. La Letra **E** indica el error asociado con la medida o características que el instrumento no está recogiendo en relación con los indicadores o variables manifiestas, o cuestiones del azar (Bazán Ramírez, Sánchez Hernández, & Castañeda Figueiras, 2007; Bazán Ramírez, Sánchez Hernández, Corral Verdugo, & Castañeda Figueiras, 2006; Byrne, 1994).

El modelo resultante de **AFC** (Gráfico 5), permite observar la configuración de un modelo con cuatro dimensiones de generalización con todos los indicadores incluidos en el modelo hipotético. El modelo resultante obtuvo aceptables indicadores prácticos de bondad de ajuste (P=0.00, NFI=0.90; CFI=0.92; IFI=0.92; RMSEA=0.07)[1], y coeficientes de confiabilidad altos (α=0.84; RHO=0.87)[2].

1 **NFI**: Bentler-Bonett Non-Normed Fit Index; **CFI**: Comparative Fit Index; **IFI**: Bollen's Fit Index; **RMSEA**: Root Mean-Square Error of Approximation

2 α: Alpha de Cronbach; **RHO**: Reliability Coefficient

HOP 20 (1) pág. 25-36
HORIZONTES PEDAGÓGICOS
ISSN-L: 0123-8264

Comparación por grupos de desempeños en las evaluaciones

Los promedios obtenidos por cada grupo escolar *-por grado-*, en cada uno de los cuatro tipos de ***procesos de generalización del pensamiento algebraico***, se presentan en la Tabla 3. Estos resultados permiten percibir que no existen diferencias *estadísticamente significativas* en ninguno de los cuatro procesos (dimensiones) evaluados.

Sin embargo, en ***secuencia aritmética creciente y decreciente* y en *secuencia aritmética y geométrica***, el promedio obtenido por los grupos de alumnos se incrementa conforme aumenta el grado de instrucción escolar y los factores que podrían estar asociados con el incremento del grado escolar; éstos son: los aprendizajes escolares, el desarrollo psicológico y la maduración de los niños. De estos dos tipos de tareas, al parecer, las tareas de ***secuenciación aritmética*** vinculada con las figuras geométricas, parecen ser más complejas en los tres grados escolares, aunque también se observa que a mayor grado escolar mejora el desempeño en este tipo de tareas.

En cuanto a los procesos de generalización en tareas de relación ***cuadrática y lineal*** con variable discreta, en los tres grados escolares se obtuvieron los promedios más bajos en relación con los otros tres procesos o dimensiones, sin embargo, en este proceso, los alumnos de 5º grado son los que obtienen promedios ligeramente superiores en relación con los alumnos de 1º de secundaria y de 4o de primaria.

En el factor Variable o número general, los alumnos de 4º grado son los que obtienen promedios más altos que los de 5º grado, y éstos a su vez, obtienen promedios más altos que los alumnos de 1º de secundaria. Estos datos sugieren que los niños de 4º grado tienen mejores desempeños en tareas de variación del número general y que en los grados escolares superiores este dominio es más bajo, debido probablemente a que en los grados posteriores este tipo de pensamiento algebraico no es recuperado especialmente en los procesos de enseñanza en la escuela.

Tabla 3 Diferencias entre promedios en tareas de procesos de generalización por grado escolar

Grado Escolar	N	Media	Desviación Típica	Min	Max	F	Sig.
Secuencia aritmética creciente y decreciente							
4o Primaria	33	2.1894	.69606	.00	3.00	1.602	.206
5o Primaria	38	2.2895	.5885 3	,25	3,00		
1o Secundaria	50	2.4300	.57152	.75	3.00		
Total	**121**	**2.3202**	**.61595**	**.00**	**3.00**		
Secuencia Aritmética con figuras							
4o Primaria	33	1.85	.785	1	3	.562	.571
5o Primaria	38	1.97	.744	1	3		
1o Secundaria	50	2.03	.772	0	3		
Total	**121**	**1.96**	**.764**	0	3		
Relación cuadrática y lineal							
4o Primaria	33	1.7273	.64816	.14	2.86	1.475	.233
5o Primaria	38	1.9549	.71398	.86	3,00		
1o Secundaria	50	1.7571	.53860	.86	2.57		
Total	**121**	**1.8111**	**.63036**	**.14**	**3.00**		
Variable o número general							
4o Primaria	33	2.1970	.64274	.50	3.00	1.748	.179
5o Primaria	38	2.1513	.74783	.00	3.25		
1o Secundaria	50	1.9500	.57809	.25	2.75		
Total	**121**	**2.0806**	**.65687**	**.00**	**3.25**		

Fuente: Elaboración propia

Discusión

Los hallazgos de este estudio muestran la evaluación con cuatro dominios de ***procesos de generalización*** como una vía para acceder al ***pensamiento algebraico temprano***, cuenta con una buena consistencia interna y validez convergente y divergente de constructos. El instrumento parece mostrar virtudes para su uso como prueba de diagnóstico en la primaria alta (cuarto a sexto grado) y al inicio de la secundaria. Sin embargo, este instrumento requiere ser homogenizado en el número de preguntas al interior de cada dimensión de procesos de generalización, y aplicado a estudiantes de escuelas de diversas modalidades (privada, publico urbano y rural e indígena).

Se resalta que en las cuatro dimensiones evaluadas (Secuencia aritmética creciente y decreciente, Secuencia aritmética y geométrica, Relación cuadrática lineal, y Variable o número general), los tres grupos obtienen los promedios más altos, en *Secuencia aritmética creciente y decreciente*. Asimismo, en esta dimensión, los promedios incrementan conforme aumenta el grado escolar y la edad de los alumnos, es decir, los alumnos de primero de secundaria, obtienen mejores promedios que los alumnos de quinto de primaria y éstos a su vez, mejores promedios que los alumnos de cuarto de primaria. Aunque los promedios son más bajos, en la dimensión Secuencia Aritmética con figuras, también hay un incremento según el grado y la edad.

Al parecer, las tareas de secuencia aritmética creciente y decreciente son más fáciles para los tres grupos de niños. Contrariamente, en las tareas sobre relaciones cuadrática y lineal, son en las que los alumnos tienen mayores dificultades para resolverlos, curiosamente *-en esta dimensión-*, los alumnos de quinto grado de primaria obtuvieron promedios ligeramente más altos que los niños de primero de secundaria y de cuarto de primaria. De estos surge la pregunta: ***¿Por qué los niños de quinto obtienen mejores indicadores que los alumnos de secundaria?***, una posible explicación puede estar relacionada con los procesos de enseñanza y los contenidos incluidos para quinto grado de primaria en el plan de estudios vigente.

Llama la atención que en la dimensión *Variable o número general*, los alumnos de cuarto grado tienen promedios más altos, y los alumnos de primero de secundaria obtuvieron promedios más bajos. Si bien es cierto que la numeración general podría ser un tema más elemental y de dominio básico, es de suma importancia indagar con mayor profundidad *-el porqué de estas diferencias-*, un supuesto derivado de estos datos puede ser, que en los siguientes grados este tipo de dominios no han sido incorporados en las situaciones de aprendizaje, particularmente en las situaciones didácticas, así como en los materiales de apoyo.

En lo que refiere a los niveles de logro, los estudiantes de primaria, en su mayoría obtienen niveles de logro inicial y medio, caracterizándose el uso de estrategias aditivas y pre-algebraicas, propias de esas edades, ya los estudiantes de 1er grado de secundaria presentan niveles de logro medio *-en su mayoría-* y estrategias de resolución de problemas ***pre-algebraicas***; y en algunos casos, utilizan ***estrategias algebraicas***, principalmente para las preguntas que exploraron la idea secuencia aritmética creciente y decreciente.

Consideraciones finales

La **introducción temprana al pensamiento algebraico** por medio de las dos rutas conceptuales parece viable y tiene una correspondencia con la perspectiva histórica y curricular. Los resultados revelan la existencia de habilidades y dificultades típicas de esas edades (transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo), en parte por el énfasis que la instrucción escolar hace en los problemas de estructura aditiva). Se observa que, a pesar que los estudiantes no han desarrollado aún todas las estructuras cognitivas y matemáticas para comprender la complejidad del ***pensamiento algebraico***: son capaces de lograrlo con una secuencia didáctica enfocada a ir superando las dificultades encontradas por los estudiantes al inicio del estudio, esta debe ofrecer situaciones problemas que estén conectadas con la proporcionalidad aritmética y geométrica para *conferir significado* a los ***procesos de generalización*** en edades tempranas, esto como un camino alterno para que los estudiantes puedan acceder al pensamiento algebraico.

Agradecimientos

Este artículo contó con el apoyo del proyecto de investigación ***SEP-Conacyt*** número **145906**: titulado: Introducción temprana al pensamiento algebraico en entornos tecnológicos de aprendizaje: un estudio teórico-experimental en el nivel básico, cuya responsable técnica fue la Dra. Cristianne Butto Zarzar.

Referencias

Bazán Ramírez, A., Sánchez Hernández, B., & Castañeda Figueiras, S. (2007). Relación estructural entre apoyo familiar, nivel educativo de los padres, características del maestro y desempeño en lengua escrita. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 12*(33), 701-729. Obtenido de http://www.comie.org.mx/v1/revista/portal.php?idm=es&sec=SC03&&sub=SBB&criterio=ART33012

Bazán Ramírez, A., Sánchez Hernández, B., Corral Verdugo, V., & Castañeda Figueiras, S. (2006). Utilidad de los modelos estructurales en el estudio de la lectura y la escritura. *Revista Interamericana de Psicología, 40*(1), 85-94. Obtenido de http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0034-96902006000100009

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (Vol. 18 Mathematics Education Library). (N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee, Edits.) Amsterdam [nl]: Kluwer Academic Publishers.

Bentler, P. M., & Wu, E. C. (2002). *EQS 6 for Windows. User's Guide.* Encino [us]: Multivariate Software Inc. Obtenido de http://www.mvsoft.com/pub/EQS61QuickStart.pdf

Blanton, M., & Kaput, J. (2002). Design principals for tasks that support algebraic reasoning in elementary classrooms. En A. Cockburn, & H. Nardi (Ed.), *26th International Conference for the Psychology of Mathematics Education. 2/4*, págs. 105-112 [547-554]. Norwich [uk]: International Group for the Psychology of Mathematics Education; DevelopmentUniversity of East Anglia. Obtenido de https://eric.ed.gov/?id=ED476065

Booth, L. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors.* Windsor [uk]: Nfer Nelson.

Brizuela, B. M., & Martínez, M. V. (2012). Aprendizaje de la comparación de funciones lineales. En M. Carretero, & J. Castorina (Edits.), *Desarrollo Cognitivo y Educación II: Proceso del conocimiento y contenidos específicos* (1 ed.). Buenos Aires [ar]: Paidos.

Butto Zarzar, C., & Delgado Fernández, J. (2012). *Rutas hacia el álgebra con actividades en Excel y Logo* (1 ed., Vol. 74 Horizontes Educativos). (A. Hernández Uresti, Ed.) México DF [mx]: UPN; SEP; CONACYT. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/319325502_Rutas_hacia_el_algebra_Actividades_en_Excel_y_Logo

Byrne, B. (1994). *Structural Equation Modeling with EQS and EQS/WINDOWS: Basic Concepts, Applications, and Programming.* London [uk]: Sage Publications.

Carraher, D., Schliemann, A., & Brizuela, B. (2000). Early Algebra, Early Arithmétic: Treating Operations as Functions. *Twenty-Second Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-NA XXII.* Tucson [us]: International Group for the Psychology of Mathematics Education. Obtenido de http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.533.1261&rep=rep1&type=pdf

Carraher, D., Schliemann, A., & Brizuela, B. (2001). Can Young Students Operate On Unknowns? *25 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME25* (págs. 130-140). Utrecht [nl]: International Group for the Psychology of Mathematics Education. Obtenido de http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.468.318&rep=rep1&type=pdf; https://ase.tufts.edu/education/documents/publicationsBrizuela/CarraherSchliemannBrizuela2001.pdf

Castro, E., Rico, L., & Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización.* Bogotá DC [co]: Grupo Editorial Iberoamericana.

Da Rocha Falcão, J. (1993). A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. En *Estudos em Psicologia da Educação Matemática.* Recife [br]: Editora Universitaría UFPE.

Davidov, V. (1972). *Type of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula* (reprint [1990] ed., Vol. 2 Soviet Studies in Mathematics Education). (J. TellerJ. Kilpatrick, Trads.) Reston [us]: National Council of Teachers of Mathematics [1990]. Obtenido de https://www.marxists.org/archive/davydov/generalization/generalization.pdf

Delval, J. (2001). *Descubrir el pensamiento en los niños. Introducción a la práctica del método clinico.* Barcelona [es]: Paidós.

Durán Ponce, R. (1999). *Reconocimiento de patrones en secuencias numéricas y de figuras, por alumnos de sexto grado de primaria.* Instituto Politécnico Nacional, Cinvestav - Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. México D.F. [mx]: Instituto Politécnico Nacional.

English, L., & Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *Mathematics Teacher, 91*(2), 166-170. Obtenido de http://www.jstor.org/stable/27970471

Filloy Yagüe, E., & Rojano Ceballos, T. (1985a). Obstructions to the Acquisition of Elemental Algebraic Concepts and Teaching Strategies. *Ninth Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education* (págs. 154-158). Utrech [nl]: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Filloy Yagüe, E., & Rojano Ceballos, T. (1985b). Operating Unknown and Models of Teaching (A clinical Study with 12-13 year olds with a high proficiency in Pre-Algebra). En S. Damarin, & M. Shelton (Ed.), *Sixth Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (págs. 75-79). Columbus [us]: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema, & T. Romberg (Edits.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (págs. 133-155 [216]). Mahwah [us]: Routledge; Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J., & Blanton, M. (2000). Generalization and Progressively Formalizing in a Third-Grade Mathematics Classroom: Conversations about even and Old Numbers. En M. Fernández (Ed.), *PME-NA XXII* (págs. 115-120). Tucson [us]: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Enviromental Education. Obtenido de https://eric.ed.gov/?q=ED446945

Kaput, J., Blanton, M., & Moreno, L. (2008). Algebra from a Symbolization Point of View. En J. Kaput, D. Carraher, M. Blanton, J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Edits.), *Algebra in the Early Grades* (págs. 19-56). Londres [uk]: National Council of Teachers of Mathematics; Routledge; Lawrence Erlbaun.

Kieran, C. (1980). The Interpretation of the Equal Sign: Symbol for an Equivalence Relation vs. An Operator Symbol. En R. Karplus (Ed.), *Fourth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (págs. 163-169 [428]). Berkeley [us]: International Group for the Psychology of Mathematics Education; University of California.

Kieran, C., & Filloy Yagüe, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. (L. (tr) Puig, Ed.) *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 7*(3), 229-240. Obtenido de https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/51268/93013

MacGregor, M., & Stacey, K. (1993). Seeing to pattern and writing to rule. *Seventeenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education - PME. 1*, págs. 181-188 [929]. Tsukuba [jp]: International Group for the Psychology of Mathematics Education. Obtenido de https://eric.ed.gov/?id=ED383536

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gowar, N. (1985). *Routes of Roots of Algebra* (reprint illustrated ed.). (Department of Education (Mathematics) - University of Queensland, Ed.) Queensland [uk]: The Open University Press; University of Queensland.

Ministerio de Educación. (2007). *Niveles de logro 4° Básico: Lectura y educación matemática | Simce.* (Simce: Sistema de Medición de la Calidad de la Educación, Ed.) Santiago [cl]: Ministerio de Educación [cl]. Obtenido de http://ww2.educarchile.cl/UserFiles/P0001/File/CR_Articulos/04.%20Niveles%20de%20Logro%20Lectura%20y%20Matem%C3%A1tica.pdf

Noss, R., Healy, L., & Hoyles, C. (1997). The Construction of Mathematical Meanings: Connecting the Visual with the Symbolic. *Educational Studies in Mathematics, 33*(2 Computational Environments in Mathematics Education), 203–233. Obtenido de http://www.jstor.org/stable/3482643

Pegg, J., & Redden, E. (1990). From Number Patterns to Algebra: The Important Link. *Australian Mathematics Teacher, 46*(2), 19-22.

Radford, L. (1996). The roles of Geometry and Arithmetic in the development of Elementary Algebra: Historical Remarks from a Didactic perspective. En N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Edits.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (Vol. 18 Mathematics Education Library, págs. 39-53 [348]). Amsterdam [nl]: Springer, Dordrecht. DOI:10.1007/978-94-009-1732-3_3

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students Types of Generalization. *5*(1), 37-70. DOI:10.1207/S15327833MTL0501_02

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic Perspective. En S. Alatorre, J. Cortina, M. Saíz, & A. Méndez (Ed.), *Twenty Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematic Education* (págs. 2-21 [1034]). Mérida [mx]: Universidad Pedagógica Nacional. Obtenido de http://www.pmena.org/pmenaproceedings/PMENA%2028%202006%20Proceedings.pdf

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. (M. Cañadas, Ed.) *PNA, Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 4*(2), 37-62. Obtenido de http://www.luisradford.ca/pub/23_PNA2010Layersgenerality.pdf; https://core.ac.uk/download/pdf/12341228.pdf; http://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/6169

Reggiani, M. (1994). Generalization as a Basic for Algebraic Thinking: Observations with 11-12 years Old Pupils. En J. da Ponte, & J. Matos (Ed.), *XVIII PME Conference. iv*, págs. 97-104 [1175,1510]. Lisboa [pt]: Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education; Universidad de Lisbon.

Rojano Ceballos, T. (2001). Algebraic Reasoning with Spreadsheets. *International Seminar "Reasoning explanation and proof in school mathematics and their place in the intended curriculum"* (págs. 1-16). Cambridge [uk]: Qualifications and Curriculum Authority.

Schliemann, A., Carraher, D., Brizuela, B., Earnest, D., Goodrow, A., Lara Roth, S., & Peled, I. (2003). Algebra in elementary school. *27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference Held Jointly with the 25th PME-NA Conference. 1*, págs. 127-134. Honolulu [us]: nternational Group for the Psychology of Mathematics Education. Obtenido de https://eric.ed.gov/?id=ED501145

SEP. (2011). *Plan de estudios 2011 Educación básica.* (H. Balvuena Corro, M. Fuentes Cardóna, E. López Orendain, G. Galicia, & R. Fisher, Edits.) México DF [mx]: SEP, Secretaría de Educación Pública. Obtenido de https://www.gob.mx/sep/documentos/plan-de-estudios-educacion-basica-en-mexico-2011

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2-3), 191-228. DOI:10.1007/BF01273663

Slavit, D. (1999). The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought. *Educational Studies in Mathematics, 37*(3), 251-274.

Stacey, K., & MacGregor, M. (2001). Curriculum reform and approaches to algebra. En R. Sutherland, T. Rojano Ceballos, A. Bell, & R. Lins (Edits.), *Perspectives on School Algebra* (reprint illustrated [2006] ed., Vol. 22 Mathematics Education Library, págs. 141-153). Amsterdam [nl]: Kluwer Academic Publishers. DOI:10.1007/0-306-47223-6_8

Ursini, S. (1990). El lenguaje aritmético-algebraico en un ambiente computacional. *Cuadernos de Investigación, IV*(15), 149-156.

Ursini, S. (1996). Experiencias pre-algebraicas In Educación Matemática. *Educación Matemática, 8*(2), 33-40. Obtenido de http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol8/2/04Ursini.pdf

Wheeler, D. (1984/1989). Contexts for Research on the Teaching and Learning of Algebra. En W. Sigrid, & C. Kieran (Edits.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (1 [author draft:1984; published: 1989] ed., Vol. Volume 4 of Research agenda for mathematics education, págs. 278-287 [287]). Reston [us]: Lawrence Erlbaum Associates, Inc; National Council of Teachers of Mathematics.