

El problema de la transformación de valores en precios de producción. Una revisión de literatura en torno a las soluciones de Marx, Bortkiewicz-Winternitz y Morishima*

Fahd Boundi Chraki**


<https://doi.org/10.15446/ede.v28n52.72275>

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo general dirimir que la solución del problema de la transformación consiste en continuar el proceso iterativo iniciado en el libro III de *El Capital*. En tanto que el objetivo específico consiste en esclarecer que la rigurosa aplicación del método de la economía política de Marx conlleva develar los nexos intermedios que conectan la teoría del valor trabajo con la teoría de los precios de producción. Para este propósito, se confrontan el planteamiento de Marx, la solución de Bortkiewicz-Winternitz y el método iterativo de Morishima.

Palabras clave: valor, precios de producción, transformación, invariante, iteración.

JEL: B14, B24, B51.

-
- * **Artículo recibido:** 18 de septiembre de 2017/ **Aceptado:** 07 de marzo de 2018. Este artículo es resultado de la tesis titulada "Desarrollo capitalista en México (1970-2014): acumulación, cambio estructural y comercio exterior" realizada para obtener el grado de Doctor en Economía por la Universidad Complutense de Madrid (Madrid, España). Financiación a través de las *Becas Iberoamérica. Santander Investigación. Santander-UCM 2016*.
- ** Doctor en economía por la Universidad Complutense de Madrid (Madrid, España) e investigador independiente. Últimas publicaciones: Análisis insumo-producto multirregional e integración económica del TLCAN. Una aplicación del método de extracción hipotética. *Cuadernos de economía*, 40(114), 256-267, 2017 y La producción como origen del plusvalor en la teoría marxista. *Apuntes del CENES*, 36(64), 15-46, 2017. Correo electrónico: fboundi@ucm.es  <https://orcid.org/0000-0002-4137-6202>

The So-Called Problem of Transformation of Values into Prices of Production. A Literature Review on Marx, Bortkiewicz-Winternitz and Morishima Solutions

Abstract

The aim of this work is to contend that the solution to the transformation problem is to continue with the iterative process started in the third volume of *Capital*. The specific objective is to show that a rigorous application of Marx's method of political economy implies the exposure of the intermediate nexus that connect the labor theory of value with the theory of prices of production. To this end, Marx's approach, the Bortkiewicz-Winternitz solution, and the Morishima iterative method are compared.

Keywords: value, prices of production, transformation, invariant, iterative method.

JEL: B14, B24, B51.

Introducción

En el prólogo a la primera edición del libro II de *El Capital* publicado en la fecha del 5 de mayo de 1885, Engels polemiza con Rodbertus y discípulos sobre la originalidad del concepto de *plusvalor* revelado por Marx (1867) en el libro I. Tras una agria discusión en la que Engels (1885, p. 21) expone las debilidades del *corpus teórico* de Rodbertus, el revolucionario alemán decide dar la oportunidad de réplica a los rodbertianos lanzándoles el siguiente desafío: resolver la contradicción que encierra en sí la ley del valor descubierta por Ricardo (1821).

En otras palabras, Engels conminó a lo rodbertianos a solucionar el problema de la transformación de valores en precios de producción sin infringir durante su transcurso las propias leyes del valor trabajo.

Dicha resolución, no en vano, había pronto de ser develada con la publicación del libro III de *El Capital*. La premura que prometió Engels (1885, p. 22) a sus adversarios rodbertianos se tornó en demora, pues tuvieron que pasar nueve largos años para que el libro III saliera a la luz.

Así, en 1894 apareció el libro III y con ello había de concluir el debate. O al menos eso debió pensar Engels. La realidad, no obstante, fue obcecada con el revolucionario alemán. Las respuestas a la solución de Marx no tardaron en acontecer. Sombart (1894) fue de los primeros en clamar al cielo. Lo siguieron Veblen (1895), Loria (1895), Böhm-Bawerk (1896), Pareto (1899), entre otros.

Mas fue el economista austriaco Böhm-Bawerk (1896) quien hubo de ocupar un merecido lugar en la historia del pensamiento de la economía política con su imprescindible obra crítica *La conclusión del sistema de Marx*. Tal fue la preeminencia del economista austriaco que a sus seminarios de Viena acudieron figuras tan representativas del pensamiento marxista como Bujarin, Bauer o Grossmann.

La crítica de Böhm-Bawerk contra el sistema de Marx se convirtió inmediatamente en la respuesta oficial del marginalismo a la escuela marxista. Desde entonces, el *llamado problema de la transformación* no ha dejado de derramar enormes ríos de tinta, erosionando a su paso el pilar fundamental sobre el que el reposa el robusto edificio teórico de Marx: la *teoría del valor trabajo*.

Así pues, motivado por la discusión acerca del problema de la transformación, en el presente trabajo el objetivo general es dirimir que la solución para la conversión de los valores de las mercancías en precios de producción consiste en continuar el proceso iterativo iniciado por Marx en el libro III de *El Capital*.

El objetivo específico es esclarecer que la rigurosa aplicación del método de la economía política de Marx lo lleva a develar los nexos intermedios que conectan la teoría del valor trabajo con la teoría de los precios de producción. O, siendo más precisos, entre el libro I y el libro III de *El Capital* no existe incongruencia teórica alguna, tal y como sostuvo a la sazón Böhm-Bawerk (1896).

Para ello, se estructura el trabajo en cinco apartados. En el primero, la explicación se centra en las disparidades sectoriales de la composición orgánica del capital, el mecanismo de la concurrencia y las desviaciones entre valores y precios de producción. El segundo apartado analiza la solución de Bortkiewicz-Winternitz, la controversia que suscita la elección de un invariante para la transformación de los valores en los precios de producción y la aportación de Seton. La tercera parte recoge sucintamente el debate entre Samuelson, Baumol y Morishima. El cuarto apartado se dedica a la solución de Morishima basada en el método iterativo. Finalmente, se extraen las conclusiones más relevantes.

Disparidades sectoriales en la composición orgánica del capital, concurrencia de capitales y desviaciones entre valores y precios de producción

En su mentada obra la *Conclusión del sistema de Marx*, Böhm-Bawerk creyó haber derruido por siempre los cimientos del edificio teórico de Marx. Entre el libro I y el libro III, sostiene Böhm-Bawerk, existe una contradicción irresoluble. La única forma de *concluir el sistema marxiano* consiste en abandonar la teoría del valor trabajo y abrazar la teoría de la utilidad marginal. Ante tal alegato, la reacción de los discípulos de Marx no se hizo esperar. De la pluma de un joven Hilferding (1904) nació la primera de las respuestas marxianas.

La respuesta de Hilferding, aun cuando acierta en resaltar cómo Marx devela los nexos intermedios que unen la teoría del precio de producción y la teoría del valor trabajo, dejó intacta una de las más agudas observaciones de la crítica de Böhm-Bawerk: *las diferencias en la composición orgánica del capital de los sectores que componen una economía nacional*.

Vale reseñar a este propósito que el gran *talón de Aquiles* del sistema ricardiano fue no haber tomado en consideración las disparidades intersectoriales de la composición orgánica del capital, tanto más cuanto que ora Ricardo (1821) descubre por medio de su teoría del valor trabajo que la ganancia, en cuanto residuo, se trata en verdad del *plustrabajo* apropia-

do por el capitalista, ora el Ricardo trata de demostrar que esa misma ganancia deriva de una relación de cambio basada en precios. Entre el primer paso y el segundo debe mediar una transformación, pues de lo contrario queda desautorizada la teoría del valor trabajo.

Ricardo soslayó en la primera y la segunda ediciones de sus *Principios de economía política y tributación* las disparidades sectoriales en la composición orgánica del capital. Sin embargo, empujado por las fuertes críticas de Malthus y McCulloch, el economista clásico incluyó en la tercera edición de su obra cumbre el imprescindible capítulo dedicado “A la maquinaria”. En dicho capítulo, Ricardo (1821) reconoce que la mecanización del proceso laboral había de modificar las proporciones en la ratio capital fijo/capital circulante¹.

Marx, por su parte, fue consciente *ab initio* de que las diferencias en la relación capital constante/capital variable devienen en la desviación entre los valores y los precios de producción. En el capítulo VIII del libro III de *El Capital* deja constancia de ello al titularlo como: “Distinta composición orgánica de los capitales en distintas ramas de producción y consiguiente diversidad de las tasas de ganancia”. Ulteriormente, Marx pasa a analizar en su famoso capítulo IX: “Cómo se forma una tasa general de ganancia y cómo los valores de las mercancías se convierten en precios de producción”.

En dicho capítulo, Marx determina la ecuación de precios de producción de la *i*-énesima mercancía como la suma de los costes de los insumos de medios de producción y de fuerza trabajo más la tasa media de ganancia:

$$P_i = c_i + v_i + \pi', (i = 1, 2, \dots, n) \quad [1]$$

Donde:

$$\pi' = \frac{p_i}{K_i + V_i} = \frac{p_j}{K_j + V_j} = \dots = \frac{p_n}{K_n + V_n}, (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad [2]$$

Es importante hacer notar que la expresión [2] denota la tasa media de ganancia, la cual deriva del proceso de nivelación de las tasas de ganancia intersectoriales como consecuencia de lo que llamaron Adam Smith, Ricardo y Marx como la concurrencia. El mecanismo puede resumirse del siguiente modo. 1) Considérese que el capital fluye libremente entre los diferentes sectores o en todo caso su movilidad es lo suficientemente elevada. 2) Puesto que la inversión para la ampliación se encuentra estrechamente relacionada con la tasa de ganancia, el movimiento del capital se dirige a los sectores con tasas de ganancia superiores al promedio, en tanto que en los sectores con tasas de rentabilidad inferiores a la media ocurre lo opuesto.

¹ Ricardo (1821) sostuvo que los salarios habían de ser tratados como capital circulante, lo cual significa que la relación capital/trabajo es la relación capital fijo/capital circulante en su sistema.

3) De esta suerte, el aumento en el volumen de la inversión para la ampliación en los sectores con elevadas tasas de ganancia hará que la producción de estos crezca a un ritmo superior al de la demanda, provocando así un exceso de oferta que será compensando con el descenso del precio de mercado hasta situarse en el nivel de los precios de producción que aseguran la tasa media de ganancia. En los sectores con bajas tasas de rentabilidad ocurre lo contrario.

A través de este mecanismo, Adam Smith, Ricardo y Marx infirieron una *tendencia hacia la nivelación de las tasas de ganancia hasta conformar una tasa general de ganancia*. Por lo tanto, cuando las mercancías pasan a intercambiarse por sus precios de producción, estos se desviarán de los valores.

Explicado el mecanismo de la concurrencia, Marx (1894, p. 166) pasa a considerar que la suma de todos los precios de producción ha de ser igual a la suma total de los valores: “[...] si nos fijamos en la totalidad de las ramas de producción, la suma de los precios de producción de las mercancías producidas equivale a la suma de sus valores”.

Más adelante, el filósofo de Tréveris añade que los sectores con una composición orgánica del capital mayor que el *capital social medio*, producen mercancías con precios de producción superiores a los valores. Mientras que los sectores con una relación capital constante/capital variable inferior al *capital social medio*, se caracterizan por la producción de mercancías con valores más elevados que sus precios de producción.

Los ramos de la producción cuya composición orgánica del capital coincide con el *capital social medio* tendrán la particularidad de producir mercancías con valores proporcionales a sus precios de producción. Así, en palabras de Marx (1894, p. 169): “Prescindiendo de posibles diferencias en cuanto al tiempo de rotación, el precio de producción de las mercancías sólo sería igual a su valor en las esferas en que la composición del capital fuese por casualidad [igual al capital social medio]”.

Asimismo, hay que hacer notar que el precio de coste de una mercancía será en todo momento inferior a su valor. En cuanto a la relación entre la masa total del plusvalor y la masa total de las ganancias, la suma de ambas *debe ser idéntica*.

Marx (1894, p. 172) concluye que los valores de las mercancías han de actuar como centros de gravedad sobre los que orbitarán los precios de producción. Por lo anterior, resulta sorpréndete que los adversarios de Marx, siendo como son formidables representantes de la escuela marginalista, soslayasen esta relación entre la teoría del valor trabajo y la teoría del precio de producción.

En este sentido, se conoce por los *Grundrisse* y las *Teorías sobre la plusvalía* que Marx (1939, 1956) fue consciente de que la teoría del valor trabajo no podía actuar en su forma más pura en el modo capitalista de producción, invalidando con ello la infundada idea de Böhm-Bawerk (1896), según la cual el filósofo de Tréveris dejó inconcluso su sistema al no poder resolver la incongruencia entre el libro I y el libro III de *El Capital*.

Rubin (1928) es claro a este respecto por cuanto arguye que en tanto la teoría del valor trabajo expresada en el libro I opera bajo el esquema de la producción simple de mercancías, esto es, *productividad del trabajo-trabajo abstracto-valor-distribución del trabajo social*, Marx en el libro III entra de lleno en el esquema del modo capitalista de producción: *productividad del trabajo-trabajo abstracto-valor-precio de producción-distribución del capital-distribución del trabajo social*.

Rubin agrega, asimismo, que la teoría del precio de producción, en la medida en que se encuentra basada en la teoría del valor trabajo, contiene en su definición los tres tipos básicos de las *relaciones sociales de producción*, a saber: i) relaciones entre productores de mercancías; ii) relaciones entre capitalistas y trabajadores; y iii) relaciones entre grupos particulares de capitalistas industriales.

O, dicho de otro modo, si suponemos que estos tres tipos de relaciones sociales de producción configuran el modo capitalista de producción como un escenario tridimensional, hemos de entender que la determinación de las posiciones o los movimientos habrá de efectuarse de acuerdo con la libertad que ofrecen las tres dimensiones de las que compone. Puesto que los entornos tridimensionales no pueden ser reducidos a un plano unidimensional o bidimensional, *las leyes del movimiento del capitalismo tampoco podrán reducirse a la teoría del valor trabajo*.

Pero esto no es todo. Rubin (1928, p. 278) arremete duramente contra los críticos de Marx, de quienes dice: “[aquellos] que ven una contradicción entre la teoría del valor trabajo y la teoría del precio de producción no comprenden el método de Marx. Este método consiste en un análisis coherente de diversos tipos de relaciones de producción entre los hombres, o, por así decir, de diversas dimensiones sociales”.

En relación con esto, Grossman (1929, p. 5) remarca que: “la totalidad de los problemas y fenómenos considerados —por Marx— son tratados, por lo menos, dos veces: en primera instancia, bajo los supuestos simplificadores; luego, en su fisonomía definitiva. Quien desconozca esto, tropezará constantemente con ‘contradicciones’ entre las diferentes partes de la teoría. En este nivel se sitúa —para poner un ejemplo— la ‘contradicción’ descubierta por Böhm-Bawerk entre el tomo I y el tomo III de El Capital”.

Más aún, Shaikh (1978) aduce que en tanto el método de Ricardo (1821) consistió en pasar de lo *abstracto* (los valores) a lo *concreto* (los precios) sin establecer los *nexos intermedios*, el método de Marx hubo de identificar y de determinar minuciosamente los *nexos intermedios que conectan la teoría del valor trabajo con la teoría de los precios de producción*.

¿Quiere decir esto último que Marx en ningún momento erró en su solución y que toda la crítica recibida alude a la incompreensión por parte de sus adversarios teóricos del método aplicado en *El Capital*? La respuesta no puede menos que ser negativa. El procedimiento de Marx para la transformación de los valores en los precios de producción genera varias dudas. Morishima (1973) advierte que *prima facie* el algoritmo de transformación de Marx

no relaciona correctamente la conversión de los valores de las mercancías en sus precios de producción².

Bortkiewicz (1907) añade en este sentido que Marx había descuidado un *pequeño* detalle: *olvidó transformar los insumos en precios de producción*. Más concretamente: *mientras que los insumos entraban medidos en valores, el producto saliente lo hacía en precios de producción*.

Según Bortkiewicz, ello implica que el algoritmo de transformación de Marx es equivocado y, en consecuencia, el sistema de ecuaciones se encuentra erróneamente planteado. De esta suerte, Bortkiewicz tuvo por bien lanzarse a la ímproba tarea de corregir a Marx, legándonos así una de las primeras soluciones del problema de la transformación de valores en precios de producción.

Solución de Bortkiewicz-Winternitz, elección del invariante y aportación de Seton

Corría el año 1907 cuando Bortkiewicz publicó su reconocido trabajo *Contribución a una rectificación de los fundamentos de la construcción teórica de Marx en el volumen III de El Capital*. En dicho trabajo, Bortkiewicz (1907, p. 191) comienza dedicando las siguientes líneas a los discípulos del filósofo de Tréveris: “Hasta hoy, la crítica marxista se mostró poco dispuesta a examinar con seriedad si el procedimiento empleado por Marx en el tercer volumen de *El capital*, para la transformación de los valores en precios de producción y para determinar la [tasa media de ganancia], está en sí exento de contradicciones”.

Razones no le faltaban al estadístico y economista ruso de origen polaco. Hasta entonces, el problema de la transformación apenas tuvo resonancia en el seno de la escuela marxiana. Tan sólo Tugan-Baranowsky (1905) prestó la merecida atención al problema de la transformación en su obra *Fundamentos teóricos del marxismo*.

Cabe señalar que Bortkiewicz confiesa a sus lectores que su procedimiento corresponde al de Tugan-Baranowsky, aunque visto *desde otro ángulo*. Esto es, la solución de Tugan-Baranowsky tuvo por objeto la *conversión inversa de precios de producción en valores*. Ahora bien, en lo que sigue centraremos toda nuestra atención en el procedimiento de Bortkiewicz por cuanto toma como punto de partida el de Marx.

Pasemos a su examen. En primer término, Bortkiewicz hace abstracción al considerar que los períodos de rotación del *capital constante* y el *capital variable* anticipados se reducen a un único año. Por consiguiente, todo el *capital constante* es *capital circulante* en tanto que el *capital variable* equivale al *fondo salarial*. Baste decir que estos supuestos simplificadores se traducen en que *lo que es válido para un caso particular no podrá serlo en general*.

² Para quien escribe estas líneas, el problema de la transformación no es en manera alguna un problema teórico, cuanto que se trata de un problema matemático. Tal y como lo expresa el propio Morishima, el procedimiento iterativo de Marx es correcto, empero, su resolución matemática es farragosa en algunos puntos. En este sentido, Rubin, Grossman y Shaikh se encuentran en lo cierto al remarcar la importancia de comprender cuál es el método que adopta Marx para exponer la transformación de valores en precios de producción, aun cuando ulteriormente pueda corregirse su solución matemática.

En segundo término, siguiendo a Bortkiewicz, se procede a dividir una economía cerrada en tres sectores, a saber: i) sector I de medios de producción; ii) sector II de bienes salario para trabajadores; y iii) sector III de bienes de lujo para capitalistas. Es de hacer notar que la división en tres sectores no es casual, en la medida en que Bortkiewicz sigue la proposición de Ricardo de que *las condiciones técnicas de producción de los bienes de lujos no afectarán en absoluto a la tasa general de ganancia*.

Según Bortkiewicz el descenso de la tasa de ganancia dependerá sólo de la elevación de los salarios reales, no así de la insuficiente valorización del capital y el acrecentamiento de la composición orgánica del capital en todas las ramas de producción como hubo de teorizar Marx (1894). Por consiguiente, Bortkiewicz concluye que los precios de producción de los *sectores básicos* (sector I y sector II) son independientes de los *sectores no básicos* (sector III).

Todo ello explica las razones por las cuales Bortkiewicz decidió dividir los esquemas marxianos en tres sectores, habida cuenta de que el propio Marx (1885) incluyó el sector de bienes de lujo dentro del sector II de bienes de consumo para trabajadores y capitalistas.

En otro orden de cosas, cabe decir que el esquema marxiano aplicado por Bortkiewicz corresponde a las condiciones estáticas de la *reproducción simple*. Freeman (1995) destaca a este respecto que de la solución de Bortkiewicz se desprenden varios de los supuestos básicos del *equilibrio general* de Walras, tales como el pleno empleo de los factores, la no obtención de ganancias extraordinarias por parte de las empresas, la ausencia de cambio técnico o la inexistencia de la acumulación del capital como consecuencia de que los capitalistas gastan todo su *plusvalor* (propensión al ahorro e inversión para la ampliación nulas). Tras este breve paréntesis, pasemos al esquema de ecuaciones de Bortkiewicz:

En el esquema [3] se observa que el *capital constante* y el *capital variable* entran como insumos medidos en valores, en tanto que el *plusvalor* es el excedente generado por cada sector también medido en términos de valores. *Id est, el producto total de cada uno*

$$\left\{ \begin{array}{l} V_I = c_I + v_I + p_I \\ V_{II} = c_{II} + v_{II} + p_{II} \\ V_{III} = c_{III} + v_{III} + p_{III} \end{array} \right. \quad [3]$$

de los sectores se compone de la suma del trabajo pretérito, más el trabajo necesario, más el trabajo excedente. Consecuentemente, la tasa de plusvalor de los tres sectores se expresa como:

Puesto que la solución parte de las condiciones de una *economía estacionaria*, el sector I debe producir la cantidad exacta de medios de producción para reponer el valor del capital constante consumido a lo largo de un año. El sector II ha de hacer lo propio produciendo la

$$r = \frac{p_I}{v_I} = \frac{p_{II}}{v_{II}} = \frac{p_{III}}{v_{III}} \quad [4]$$

cantidad necesaria de bienes salario para reproducir la fuerza de trabajo. En tanto que el sector III producirá bienes de lujo a razón de una cantidad que iguale la magnitud de plusvalor producido y apropiado por los capitalistas de los tres sectores. De todo ello, obtenemos:

$$\begin{cases} c_I + (1+r)v_I = c_I + c_{II} + c_{III} \\ c_{II} + (1+r)v_{II} = v_I + v_{II} + v_{III} \\ c_{III} + (1+r)v_{III} = p_I + p_{II} + p_{III} \end{cases} \quad [5]$$

De [5] se infieren las siguientes sumas:

$$\begin{cases} c_I + c_{II} + c_{III} = C \\ v_I + v_{II} + v_{III} = V \\ p_I + p_{II} + p_{III} = P \end{cases} \quad [6]$$

Del sistema de ecuaciones [6] se obtiene la *tasa general de ganancia*:

$$\pi = \frac{P}{C + V} \quad [7]$$

Expresado en otros términos:

$$\begin{cases} c_I + v_I + \pi(c_I + v_I) \\ c_{II} + v_{II} + \pi(c_{II} + v_{II}) \\ c_{III} + v_{III} + \pi(c_{III} + v_{III}) \end{cases} \quad [8]$$

El sistema [8] denota los precios de producción de las mercancías de los tres sectores que componen la economía de acuerdo con la solución de Marx. Nótese que *la suma total de precios coincide con la suma total de los valores*.

Empero, Bortkiewicz arguye que el sistema [8] es inapropiado en la medida en que *los insumos de capital constante y de capital variable se encuentran todavía medidos en valores, mientras que el producto se expresa en términos de precios de producción*. A partir de aquí Bortkiewicz desarrolla su solución del *problema de la transformación*. En primer lugar, supongamos que las mercancías del sector I muestran una relación del valor con respecto del precio de X a 1. Para el sector II la relación es Y a 1 mientras que en el sector III es Z a 1. De este modo, tenemos:

$$\begin{cases} (c_I x + v_I y)(1 + \pi) = (c_I + c_{II} + c_{III})x \\ (c_{II} x + v_{II} y)(1 + \pi) = (v_I + v_{II} + v_{III})y \\ (c_{III} x + v_{III} y)(1 + \pi) = (p_I + p_{II} + p_{III})z \end{cases} \quad [9]$$

Se obtienen tres ecuaciones con cuatro incógnitas: (π, x, y, z) . En vista de que falta una ecuación, Bortkiewicz toma la solución de convertir el precio de una mercancía a la unidad transformándola en *numerario* con el objeto de reducir el número de incógnitas a tres. Con tal propósito, convierte en *invariante* el sector III de bienes de lujo a fin de que los precios se expresen en términos del valor del oro, en cuanto *mercancía numerario*. Esto es:

$$z = 1 \quad [10]$$

Así, el número de incógnitas queda reducido a tres: (π, x, y) . Finalmente, la solución algebraica a la que se llega siguiendo a Bortkiewicz es:

$$\pi = \frac{f_{II}g_I + g_{II} - \sqrt{(f_{II}g_I - g_{II})^2 + 4f_Ig_Ig_{II}}}{2(f_{II} - f_I)} - 1 \quad [11a]$$

$$z = 1 \quad [11b]$$

$$y = \frac{g_{III}}{g_{II} + (f_{III} - f_{II})(1 + \pi)} \quad [11c]$$

$$x = \frac{f_I y (1 + \pi)}{g_I - (1 + \pi)} \quad [11d]$$

Donde:

$$\begin{aligned} f_I &= \frac{v_I}{c_I}; & g_I &= \frac{v_I + c_I + p_I}{c_I} \\ f_{II} &= \frac{v_{II}}{c_{II}}; & g_I &= \frac{v_{II} + c_I + p_I}{c_I} \\ f_{III} &= \frac{v_{III}}{c_{III}}; & g_I &= \frac{v_{III} + c_{III} + p_{III}}{c_{III}} \end{aligned}$$

Obsérvese que la solución que alcanza Bortkiewicz es factible en virtud de la existencia de una *mercancía patrón* en sentido de Ricardo (1821). Vale decir que dicha *medida invariable de valor* es incompatible con la teoría del dinero de Marx (1867; 1956), por cuanto el dinero mercancía, *id est*, el oro, para que sea *medida de valor*, su valor ha de ser, *stricto sensu*, variable.

Por otra parte, Pasinetti (1975, p. 28) sostiene que la solución de Bortkiewicz invalida las hipótesis de Marx, a saber: i) la suma total de valores es igual a la suma total de los precios de producción; y ii) la suma de la masa del plusvalor es idéntica a la suma de la masa de ganancias.

Empero, Valle Baeza (1991) señala con sumo acierto un aspecto soslayado por Bortkiewicz y Pasinetti: *el oro en cuanto dinero mercancía no puede incluirse como incógnita*. Valle Baeza aduce que *el dinero mercancía en forma alguna podrá intercambiarse consigo mismo en proporciones distintas a las del punto de partida*. En el problema de Bortkiewicz, sostiene Valle Baeza, *sobra una ecuación*.

Más aún, Emmanuel (1970) observa que Bortkiewicz aun cuando calcula correctamente los valores relativos, su solución fracasa en cuanto que se trata del valor absoluto medido en cantidad de trabajo social.

Para Emmanuel, lo insatisfactorio de la solución de Bortkiewicz es: i) elige como invariante o *mercancía patrón* $z = 1$; ii) el supuesto de reproducción simple es harto restrictivo e irreal, puesto que garantiza en todo momento un *equilibrio* incompatible con las leyes del movimiento del capitalismo.

No en vano, Winternitz en su artículo publicado en 1948 bajo el título de *Value and Prices: A solution of the so Called Transformation Problem*, desarrolla una solución del problema de la transformación de valores en precios de producción basada en Bortkiewicz, pero sin considerar como *numerario* el oro ($z = 1$). En este caso, Winternitz adopta el *invariante* de Moszkowska (1929): la *unidad de trabajo* o *valor agregado*.

Conviene destacar que la solución de Winternitz parte del *esquema marxiano trisectorial* y de reproducción simple de Bortkiewicz medido en términos de valor. Por tanto, tenemos:

$$\begin{cases} V_I = c_I + v_I + p_I = a_I \\ V_{II} = c_{II} + v_{II} + p_{II} = a_{II} \\ V_{III} = c_{III} + v_{III} + p_{III} = a_{III} \end{cases} \quad [12]$$

Transformando los valores en los precios de producción se obtiene el siguiente esquema de ecuaciones:

$$\begin{cases} c_I x + v_I y + p_I = a_I x \\ c_{II} x + v_{II} y + p_{II} = a_{II} y \\ c_{III} x + v_{III} y + p_{III} = a_{III} z \end{cases} \quad [13]$$

Puesto que Winternitz presupone, al igual que Bortkiewicz, que el sector III no afecta en absoluto a la tasa media de ganancia, la tasa de ganancia del sector I y la del sector II ha de ser la misma:

$$1 + \pi = \frac{a_I x}{c_I x + v_I y} = \frac{a_{II} y}{c_{II} x + v_{II} y} \quad [14]$$

De la ecuación [12] se desprende:

$$m = \frac{a_I c_I - a_I v_I + \sqrt{(a_{II} c_I - a_I v_I)^2 + 4a_I a_{II} v_I c_{II}}}{2a_I c_{II}} \quad [15]$$

Dada m , se obtiene la tasa general de ganancia:

$$\pi = \frac{a_I m}{c_I m + v_I} - 1 \quad [16]$$

Llegados a este punto, Winternitz (1948, p. 279) escribe: "The obvious proposition in the spirit of the Marxian system is that the sum of prices is equal to the sum of values". Esto significa que ha de abandonarse la *mercancía patrón* de Bortkiewicz, y adoptar como invariante el *valor agregado*. Por consiguiente, la suma de precios cambiará conforme con las variaciones que experimenta el tiempo socialmente necesario para producir las mercancías. Dicho de otro modo, los valores actuarán como centros de gravedad sobre los que orbitarán los precios de producción. Así pues, Winternitz llega a esta ecuación:

$$a_I x + a_{II} y + a_{III} z = a_I + a_{II} + a_{III} = a \quad [17]$$

Si sustituimos $y = \frac{x}{m}$ al tiempo que eliminamos con el objeto de igualar la tasa de ganancia del sector III con las del sector I y II, se tiene:

$$x = \frac{am(c_I m + v_I)}{a_I m(c_{III} m + v_{III}) + (a_I m + a_{II})(c_I m + v_I)} \quad [18a]$$

$$z = \frac{a_I(c_{III} m + v_{III})x}{a_{III}(c_I m + v_I)} \quad [18b]$$

Según Winternitz, si aplicamos esta transformación para las ecuaciones de la reproducción simple del capital, las mismas no sólo serán *invariantes* para esta transformación en concreto, sino que lo serán para toda transformación que afecte simultáneamente los precios de los insumos y los precios de los productos. Winternitz sostiene, además, que esta transformación mantendrá su vigencia incluso al pasar a las condiciones dinámicas de la reproducción en escala ampliada.

El gran acierto de Winternitz consistió, pues, en haber planteado una solución para el problema de la transformación superando las irreales y harto restrictivas condiciones de Bortkiewicz basadas en la *reproducción simple del capital*. Mas, por otra parte, el gran yerro de Winternitz fue el haber elegido como *invariante* la *unidad de trabajo (valor agregado)*.

Emmanuel (1970) subraya que la elección de Moszkowska y de Winternitz de la unidad de trabajo como invariante conduce a la desaparición de las determinaciones esenciales por el tiempo de *trabajo socialmente necesario* y la *tasa de plusvalor*.

Más concretamente, en tanto que la elección de la unidad de trabajo como invariante permite el cumplimiento de la igualdad entre la suma de los valores y la suma de los precios de producción, esta, empero, se trata de una igualdad *ex post*. En consecuencia, excluye la determinación principal de los precios por los valores: la *igualdad de las tasas de explotación*.

En efecto, en la medida en que la solución de Bortkiewicz conlleva el rechazo de las dos igualdades de Marx, la solución de Winternitz tan sólo garantiza el cumplimiento de una de ellas, a saber: *la suma total de los valores coincide con la suma total de los precios de producción*. Tanto Bortkiewicz como Winternitz fracasan en su cometido por dar respuesta al *problema de la transformación*.

Baste mencionar, no obstante, que desde que fuera publicada en 1948 la fallida solución Winternitz hubieron de pasar nueve largo años para que apareciese el trabajo de Seton (1957) titulado *Transformation Problem*.

En dicho trabajo la gran aportación de Seton fue haber extendido la solución del problema de la transformación al caso de n -sectores y n -mercancías. Desai (1988) destaca que la solución de Seton se benefició gratamente de la revolución que supuso el dominio del análisis insumo-producto de Leontief, la generalización del teorema de Perron-Frobenius y la comprensión de la noción de dualidad a través de la programación lineal. Cabe reseñar, por otro lado, que el avance que supuso la solución de Seton lo llevó a colaborar con Morishima para la publicación en 1961 del interesante artículo titulado *Aggregation in Leontief Matrices and the Labour Theory of Value*.

En este caso, Morishima y Seton tomaron el *punto de vista* de Tugan-Baranowsky, esto es, examinaron el problema de la transformación por medio de la *conversión inversa de precios de producción en valores*.

Este primer intento por parte de Morishima (1973) lo llevaría a desarrollar doce años más tarde su propia solución del problema de la transformación, la cual se recoge brillantemente en su inmortal *La teoría económica de Marx: una teoría dual del valor y el crecimiento*. Ante su importancia, resulta apropiado interpolar el debate Samuelson-Baumol-Morishima en el siguiente apartado con la ulterior explicación de la solución de Morishima basada en el método iterativo.

El debate Samuelson-Baumol-Morishima

En su afamado trabajo, *La teoría económica de Marx*, Morishima (1973) se consagró a la laboriosa tarea de traducir el edificio teórico de Marx al lenguaje matemático de la moderna economía. El problema de la transformación mereció por parte de Morishima la mayor de sus atenciones, tanto más cuanto que por aquel entonces el profesor Samuelson (1957; 1971; 1974) tuvo a bien tomar el testigo de Böhm-Bawerk en la delicada y al tiempo que sombría empresa de derruir el sistema marxiano.

De ello nacería el *debate Samuelson-Baumol-Morishima*, empero, serán Samuelson y Morishima quienes ocuparán las líneas de esta argumentación. Situemos el contexto cronológico del mismo. En 1957, el profesor Samuelson publicó su artículo *Wages and Interest: A Modern Dissection of Marxian Economic Models*, en donde sostenía que la teoría del valor de Marx sólo podía operar a razón *una tasa de explotación y una tasa de ganancia nulas*.

La consecuente respuesta de Morishima (1973) fue que Samuelson no tuvo en cuenta que el propósito último de Marx no era tanto demostrar la proporcionalidad entre los valores y los precios, sino su opuesto: *en el modo capitalista de producción los valores y los precios necesariamente han de desviarse*.

En 1971, Samuelson retoma esta cuestión en su *Understanding the Marxian notion of exploitation: a summary of the so-called transformation problem between Marxian values and competitive prices*. Aquí Samuelson arguye que el cálculo de los valores hecho por Marx en el libro I es redundante e innecesario, a la par que confuso y complejo.

Morishima (1973; 1974) levanta contra el profesor Samuelson la objeción de que su crítica soslaya el propósito mismo del carácter dual del sistema de cálculo de Marx. *Id est*, la tasa de plusvalor corresponde al sistema de cálculo de valores por cuanto su cometido es desvelar que el origen de la ganancia se oculta detrás de una relación de dominación y explotación, mientras que la tasa de ganancia se reserva al sistema de cálculo de precios de producción merced a la existencia de la competencia entre capitales.

Samuelson (1974) lejos de rehuir el debate respondió con vehemencia a sus dos principales detractores, Baumol (1974) y Morishima (1973; 1974), en su *Insight and Detour in the Theory of Exploitation: A Reply to Baumol*. Samuelson sorprende a sus contendientes exponiendo su contracritica por medio de la fórmula tricotómica del método dialéctico de Fichte y de Hegel. i) Primero comienza desgranando la *tesis* o *momento de la afirmación* de los profesores Baumol y Morishima: *el origen de la ganancia se encuentra en el plusvalor apropiado en la esfera de producción*. ii) A continuación, Samuelson (1974, p. 63) pasa a la *antítesis* o *momento de la negación*: *el plusvalor no es la fuente de la ganancia capitalista*. iii) Finalmente, cierra su ensayo con la *síntesis* o *momento de la negación de la negación*.

La réplica de Morishima (1974) fue inmediata con la publicación de su artículo *The Fundamental Marxian Theorem: A Reply to Samuelson*. La *antítesis* de Samuelson hubo de sucumbir de este modo ante el *teorema fundamental marxiano*. La *condición necesaria y suficiente* para el sostenimiento del orden de sociedad capitalista es que entre los productores de mercancías y los propietarios de los medios de producción medie una relación social de producción basada en la explotación.

Más concretamente, la *condición necesaria y suficiente para el sostenimiento del orden de sociedad capitalista es que el grado de explotación de la fuerza de trabajo sea positivo* ($e > 0$). Tras este interludio, nuestra atención deberá dirigirse en lo que sigue a la solución del problema de la transformación de valores en precios de producción de Morishima (1973, pp. 88-101).

Procedimiento iterativo de Morishima para la solución del problema de la transformación

Para nuestros propósitos explicativos es necesario desglosar las cinco hipótesis que aparecen en el capítulo IX del III libro de *El Capital* de Marx, a saber:

1. Hipótesis I: la suma de los valores de las mercancías es proporcional a la suma de sus precios de producción.
2. Hipótesis II: el precio de coste de las mercancías es menor que su valor.

3. Hipótesis III: la masa total de plusvalor es idéntica a la masa total de la ganancia.
4. Hipótesis IV: la proporcionalidad entre valores y precios de producción sólo se cumple cuando la composición orgánica del capital es igual al capital social medio.
5. Hipótesis V: cuando la composición orgánica del capital de un sector es menor (o mayor) que el capital social medio, los valores de las mercancías son superiores (o inferiores) a los precios de producción.

En relación con estas cinco hipótesis, Morishima señala que mientras la tasa media general de ganancia sea positiva los precios de producción de las mercancías han de situarse por encima de sus correspondientes valores, invalidando así las hipótesis I y III de Marx.

Basta señalar aquí que la única forma para que se verifiquen ambas hipótesis es que tanto la tasa de ganancia como la tasa de plusvalor sean iguales a cero, tal y como aseveró Samuelson en 1957.

¿Significa esto que Morishima reconoce como válida la observación del profesor Samuelson? La respuesta es negativa por cuanto Marx en el libro III sólo consideró idénticas la masa de la ganancia y la masa del plusvalor en relación con los casos particulares de cada industria. El único modo de que las ganancias y el plusvalor coincidan es que la composición orgánica del capital sea uniforme en todos los ramos de la producción.

O, dicho en otros términos, la *condición necesaria y suficiente* para que la masa del plusvalor y la masa de las ganancias sean idénticas es que la composición orgánica del capital sea la misma en los m -sectores que componen una economía nacional.

Con el objeto de demostrar esta *condición necesaria y suficiente*, supondremos que C_i y V_i corresponden a la cantidad de *capital constante* y *capital variable* necesaria para producir una unidad de la i -énimesima mercancía en términos de valor, en tanto que C_i^p y V_i^p denotan las mismas variables en términos de precios de producción. Obtenemos, por ende, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$C_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_{ij}; V_i = \omega \left(\sum_{j=n+1}^m \lambda_j b_j \right) l_i \quad [19a]$$

$$C_i^p = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_{ij}; V_i^p = \omega \left(\sum_{j=n+1}^m \lambda_j b_j \right) l_i \quad [19b]$$

En las ecuaciones [19a] y [19b], a_{ij} y l_i se refieren a los coeficientes de insumos de trabajo y de materiales, respectivamente; b_j la cantidad del j -énimesimo bien salario que un trabajador consume al día; en tanto que ω es la inversa del tiempo de trabajo social correspondiente a una jornada laboral. Debe señalarse que de acuerdo con Morishima los insumos de trabajo se encuentran medidos en términos de horas-hombre.

En segundo término, se consideran p_i y Π_i como el *plusvalor* y la ganancia obtenidos por una unidad de la i -enésima mercancía, respectivamente. En conformidad con la hipótesis III de Marx, esto es, que la masa total del plusvalor ($p_i \dots p_m$) debe ser idéntica a la masa total de las ganancias ($\Pi_i \dots \Pi_m$), su cumplimiento sólo podrá verificarse si la composición orgánica del capital es uniforme. Por lo tanto, se tiene:

$$\frac{C_1}{V_1} = \frac{C_2}{V_2} = \dots = \frac{C_m}{V_m} \quad [20]$$

La demostración del carácter necesario de la condición se expresa con las siguientes ecuaciones:

$$\lambda_i - (C_i + V_i) = p_i; \quad (i = 1 \dots m) \quad [21]$$

$$P_i - (C_i^p + V_i^p) = \Pi_i; \quad (i = 1 \dots m) \quad [22]$$

La proporcionalidad entre la masa de plusvalor y la masa de la ganancia se representa como:

$$p_i = \alpha \Pi_i \quad [23]$$

Donde α denota el índice de proporcionalidad. De acuerdo con las definiciones de C_i , V_i , C_i^p y V_i^p , se tiene:

$$(\Lambda - \alpha P) \cdot (I - M) = p_i - \alpha \Pi_i = 0 \quad [24]$$

Siendo:

$$(I - M) = \begin{bmatrix} A_I & A_{II} \\ \omega BL_I & \omega BL_{II} \end{bmatrix} \quad [25]$$

Es importante hacer notar que $(I - M)$ es no singular, por cuanto A_I es positiva, lo cual significa que $\Lambda = \alpha P$. O, más exactamente, los precios de producción son proporcionales a los valores. En virtud de lo anterior se cumplen las igualdades $C_i = \alpha C_i^p$ y $V_i = \alpha V_i^p$, de lo cual se obtiene:

$$\frac{\Pi_i}{C_i^p + V_i^p} = \frac{p_i}{C_i + V_i} = e \cdot \left(\frac{V_i}{C_i + V_i} \right); \quad (i = 1 \dots m) \quad [26]$$

Donde e se refiere a la tasa de plusvalor o tasa de explotación. Puesto que la concurrencia de capitales tiende a nivelar las tasas de ganancia de todos los sectores hasta formar una tasa general de ganancia, se considera que la ecuación [26] es igual para todas las ramas de la producción. Asimismo, dado que la composición orgánica del capital es uniforme, la ecuación [20] podrá reescribirse como:

$$e \cdot \left(\frac{V_1}{C_1 + V_1} \right) = e \cdot \left(\frac{V_2}{C_2 + V_2} \right) = \dots = e \cdot \left(\frac{V_m}{C_m + V_m} \right) \quad [20']$$

Si incluimos π como una ratio común y lo incluimos en la ecuación [21], obtenemos:

$$(1 + \pi) \cdot (C_i + V_i) = \lambda_i; (i = 1 \dots m) \quad [27]$$

En tanto que: $C_i = \alpha C_i^p$ y $V_i = \alpha V_i^p$ para todo P satisface la condición $\lambda_i = \alpha P$, el proceso de igualación de las tasas de ganancia se cumplirá bajo el supuesto de que los valores y los precios de producción son proporcionales:

$$(1 + \pi) \cdot (C_i + V_i) = P_i; (i = 1 \dots m) \quad [28]$$

A partir de este punto, Morishima (1973, p. 90) retoma la solución del capítulo IX del libro III de *El Capital*, y escribe al respecto: "Su objeto [refiriéndose a Marx] es transformar los valores en precios bajo la hipótesis de que las ganancias determinadas por las ecuaciones precio-coste de equilibrio no sean proporcionales a las plusvalías, de manera que las ecuaciones de la composición de valor del capital [20] carecen de aplicabilidad". Así pues, la ecuación de los precios marxianos se expresa como:

$$q_i = (1 + \pi) \cdot (C_i + V_i); (i = 1 \dots m) \quad [29]$$

Empero, conviene resaltar que los precios expresados por [29] podrán desviarse de los precios de equilibrio de la ecuación [28]. Más concretamente, para que los precios de [29] sean proporcionales y/o iguales a los de [28] han de satisfacerse una serie de condiciones adicionales que no se incluyen en la demostración previa.

En este sentido, Morishima considera el *ignominioso olvido* de Marx de no haber transformado los insumos en precios de producción, como el primer paso para la *solución del problema de la transformación*. En opinión de Morishima (1973), el procedimiento de Marx es el correcto en la medida en que el filósofo de Tréveris comenzó un proceso iterativo tomando la posición $P_0 = \lambda$, lo cual conduce a la solución $P_1 = q$, debiéndose por tanto continuar dicha iteración.

Vale la pena reseñar que el *procedimiento de iteración* es adoptado también por Shaikh³ (1978), quien arguye al igual que Morishima que la solución del capítulo IX del libro III de *El Capital* ha de considerarse como el punto de partida del proceso de iteración a aplicar. Examinemos el procedimiento iterativo de Morishima. Es importante comenzar subrayando que la ecuación [20] será *condición suficiente pero no necesaria para el cumplimiento del algoritmo marxiano*, ello obliga a expresar las siguientes ecuaciones equivalentes:

$$\frac{C_i + V_i}{\sum (C_i + V_i)y_i} = \frac{p_i}{\sum p_i y_i}; (i = 1 \dots m) \quad [30]$$

³ Es importante indicar que en su última obra titulada *Capitalism. Competition, conflict, crises*, Shaikh (2016, pp. 221-231) adopta una nueva solución con base en el punto de vista de James Steaurt según el cual existen dos fuentes de la ganancia agregada: la esfera de producción y las transferencias de valor. Esta solución choca de plano con la visión de Marx (1867), quien concibe una única fuente de la ganancia: el plusvalor que dimana de la esfera de producción.

De esta forma, con [30] es factible relajar la condición previa de la total uniformidad de la composición orgánica del capital, pudiendo ser la misma reescrita como:

$$\pi(C + V)M = pM \quad [31a]$$

O, lo que lo mismo:

$$(\pi[C + V] - p)M = 0 \quad [31b]$$

Donde:

$$\pi = \frac{\sum p_j y_j}{\sum (C_j + V_j) y_j} \quad [32]$$

De la ecuación [32] se desprende la singularidad de M en la medida en que $|M| = 0$, pero no viceversa. En relación con esto, la i -enésima columna de la matriz M se compone de los coeficientes de insumos de capital y los coeficientes de insumos de bienes salario de la i -enésima industria. Por ende, la condición $|M| = 0$ se traduce en que una de las columnas de la matriz M podrá ser expresada como una combinación lineal de las demás.

Empero, Morishima (1973) advierte que aun cuando M es singular ello no se traduce en que la ecuación [31] pueda considerarse como la *condición de dependencia lineal entre sectores*. Consecuentemente, la condición de independencia lineal de [31] es menos restrictiva que la *condición de que la tasa de ganancia y la tasa de explotación deben ser iguales* postulada por el profesor Samuelson en 1957. Ahora bien, siguiendo la ecuación [31] y tomando como invariante la unidad de trabajo se verifican que las hipótesis I, II y III de Marx son erróneas. Más exactamente, si el precio de la i -enésima mercancía se encuentra medido en términos de trabajo, es fácil comprobar que este es mayor que su valor. En consecuencia, *la suma de los precios de producción de las mercancías es superior a la suma de sus valores*.

Asimismo, se comprueba que el precio de coste de la i -enésima mercancía es mayor que su valor. Otro tanto ocurre con la masa total de la ganancia y la masa total del plusvalor: *la suma de todas las ganancias es mayor que la suma del plusvalor total producido*.

Ello quiere decir que la elección de la unidad de trabajo como invariante no se encuentra basada en la solución de Marx, en la medida en que el filósofo de Tréveris comenzó normalizando los precios con el objeto de que la transformación de valores en precios de producción no alterase los costes de producción. El *modus operandi* de Marx implica la condición de la ecuación [31], esto es, *los sectores han de ser linealmente dependientes*. Esto obliga a convertir la ecuación [28] en:

$$q_i = (1 + \pi) \cdot (C_i^q + V_i^q); (i = 1 \dots m) \quad [33]$$

De acuerdo con la ecuación [30], obtenemos:

$$C_i^q + V_i^q = C_i + V_i; (i = 1 \dots m) \quad [34]$$

En virtud de ambas ecuaciones y considerando que los sectores son linealmente dependientes, se demuestra que los costes de producción son invariables bajo el supuesto de que los valores son transformados en los precios marxianos. Introduciendo la ecuación de la tasa media de ganancia para m -sectores:

$$\pi = \frac{\sum_{j=1}^m p_j y_j}{\sum_{j=1}^m (C_j + V_j) y_j} \quad [35]$$

Se obtienen de [33] y [34] la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^m q_i y_i = \sum_{i=1}^m (C_i + V_i + p_i) y_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i \quad [36]$$

En conformidad con Morishima (1973, p. 95), la ecuación [36] consiste en una versión revisada de la hipótesis I de Marx, en la medida en que bajo las condiciones de crecimiento equilibrado podrá satisfacerse la igualdad de la suma total de precios de producción y la suma total de los valores de las mercancías.

Por otro lado, de la ecuación [34] se desprende que el valor habrá de ser en todo momento mayor que el precio de coste ($\lambda_i > C_i + V_i$), lo cual significa que la hipótesis II de Marx podrá cumplirse aplicando la revisión de Morishima. Por último, a partir de las ecuaciones [35] y [36] se tiene:

$$\sum_{i=1}^m \Pi_i^q y_i = \sum_{i=1}^m (q_i - C_i^q - V_i^q) y_i = \sum_{i=1}^m p_i y_i \quad [37]$$

De la expresión [37] se desprende que en las condiciones de crecimiento equilibrado la masa total del plusvalor es idéntica a la masa total de ganancias. Llegados a este punto, es de observar, por un lado, que para el cumplimiento de las hipótesis I, II y III de Marx es imperativo desechar la elección de Moszkowska y de Winternitz sobre la *unidad de trabajo* como *invariante*. Por el otro, conviene advertir que para alcanzar estos resultados se han de aceptar dos supuestos harto restrictivos: i) los sectores son linealmente dependientes; ii) la economía se encuentra en estado estacionario para garantizar el crecimiento equilibrado.

Nótese que hasta ahora no nos hemos referido a las hipótesis IV y V de Marx. Cabe decir a este respecto que aun cuando consideremos que los sectores son linealmente dependientes, dichas hipótesis no podrán ser verificadas con la demostración matemática anterior. En vista de ello, es necesario realizar una serie de revisiones adicionales. En primer lugar, bajo el supuesto de que los sectores son linealmente dependientes, la ecuación de la composición orgánica media del capital pasa a definirse como:

$$K = \frac{\sum_{i=1}^m C_i y_i}{\sum_{i=1}^m V_i y_i} \quad [38]$$

Puesto que tasa media de ganancia es:

$$\pi = \frac{\sum p_i}{\sum (C_i + V_i)y_i} = e \cdot \frac{\sum V_i y_i}{\sum (C_i + V_i)y_i} = e \cdot \frac{1}{K + 1} \quad [39]$$

La ecuación [34] pasa a ser:

$$q_i = \left(1 + e \cdot \frac{1}{K + 1}\right) \cdot (C_i + V_i) = C_i + V_i + p_i \cdot \frac{K_i + 1}{K + 1} \quad [40]$$

Siendo $p_i = eV_i$. De esta suerte podrán reformularse las hipótesis IV y V de Marx como:

IV'. El precio de producción de la i -énésima mercancías igual a su valor si y sólo si la composición orgánica del capital del i -énésimo sector es igual al *capital social medio*.

V'. El valor de la i -énésima mercancía producida con una composición orgánica del capital mayor (o menor) que el *capital social medio* será menor (o mayor) que su precio de producción.

IV''. Los precios de producción y los valores de las mercancías serán proporcionales sólo en aquellos sectores que por casualidad presentan una idéntica composición orgánica del capital.

V''. El precio relativo, esto es, el precio de la i -énésima mercancía con respecto a la j -énésima mercancía, será mayor (o menor) que el valor relativo de la i -énésima mercancía con respecto a la j -énésima mercancía, si y sólo si la j -énésima mercancía es mayor (o menor) que la i -énésima mercancía en lo referente a la composición orgánica del capital.

A fin de contrastar la revisión de las hipótesis de Marx hechas por Morishima, procederemos a dividir la ecuación [37] correspondiente al i -énésimo sector por su análoga referida al j -énésimo sector. Baste señalar aquí que de la relación $P_i = \beta q_i$, donde β denota el índice de proporcionalidad, extraída del supuesto de que los sectores son linealmente dependientes, se obtiene la ulterior ecuación de los precios relativos:

$$\frac{P_i}{P_j} = \frac{q_i}{q_j} = \frac{C_i + V_i}{C_j + V_j} = \frac{(K_i + 1)V_i}{(K_j + 1)V_j} \quad [41]$$

Del mismo modo, de las ecuaciones de la determinación de los valores se tiene:

$$\frac{V_i}{V_j} = \frac{K_j + 1 + e}{K_i + 1 + e} \cdot \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \quad [42]$$

De las expresiones [41] y [42] se deduce:

$$\frac{P_i}{P_j} = \left[\frac{K_i + 1}{K_j + 1} \right] \cdot \left[\frac{K_j + 1 + e}{K_i + 1 + e} \right] \cdot \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \quad [43]$$

En consecuencia:

$$\frac{P_i}{P_j} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \quad [44]$$

Siempre y cuando $K_i = K_j$. Puesto que la *condición necesaria y suficiente para el sostenimiento del orden de sociedad capitalista es que el grado de explotación sea positivo* ($e > 0$)

es sencillo demostrar que los precios relativos, $\frac{P_i}{P_j}$, serán mayores (o menores) que los valores relativos, $\frac{\lambda_i}{\lambda_j}$, cuando la composición orgánica del capital del i -enésimo sector es mayor (o menor) que la del j -enésimo sector. Se verifican, pues, las hipótesis IV'' y V'' de Morishima.

Más aún, es factible corroborar las hipótesis de Marx revisadas cuando los sectores dejan de ser linealmente dependientes. En este caso, se supondrán dos sectores cualesquiera productores de medios de producción con idénticas composiciones orgánicas del capital. Puesto que en la tradición marxiana este tipo de industria se denomina sector I, pasaremos a designar su composición orgánica del capital como K_I . Obtenemos, por tanto, la siguiente igualdad:

$$\frac{C_{Ia}}{V_{Ia}} = \frac{C_{Ib}}{C_{Ib}} = \dots = \frac{C_{In}}{C_{In}} = K_I \quad [45]$$

Es importante hacer notar que en los ramos de la producción de bienes salario la composición orgánica del capital será inferior que en los sectores de medios de producción. Lo cual significa que la condición de que los sectores son linealmente dependientes no tiene por qué cumplirse necesariamente. Así pues, se procede a demostrar las hipótesis revisadas IV'' y V'' mediante la ecuación [45] comenzando por:

$$P_{I,w} = \alpha_I \Lambda_I \quad [46]$$

De acuerdo con Morishima (1973), la expresión [46] ha de ser considerada como una solución de las ecuaciones para la determinación de los precios de producción del sector I, esto es:

$$P_I = (1 + \pi) \cdot (P_I A_I + w L_I) \quad [47]$$

Cabe añadir que α_I se trata de un escalar que debe ser determinado, en tanto que en la demostración de que [46] es solución de [47], ha de contrastarse que los precios de producción del sector I son proporcionales a sus valores. Para ello se sustituye $P_{I,w}$ de [46] en [47], obteniendo así:

$$\alpha_I \Lambda_I = (1 + \pi) \cdot (\alpha_I \Lambda_I A_I + w L_I) \quad [48]$$

Siendo [48] expresada en n ecuaciones matriciales:

$$\alpha_I \lambda_i = (1 + \pi) \cdot (\alpha_I C_i + l_i); \quad (i = 1, \dots, n) \quad [49]$$

Se puede reducir [49] a una única ecuación:

$$\alpha_I \lambda_{Ia} = (1 + \pi) \cdot (\alpha_I C_{Ia} + l_{Ia}) \quad [50]$$

De donde se desprende que en virtud de la total uniformidad en la composición orgánica del capital de los n -sectores de medios de producción, se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\frac{\lambda_{Ia}}{l_{Ia}} = \frac{\lambda_{Ib}}{l_{Ib}} = \dots = \frac{\lambda_{In}}{l_{In}} \quad [51a]$$

$$\frac{C_{Ia}}{l_{Ia}} = \frac{C_{Ia}}{l_{Ia}} = \dots = \frac{C_{In}}{l_{In}} \quad [51b]$$

De igual modo, la ecuación del valor del sector I_a se escribe como:

$$\lambda_{Ia} = C_{Ia} + V_{Ia} + p_{Ia} \quad [52]$$

La expresión [52] permite eliminar λ_{Ia} de la ecuación [50], de tal suerte que:

$$\alpha_I = \frac{1 + \pi}{1 - \pi \left(\frac{C_{Ia}}{l_{Ia}} \right)} \quad [53]$$

De dicha demostración matemática se infiere de [46] y de [53] que cuanto mayor es la tasa de ganancia, tanto mayor será la desviación entre los precios de producción y los valores de las mercancías del sector I. En cuanto a las mercancías producidas por el sector II (bienes salario y bienes suntuarios), la expresión para la determinación de dichas mercancías es:

$$\alpha_{II} \lambda_{II} = (1 + \pi) \cdot (\alpha_I C_{II} + l_{II}) \quad [54]$$

Al incluir [52], se tiene:

$$\alpha_{II} = \begin{cases} \frac{1 + \pi}{\left(1 + \frac{C_{II}}{l_{II}}\right)} + \frac{(1 + \pi)^2 \frac{C_{II}}{l_{II}}}{\left(1 - \pi \frac{C_{Ia}}{l_{Ia}}\right) \cdot \left(1 + \frac{C_{II}}{l_{II}}\right)} \\ \alpha_I + \frac{\pi(1 + \pi) \cdot \left(\frac{C_{II}}{l_{II}} - \frac{C_{Ia}}{l_{Ia}}\right)}{\left(1 - \pi \frac{C_{Ia}}{l_{Ia}}\right) \cdot \left(1 + \frac{C_{II}}{l_{II}}\right)} \end{cases} \quad [55]$$

De [55] se deduce que el primer α_i corresponde a un escalar que es función creciente con π . Por consiguiente, la desviación entre el precio de producción del i -ésimo bien salario y/o bien de lujo con respecto a su valor será tanto mayor cuanto mayor sea el aumento de la tasa de ganancia.

En tanto que la expresión segunda de α_i consiste en que $\alpha_{II} = \alpha_I$ cuando la composición orgánica del capital del sector II coincide casualmente con las del sector I de medios de producción. De ello se sigue que α_{II} será mayor (o menor) que α_i cuando la composición orgánica del capital del sector II sea mayor (o menor) que la del sector I. Podemos ir aún más lejos, si cabe, demostrando esta relación para el caso de dos bienes salario y/o bienes de lujo, en adelante, II_a y II_b , a saber:

$$\alpha_{IIa} = \alpha_{IIb} + \frac{\pi(1 + \pi) \cdot \left(1 + \frac{C_{Ia}}{l_{Ia}}\right) \cdot \left(\frac{C_{IIa}}{l_{IIa}} - \frac{C_{IIb}}{l_{IIb}}\right)}{\left(1 - \pi \frac{C_{Ia}}{l_{Ia}}\right) \cdot \left(1 + \frac{C_{IIa}}{l_{IIa}}\right) \cdot \left(1 + \frac{C_{IIb}}{l_{IIb}}\right)} \quad [56]$$

De [56] se advierte que α_{IIa} será mayor (o menor) que α_{IIb} cuando $\frac{C_{IIa}}{l_{IIa}}$ es mayor (o menor) que $\frac{C_{IIb}}{l_{IIb}}$. Queda demostrado, pues, el cumplimiento de las hipótesis revisadas IV'' y V''. En vista de esto, se coligen dos cuestiones:

- 1) Bajo el modo capitalista de producción, los precios de las mercancías medidos en unidad de trabajo habrán de desviarse necesariamente de sus correspondientes valores.
- 2) De acuerdo con la demostración de Morishima, es factible obtener precios relativos que igualen los valores relativos, si y sólo si, cuando la composición orgánica del capital sea idéntica.

El procedimiento de Morishima corrobora las hipótesis de Marx siempre y cuando se realicen las pertinentes revisiones. En este sentido, Morishima (1973, p. 100) concluye que: "si bien incurrió en frecuentes confusiones, Marx resolvió con éxito el problema de la transformación".

Cabe reseñar, no obstante, que, aunque Morishima reconoce la victoria de Marx en esta cuestión, el economista japonés sorprende a sus lectores en último capítulo de su obra titulado "Revisión de la teoría del valor trabajo". Morishima (1973) hace tambalear aquí los más sólidos pilares del edificio teórico de Marx al proponer a sus discípulos el abandono definitivo de la teoría del valor trabajo. Este duro alegato empuja a preguntarse: ¿es factible un Marx sin la teoría del valor trabajo? Dejemos que sea, pues, el propio Marx (1939, p. 21) quien responda a dicha cuestión y replique a Morishima:

Parece justo comenzar por lo real y lo concreto, por el supuesto efectivo; así, por ej., en la economía, por la población que es la base y el sujeto del acto social de la producción en su conjunto. Sin embargo, si se examina con mayor atención, esto se revela [[como]] falso. La población es una abstracción si de lado de lado, p. ej., las clases de que se compone. Esas clases son, a su vez, una palabra huera si desconozco los elementos sobre los cuales reposan, p. ej., el trabajo asalariado, el capital, etc. Estos últimos suponen el cambio, la división del trabajo, los precios, etc. El capital, por ejemplo, no es nada sin trabajo asalariado, sin valor, dinero, precios, etc. Si comenzara, pues, por la población, tendría una representación caótica del conjunto y, precisando cada vez más, llegaría analíticamente a conceptos cada vez más simples: de lo concreto representado llegaría a abstracciones cada vez más sutiles hasta alcanzar las determinaciones más simples.

Conclusiones

A la luz de lo desarrollado en esta revisión de literatura, se evidencia que aun cuando Marx

planteó correctamente el primer paso para resolver el azaroso problema de la transformación, la solución matemática legada en libro III de *El Capital* dista por completo de ser satisfactoria. No debe asombrar que la incomprensión del método de Marx sobreviva hasta nuestros días, tanto más cuanto que el debate en torno al problema de la conversión de valores en precios de producción se encuentra *prima facie* lejos de ser zanjado.

Si bien aquí se ha priorizado la solución de Morishima basada en el método de iteración, es importante resaltar que en la literatura de economía política aparece la interesante aportación de Freeman (1995) y de Kliman (2007), ente otros, conocida bajo el nombre de *Temporary Single-System*.

De esta suerte, conviven en la moderna economía política dos métodos para dar respuesta al sempiterno problema de la transformación de valores en precios de producción: i) el método iterativo; y ii) el método temporalista. No obstante, cae fuera de los fines de este trabajo profundizar en la comparación de ambas.

La densa y a la par que estimulante discusión teórica no ha sido óbice suficiente para el surgimiento de notables trabajos econométricos (Petrovic, 1987; Ochoa, 1989; Tsoulfidis y Manitias, 2002; Tsoulfidis, 2008; Sánchez y Nieto Ferrández, 2010), los cuales verifican empíricamente la hipótesis de Marx. Dichos trabajos ofrecen suficiente evidencia estadística que apunta que el valor de las mercancías actúa como un centro de gravedad sobre el que orbitan los precios de producción y los precios de mercado en el largo plazo.

Grosso modo, debe comprenderse que la rigurosa aplicación del método de la economía política de Marx lo emplazó a iniciar su análisis por la esfera más *abstracta* del modo de producción capitalista que oculta tras de sí los *nexos* más *concretos* del capital. Los cuales, sea dicho de paso, indefectiblemente han de trastocar la *teoría del valor trabajo*.

Referencias

- Baumol, W. J. (1974). The Transformation of Values: What Marx "Really" Meant (An Interpretation). *Journal of Economic Literature*, 12(1), 51-62.
- Böhm-Bawerk, E. V. (1896). *La conclusión del sistema de Marx*. Madrid: Unión Editorial.
- Bortkiewicz, L. V. (1907). Contribución a una rectificación de los fundamentos de la construcción teórica de Marx en el volumen III de *El Capital*. En R. Hilferding, E. V. Böhm-Bawerk y L. V. Bortkiewicz (Ed.), *Economía burguesa y economía socialista* (pp. 191-213). Buenos Aires: Cuadernos de Pasado y Presente.
- Desai, M. (1988). The Transformation Problem. *Journal of Economic Surveys*, 2(4), 295-333.
- Emmanuel, A. (1970). El problema del intercambio desigual (respuesta a Palloix). En A. Emmanuel, C. Bettelheim, S. Amin y C. Palloix (Ed.), *Imperialismo y comercio internacional. El intercambio desigual* (pp. 185-220). Madrid: Siglo XXI.
- Engels, F. (1885). Prólogo. En K. Marx, *El Capital: crítica de la economía política*, libro II, (pp. 7-22). México: Fondo de Cultura Económica.

- Freeman, A. (1995). Marx without Equilibrium. *Capital y Class*, 19(2), 49-89.
- Grossmann, H. (1929). *La ley de la acumulación y del derrumbe del sistema capitalista: una teoría de la crisis*. México: Siglo XXI.
- Hilferding, R. (1904). La crítica de Böhm-Bawerk a Marx. En R. Hilferding, E. V. Böhm-Bawerk y L. Von Bortkiewicz (Ed.), *Economía burguesa y economía socialista* (pp. 129-189). Buenos Aires: Cuadernos de Pasado y Presente.
- Kliman, A. (2007). *Reclaiming Marx's Capital: A refutation of The Myth of Inconsistency*. Lanham: Lexington Books.
- Marx, K. (1867). *El Capital: crítica de la economía política*, libro I. México: Fondo de Cultura Económica.
- Marx, K. (1885). *El Capital: crítica de la economía política*, libro II. México: Fondo de Cultura Económica.
- Marx, K. (1894). *El Capital: crítica de la economía política*, libro III. México: Fondo de Cultura Económica.
- Marx, K. (1939). *Elementos fundamentales para la crítica de la economía política, borrador 1857-1858, Grundrisse*, libro I. Madrid: Siglo XXI.
- Marx, K. (1956). *Teorías sobre la plusvalía*, libro I. México: Fondo de Cultura Económica.
- Morishima, M. (1973). *La teoría económica de Marx. Una teoría dual del valor y el crecimiento*. Barcelona: Tecnos.
- Morishima, M. (1974). The Fundamental Marxian Theorem: A Reply to Samuelson. *Journal of Economic Literature*, 12(1), 71-74.
- Morishima, M., y Seton, F. (1961). Aggregation in Leontief Matrices and The Labour Theory of Value. *Econometrica: Journal of The Econometric Society*, 29(2), 203-220.
- Moszkowska, N. (1929). *El sistema de Marx. Un aporte para su construcción*. Buenos Aires: Cuadernos de Pasado y Presente.
- Ochoa, E. (1989). Values, Prices, and Wage-Profit Curves in the US Economy. *Cambridge Journal of Economics*, 13(3), 413-429.
- Pareto, V. (1899). Le troisième livre du Capital. En V. Pareto, *Marxisme et économie pure* (pp. 112-114). Ginebra: Droz.
- Pasinetti, L. (1975). *Lecciones de la teoría de la producción*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Petrovic, P. (1987). The Deviation of Production Prices from Labour Values: Some Methodology and Empirical Evidence. *Cambridge Journal of Economics*, 11(3), 197-210.
- Ricardo, D. (1821). *Principios de economía política y tributación*. Madrid: Hora H.
- Rubin, I. I. (1928). *Ensayos sobre la teoría marxista del valor*. Buenos Aires: Cuadernos de Pasado y Presente.
- Samuelson, P. (1957). Wages and Interest: A Modern Dissection of Marxian Economic Models. *The American Economic Review*, 47(6), 884-912.
- Samuelson, P. (1971). Understanding The Marxian Notion of Exploitation: A Summary of the So-Called Transformation Problem Between Marxian Values and Competitive Prices.

- Journal of Economic Literature*, 9(2), 399-431.
- Samuelson, P. (1974). Insight and Detour in The Theory of Exploitation: A Reply to Baumol. *Journal of Economic Literature*, 12(1), 62-70.
- Sánchez, C., y Nieto Ferrández, M. (2010). Valores, precios de producción y precios de mercado a partir de los datos de la economía española. *Investigación económica*, 69(274), 87-118.
- Seton, F. (1957). The Transformation Problem. *The Review of Economic Studies*, 24(3), 149-160.
- Shaikh, A. (1978). La teoría del valor de Marx y el problema de la transformación. *Investigación Económica*, 37(144), 225-274.
- Shaikh, A. (2016). *Capitalism. Competition, Conflict, Crises*. Nueva York: Oxford University Press.
- Sombart, W. (1894). Toward a Critique of the Economic System of Karl Marx. *Archiv für soziale Gesetzgebung und Statistik*, 7, 555-594.
- Tsoufidis, L. (2008). Price-Value Deviations: Further Evidence from Input-Output Data of Japan. *International Review of Applied Economics*, 22(6), 707-724.
- Tsoufidis, L., y Maniatis, T. (2002). Values, Prices of Production and Market Prices: Some More Evidence from the Greek Economy. *Cambridge Journal of Economics*, 26(3), 359-369.
- Tugan-Baranowsky, M. (1905). *Fundamentos teóricos del marxismo*. Madrid: Hijos de Reus.
- Valle Baeza, A. (1991). *Valor y precio: una forma de regulación del trabajo social*. México: Universidad Nacional Autónoma de México.
- Veblen, T. (1895). The Capital, vol. III. *Journal of Political Economy*, 3, 218-219.
- Winternitz, J. (1948). Values and Prices: A Solution of the So-Called Transformation Problem. *The Economic Journal*, 58(239), 276-280.