Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 18, No 1, p. 1–8, enero–junio de 2000

Solución de las ecuaciones de Einstein para espacio-tiempos de Weyl en coordenadas esferoidales generalizadas

Javier F. Ramos y Guillermo A. González*

Resumen

Se obtiene una solución general exacta de las ecuaciones de Einstein en el vacío para la métrica estática axialmente simétrica, en términos del sistema de coordenadas esferoidales generalizadas, el cual contiene como casos particulares los sistemas de coordenadas esferoidales prolatas, esferoidales oblatas y esféricas. La solución obtenida es una generalización de las soluciones correspondientes a cada uno de estos tres casos.

1. Introducción

En toda teoría física hay dos elementos fundamentales que la constituyen: en primer lugar, tenemos un conjunto de ecuaciones diferenciales cuya solución genera un grupo de resultados matemáticos; por otra parte, tenemos un conjunto de reglas que establecen la conexión entre los resultados matemáticos obtenidos y los fenómenos del mundo físico. Ambas partes son fundamentales e igualmente importantes en lo que respecta al desarrollo de una teoría física. Así, el problema netamente matemático de analizar, tanto como sea posible, el conjunto de ecuaciones diferenciales que la componen, resulta tan trascendente como el concerniente a la interpretación física de las soluciones obtenidas. El tema de las soluciones exactas se encuentra enmarcado precisamente en la primera etapa, y está encaminado al estudio exhaustivo de las ecuaciones diferenciales que rigen al campo gravitacional en la teoría general de la relatividad.

*Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, Colombia, Email: guillego@uis.edu.co

Una solución exacta de las ecuaciones de Einstein es, sencillamente, una métrica cuyas componentes están dadas en términos de funciones analíticas bien conocidas. Su importancia en física teórica es más que reconocida, siendo varias las razones por las cuales dicho elemento es tomado en cuenta en numerosos problemas. Este trabajo está enmarcado dentro del tema de las soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein. Trataremos específicamente con una de ellas: la solución de Weyl. Es la solución exacta que se obtiene de las ecuaciones de Einstein cuando en ellas se introducen la simetría temporal y la simetría axial. Es por eso que recibe el nombre de "métrica estática axialmente simétrica".

La introducción de diversos sistemas de coordenadas está dada por la naturaleza geométrica que puedan tener los objetos que originan el campo gravitacional. Así, encontramos trabajos en donde las soluciones están expresadas, por ejemplo, en términos de coordenadas esferoidales prolatas o en términos de coordenadas esferoidales oblatas, dependiendo de si la fuente tenga forma elipsoidal o tenga forma de disco. Si la fuente es esférica o puntual, el problema, naturalmente, presentará simetría esférica, la cual es un caso especial de la simetría axial, y sus soluciones deberán expresarse en coordenadas esféricas.

Aunque los tres anteriores casos (al ser simétricos axial y temporalmente) representan soluciones de Weyl, constituyen problemas distintos, en donde existe una solución exacta diferente para cada sistema de coordenadas. El objetivo central de este trabajo es mostrar de qué manera podemos reunir estos tres problemas en uno sólo. Es decir, definiendo un sistema de coordenadas generalizado, del cual las coordenadas esferoidales prolatas, esferoidales oblatas y esféricas son casos particulares, hallamos una sola solución exacta que reúna las tres anteriores. De esta forma podemos sintetizar una cantidad de resultados dispersos en un sólo concepto general.

2. Espacio-tiempo estático con simetría axial

Consideremos el problema correspondiente a un campo gravitacional estático axialmente simétrico, el cual define una geometría espacio-temporal caracterizada por el elemento de línea de Weyl [1, 2]:

$$ds^2 = -e^{2\psi}dt^2 + e^{-2\psi}[\ \rho^2 d\varphi^2 + e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2)\ ], \tag{2.1}$$

donde $x^a = (t, \varphi, \rho, z)$ son coordenadas cuasi-cilíndricas y las funciones ψ y γ dependen sólo de las coordenadas ρ y z. La naturaleza cuasi-cilíndrica [3] de las coordenadas significa que $\rho = 0$ sobre el eje de simetría y, para z fijo, ρ crece monótonamente al infinito, mientras que z, para ρ fijo, crece monótonamente en el intervalo $(-\infty, \infty)$. La coordenada φ varía en el intervalo usual $[0, 2\pi)$.

Las ecuaciones de Einstein en el vacío, $R_{ab} = 0$, para el campo gravitacional estático axialmente simétrico, en coordenadas cuasi-cilíndricas, son equivalentes al sistema de ecuaciones diferenciales parciales [1, 4]

$$\psi_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\psi_{,\rho} + \psi_{,zz} = 0, \tag{2.2}$$

$$\gamma_{,\rho} = \rho(\psi_{,\rho}^2 - \psi_{,z}^2), \tag{2.3}$$

$$\gamma_{,z} = 2\rho\psi_{,\rho}\psi_{,z}, \tag{2.4}$$

donde los subíndices denotan derivación parcial. La primera de estas tres ecuaciones es la conocida ecuación de Laplace tridimensional axialmente simétrica, en coordenadas cilíndricas, para la función ψ, cuya solución general es ampliamente conocida [5, 6]

Las otras dos ecuaciones diferenciales son no lineales y dependen de ψ, la cual ya está determinada. En primera instancia diríamos que, dado que ψ ya está determinada, también lo estará la función γ. Sin embargo, es necesario verificar primero si el sistema sobredeterminado de ecuaciones (2.3)-(2.4) tiene solución analítica, es decir, si existe γ como solución exacta. La condición de analiticidad para este caso está dada por

$$\gamma_{,\rho z} = \gamma_{,z\rho}, \tag{2.5}$$

la cual se satisface como consecuencia directa de la ecuación de Laplace (2.2), como se puede verificar fácilmente; así entonces, el sistema de ecuaciones diferenciales es integrable.

3. Coordenadas esferoidales generalizadas

Vamos ahora a introducir el sistema de coordenadas esferoidales generalizadas (CEG) (ξ, η, φ) a través de las siguientes relaciones:

$$\xi = \frac{a}{2}[(1+k)\cosh\alpha + (1-k)\mathrm{senh}\alpha], \tag{3.1}$$

$$\eta = \cos\theta, \tag{3.2}$$

donde a es una constante real no negativa y k sólo puede tomar los valores 1 ó -1. Si introducimos $\sigma = \sqrt{k}a$, es fácil ver que $\sigma = 1$, $\sigma = -1$ y $\sigma = 0$

definen, a través de (3.1), los sistemas de coordenadas esferoidales prolatas, esferoidales oblatas y esféricas [4]. Las variables θ y φ son las mismas coordenadas angulares del sistema de coordenadas esféricas: $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Por otra parte, cada valor de α define un elipsoide coordenado centrado en el origen, con focos en a y $-a$.

Las coordenadas cuasi-cilíndricas de Weyl y las CEG se relacionan de la siguiente manera:

$$\rho^2 = (\xi^2 - \sigma^2)(1 - \eta^2), \tag{3.3}$$

$$z = \xi\eta. \tag{3.4}$$

Si introducimos esta transformación de coordenadas en (2.1), obtenemos la expresión para la métrica estática axialmente simétrica en CEG [4]:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\, e^{2\psi} dt^2 \;+\; e^{-2\psi}(\xi^2 - \sigma^2)(1 - \eta^2) d\varphi^2 \\ &+\; e^{2(\gamma-\psi)}(\xi^2 - \sigma^2\eta^2)\left[\frac{d\xi^2}{\xi^2 - \sigma^2} + \frac{d\eta^2}{1 - \eta^2}\right], \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde las funciones ψ y γ sólo dependen de las coordenadas ξ y η.

Las ecuaciones de Einstein en el vacío para la métrica (3.5) tienen la siguiente forma [4]:

$$[(\xi^2 - \sigma^2)\psi_{,\xi}]_{,\xi} \;+\; [(1 - \eta^2)\psi_{,\eta}]_{,\eta} \;=\; 0\,, \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{,\xi} &= \frac{1 - \eta^2}{\xi^2 - \sigma^2\eta^2}\left[\xi(\xi^2 - \sigma^2)\psi_{,\xi}^2\right. \\ &\left. -\, \xi(1 - \eta^2)\psi_{,\eta}^2 - 2\eta(\xi^2 - \sigma^2)\psi_{,\xi}\psi_{,\eta}\right], \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{,\eta} &= \frac{\xi^2 - \sigma^2}{\xi^2 - \sigma^2\eta^2}\left[\eta(\xi^2 - \sigma^2)\psi_{,\xi}^2\right. \\ &\left. -\, \eta(1 - \eta^2)\psi_{,\eta}^2 + 2\xi(1 - \eta^2)\psi_{,\xi}\psi_{,\eta}\right]. \end{aligned} \tag{3.8}$$

La expresión (3.6) es simplemente la ecuación de Laplace tridimensional en CEG, para la función ψ, independiente de φ. Las expresiones (3.7) y (3.8) constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales sobredeterminado, para γ, cuya condición de integrabilidad, tal como en el caso de las coordenadas cuasi-cilíndricas, está garantizada como consecuencia directa de la ecuación de Laplace (3.6).

4. Solución general en CEG

La solución general, de interés físico, para la ecuación de Laplace (3.6), obtenida mediante el método de separación de variables, puede escribirse como [4]:

$$\psi(\varepsilon, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{\sigma^{n+1}}\; Q_n(\varepsilon) P_n(\eta)\;, \tag{4.1}$$

donde $\varepsilon = \xi/\sigma$ y los P_n y Q_n son los polinomios de Legendre y las funciones asociadas de Legendre de segunda clase, respectivamente. Las d_n son constantes arbitrarias y determinan las soluciones particulares de (3.6).

Introduciendo (4.1) en el sistema de ecuaciones (3.7)-(3.8), obtenemos la siguiente solución general [4]:

$$\gamma(\varepsilon, \eta) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{d_n d_m}{\sigma^{n+m+2}} \Gamma^{mn}, \tag{4.2}$$

donde

$$\begin{aligned}
\Gamma^{mn} \;&=\; \frac{1}{2} \ln\left[\frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2 - \eta^2}\right] + (\kappa_n + \kappa_m - 2\kappa_n\kappa_m) \ln\left[\frac{\varepsilon + \eta}{\varepsilon - 1}\right] \\
&+\; (\varepsilon^2 - 1)[\varepsilon(A_{n,m} Q_n' Q_m + A_{m,n} Q_m' Q_n) - C_{n,m} Q_n Q_m] \\
&+\; (\varepsilon^2 - 1)[(1 - \kappa_n) S_m + \kappa_n S_{m+1} - \frac{\kappa_n Q_m'}{m+1}\{P_m - (-1)^m\}] \\
&+\; (\varepsilon^2 - 1)^2 [Q_m \mathcal{B}_{m,n} - Q_m' \mathcal{A}_{m,n} + \frac{1}{n+1} \mathcal{A}_{m,n} Q_m' Q_n'],
\end{aligned} \tag{4.3}$$

con

$$\kappa_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par}, \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar}. \end{cases}$$

Los $A_{n,m}$, $C_{n,m}$, S_m, $\mathcal{B}_{m,n}$ y $\mathcal{A}_{m,n}$ son combinaciones de los polinomios de Legendre, sus funciones asociadas de segunda clase y sus primeras derivadas, y están dados por

$$A_{n,m} = \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \sum_{l=0}^{\mu(n,m-2k-1)} \frac{(2m-4k-1)K(m-2k-1,n,l)}{2(m+n)-4(k+l)-1} \times [P_{m+n-2(k+l)} - P_{m+n-2(k+l+1)}], \tag{4.4}$$

$$B_{n,m} = \sum_{j=0}^{(m-1)/2} \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \sum_{l=0}^{\mu(m-2j-1,n-2j-1)} \frac{(2m-4j-1)(2n-4k-1)}{2(m+n)-4(j+k+l)-3} \times [K(m-2j-1,n-2k-1,l)] \tag{4.5}$$

$$\times [P_{m+n-2(j+k+l)-1} - P_{m+n-2(j+k+l)-3}],$$

$$C_{n,m} = -(n+1)A_{m,n} + B_{n+1,m}, \tag{4.6}$$

donde

$$K(m,n,k) = \frac{2m+2n-4k+1}{2m+2n-2k+1} \frac{a_{m-k}a_k a_{n-k}}{a_{m+n-k}}, \tag{4.7}$$

con

$$a_k = \frac{(2k-1)!!}{k!}. \tag{4.8}$$

Igualmente,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{m,n} &= \int_{-1}^{\eta} P_m \mathcal{S}_{n+1} d\eta \\ &= \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \left[\frac{1}{n-2k+1} + \frac{1}{n-2k} \right] \\ &\times \; A_{m,n-2k} Q'_{n-2k}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{m,n} &= \int_{-1}^{\eta} P'_m \mathcal{S}_n d\eta \\ &= \sum_{k=0}^{(n-2)/2} \left[\frac{1}{n-2k} + \frac{1}{n-2k-1} \right] \\ &\times \; B_{m,n-2k-1} Q'_{n-2k-1}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{-1}^{\eta} \mathcal{S}_n d\eta \\ &= \sum_{k=0}^{(n-2)/2} \left[\frac{1}{n-2k} + \frac{1}{n-2k-1} \right] \\ &\times \ [P_{n-2k-1} + (-1)^{n+1}] Q'_{n-2k-1}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Los detalles de los cálculos correspondientes pueden encontrarse en la referencia [4] (ver también [10]).

5. Conclusiones

Las coordenadas esferoidales prolatas, esferoidales oblatas y esféricas, y sus respectivas soluciones generales del vacío para el espacio-tiempo estático axialmente simétrico, pueden interpretarse como casos particulares de una generalización establecida mediante la introducción del sistema de coordenadas esferoidales generalizadas.

La solución definida por (4.1) y (4.2) representa algo así como una "generalización de soluciones generales" y constituye, por lo tanto, un compendio de diversos resultados obtenidos en el área de investigación relacionada con la búsqueda de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein (ver referencias [7 - 11]).

Referencias

[1] H. Weyl, "Bemerkung Über die Axialsymmetrischen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen". *Ann. Physik.* **59**, 185 (1919).

[2] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt, and M. McCallum, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations.* Cambridge University Press, 1980.

[3] T. Morgan, and L. Morgan, "The Gravitational Field of a Disk". *Phys. Rev.* **183**, 1097 (1969).

[4] J. F. Ramos, *Solución general estática axialmente simétrica de las ecuaciones de Einstein en el vacío en coordenadas esferoidales generalizadas.* Trabajo de Grado en Física, Universidad Industrial de Santander, 2000.

[5] P. M. Morse and H. Fesbach, *Methods of Theoretical Physics.* McGraw-Hill, New York, 1953.

[6] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists.* Academic Press, Third edition, 1985.

[7] W. B. Bonnor and A. Sackfield, "The Interpretation of Some Spheroidal Metrics". *Comm. Math. Phys.* **8**, 338 (1968).

[8] H. E. J. Curzon, "Cylindrical Solutions of Einstein's Gravitation Equations". *Proc. London Math. Soc.* **23**, 477 (1924).

[9] P. S. Letelier, "On the gravitational field of static and stationary axial symmetric bodies with multipolar structure". *Class. Quant. Grav.* **16**, 1207 (1999).

[10] H. Quevedo, "General static axisymetric solution of Einstein's vacuum field equations in prolate spheroidal coordinates". *Phys. Rev. D*, **39**, 2904 (1989).

[11] B. H. Voorhees, "Static Axially Symmetric Gravitational Fields". *Phys. Rev. D*, **2**, 2119 (1970).