Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 18, No 2, p. 65–77, julio–diciembre de 2000

Variedades bandera maximales, torneos y aplicaciones armónicas[*†]

Marlio Paredes[‡] y Sofía Pinzón[§]

Resumen

En este trabajo presentamos los conceptos básicos para entender la geometría de la variedades bandera maximales complejas, así como la interesante relación que existe con la combinatoria. Presentamos algunos resultados recientes y algunas aplicaciones en la construcción de aplicaciones armónicas.

1 Introducción

Las variedades bandera maximales complejas

$$F(n) = \{(L_1, \ldots, L_n) : L_i \text{ es subespacio de } \mathbb{C}^n, \dim_{\mathbb{C}} L_i = 1, \quad L_i \perp L_j\} \quad (1.1)$$

son variedades homogéneas que tienen una geometría muy rica. A diferencia de otras variedades homogéneas como los espacios proyectivos y las grassmannianas, cuya geometría es bien conocida, la geometría de las variedades bandera no está aun completamente estudiada. Existen varias diferencias entre estas variedades; por ejemplo, las variedades bandera admiten muchas estructuras cuasicomplejas, mientras que los proyectivos y las grassmannianas sólo admiten 2 estructuras cuasicomplejas. Otra diferencia fundamental es que la

[*]Trabajo financiado parcialmente por Colciencias, contrato No. 106-2000.
[†]Este trabajo fue presentado en el VIII Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas ERM, realizado en la Universidad de Nariño, Pasto, 2001.
[‡]Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, Santander, Colombia, Email: mparedes@uis.edu.co
[§]Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, Santander, Colombia, Email: spinzon@uis.edu.co

métrica normal (ver [ChE]) inducida por la forma de Cartan-Killing de $U(n)$ es de Kähler para los proyectivos y para las grassmannianas, mientras que para las variedades bandera no lo es. Los espacios proyectivos y las grassmannianas son espacios simétricos, mientras que las variedades bandera no lo son. En otras palabras, las variedades bandera son espacios homogéneos que no son simétricos.

Una de las principales razones para estudiar este tipo de variedades es el interés existente por construir aplicaciones armónicas. Se dice que una aplicación $\phi\colon (M,g) \to (N,h)$, entre dos variedades riemannianas (M,g) y (N,h) es armónica si es un punto crítico del funcional energía

$$E(\phi) = \frac{1}{2}\int_M |d\phi|^2 v_g\,, \tag{1.2}$$

donde $d\phi(x) : T_xM \to T_{\phi(x)}M$, $x \in M$, y la norma $|d\phi(x)|$ está dada por

$$|d\phi(x)|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle d\phi(x)(X_i), d\phi(x)(X_i)\rangle_h\,,$$

para una base ortonormal $X_1, \ldots, X_m$ de T_xM. En otras palabras, ϕ es armónica si satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange del funcional energía:

$$\delta E(\phi) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E(\phi_t) = 0\,, \tag{1.3}$$

para toda variación (ϕ_t), $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, de ϕ (ver [EL]). Estas ecuaciones son ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden.

Eells y Sampson [ES] probaron el siguiente resultado:

Teorema 1.1. *Si $\phi\colon (M,g) \to (N,h)$ es una aplicación holomorfa y tanto M como N son variedades de Kähler, entonces ϕ es armónica.*

Este teorema fue generalizado por Lichnerowicz en [L] de la siguiente manera:

Teorema 1.2. *Sean (M,g,J_1) y (N,h,J_2) variedades cuasihermíticas con M cosimpléctica y N $(1,2)$–simpléctica. Si $\phi\colon M \to N$ es una aplicación holomorfa, entonces ϕ es armónica.*

Recordemos que ϕ es holomorfa si satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann, que son ecuaciones de primer orden; por lo tanto este teorema nos da una importante reducción en el orden de las ecuaciones (1.3).

Estamos interesados en encontrar aplicaciones armónicas en el caso en que M es una superficie de Riemann cerrada y $N = F(n)$. En este caso la condición de M ser cosimpléctica se verifica inmediatamente, porque toda superficie de Riemann es una variedad de Kähler y es bien conocido que toda variedad de Kähler es cosimpléctica (ver [Sa] o [GH]). Así, por el teorema anterior, debemos estudiar las métricas (1,2)–simplécticas sobre $F(n)$.

Otra razón para estudiar aplicaciones armónicas de este tipo es que si escogemos una estructura conforme adecuada sobre la superficie M, entonces una aplicación ϕ es armónica si y solo si es mínima.

Para estudiar las métricas invariantes sobre $F(n)$ es necesario conocer las estructuras cuasicomplejas invariantes sobre $F(n)$. Borel y Hirzebruch [BH] probaron que existen $2^{\binom{n}{2}}$ estructuras cuasicomplejas invariantes sobre $F(n)$, y este también es el número de torneos con n vértices. Un torneo es un grafo en el cual cada par de vértices está unido por exactamente un arco orientado.

Burstall y Salamon [BS] mostraron que existe una correspondencia biunívoca entre las estructuras cuasicomplejas sobre $F(n)$ y torneos con n vértices. Los torneos pueden clasificarse en clases de isomorfismo, de tal forma que una de ellas corresponde a la estructuras cuasicomplejas integrables, y las restantes corresponden a las estructuras no integrables. Esta relación ha sido explotada por Cohen, Negreiros y San Martin en [CNS], por Mo y Negreiros en [MN1] y [MN2] y por Paredes en [P1], [P2], [P3], [P4] y [PGM].

En este artículo intentamos presentar toda la teoría básica sobre la geometría de variedades bandera maximales y los principales resultados obtenidos en los últimos tres años.

2 Preliminares

En todo este trabajo, cuando hablemos de $F(n)$ entenderemos que $n \geq 3$. Podemos obtener una representación algebraica de las variedades bandera, la cual es muy útil para hacer cálculos, de la siguiente manera: el grupo unitario $U(n) = \{A \in Mat(n, \mathbb{C}) : A\overline{A}^t = I\}$ actúa transitivamente sobre $F(n)$ y su grupo de isotropía es el toro maximal $T = \underbrace{U(1) \times \cdots \times U(1)}_{n-veces}$; así tenemos que

$$F(n) = \frac{U(n)}{\underbrace{U(1) \times \cdots \times U(1)}_{n-veces}} = \frac{U(n)}{T}\,. \tag{2.1}$$

Sea $\mathfrak{p} = T(F(n))_{(T)}$ el espacio tangente a $F(n)$ en (T). Sabemos que el álgebra de Lie $\mathfrak{u}(n) = \{X \in Mat(n, \mathbb{C}) : X + \overline{X}^t = 0\}$, del grupo de Lie $U(n)$, es tal que (ver Cheeger y Ebin [ChE])

$$\mathfrak{u}(n) \quad = \mathfrak{p} \oplus \underbrace{\mathfrak{u}(1) \oplus \cdot \oplus \mathfrak{u}(1)}_{n-veces} \,. \tag{2.2}$$

Una estructura cuasicompleja invariante sobre $F(n)$ es una aplicación lineal $J : \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$, tal que $J^2 = -I$.

Borel y Hirzebruch [BH] probaron que existen $2^{\binom{n}{2}}$ estructuras cuasicomplejas invariantes sobre $F(n)$, y este también es el número de torneos con n vértices. Un torneo con n vértices o n-torneo $\mathcal{T}$ es un grafo, consistente de un conjunto finito $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de vértices o jugadores distintos, tal que cada par de vértices está unido por exactamente un arco orientado $p_i \to p_j$ o $p_j \to p_i$. Si $p_i \to p_j$ decimos que p_i le gana a p_j (ver Moon [M]).

Sea $\mathcal{T}_1$ un torneo con n jugadores $\{1, \ldots, n\}$ y $\mathcal{T}_2$ un torneo con m jugadores $\{1, \ldots, m\}$. Un homomorfismo entre $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ es una función $\phi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ tal que

$$s \xrightarrow{\mathcal{T}_1} t \quad \Longrightarrow \quad \phi(s) \xrightarrow{\mathcal{T}_2} \phi(t) \qquad \text{ó} \qquad \phi(s) = \phi(t)\,.$$

Cuando ϕ es biyectiva decimos que $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son isomorfos. Cada torneo determina un vector, llamado vector resultado o vector marcador

$$(s_1, \ldots, s_n)\,, \qquad \text{tal que} \qquad \sum_{i=1}^{n} s_i = \binom{n}{2}\,,$$

y cuyas entradas son el número de juegos que cada jugador ha ganado. Claramente torneos isomorfos tienen el mismo vector resultado. Los torneos pueden ser clasificados en clases de isomorfismos; la Figura 2.1 contiene las clases de isomorfismos de torneos para $n = 2, 3, 4$ junto con el vector marcador correspondiente. Para $n = 5$ existen torneos que no son isomorfos y que tienen el mismo vector resultado (ver Figura 2.2).

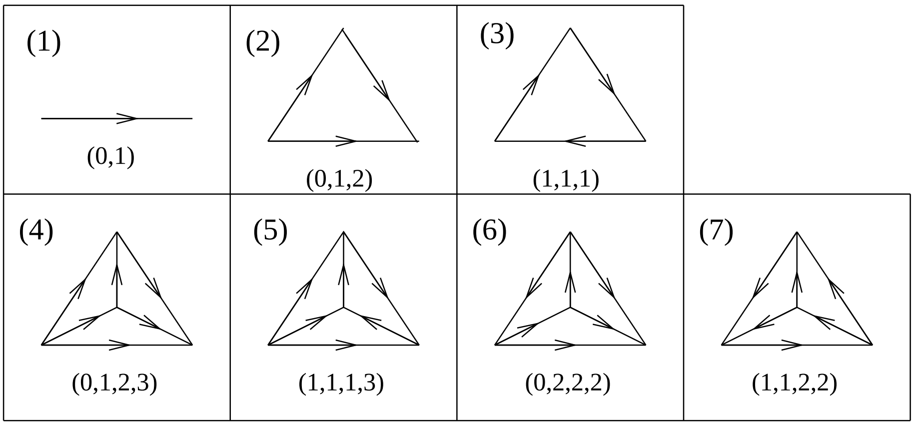

Figure 2.1: Clases de isomorfismos.

El torneo con n jugadores $\{1,\ldots,n\}$ definido por: $i \to j \iff i < j$ es llamado torneo canónico, y su vector marcador es $(0,1,2,\ldots,n-1)$.

Existe una identificación natural entre estructuras cuasicomplejas invariantes sobre $F(n)$ y torneos con n vértices (ver [BS] o [MN2]), la cual es de mucha utilidad en el estudio de la geometría de las variedades bandera. Dada una estructura cuasicompleja invariante J, podemos hacerle corresponder un torneo $\mathcal{T}(J)$ con n jugadores $\{1,\ldots,n\}$ asi: Si $J(a_{ij}) = (a'_{ij})$; entonces $\mathcal{T}(J)$ es tal que para $i < j$,

$$\left(i \to j \iff a'_{ij} = \sqrt{-1}\, a_{ij}\right) \quad \text{ó} \quad \left(i \leftarrow j \iff a'_{ij} = -\sqrt{-1}\, a_{ij}\right).$$

Se dice que una estructura cuasicompleja J sobre $F(n)$ es integrable si la variedad $(F(n), J)$ es en realidad una variedad compleja, esto es, admite sistemas de coordenadas locales complejos con cambios de coordenadas holomorfos. Una condición equivalente es la famosa ecuación de Newlander-Nirenberg [NN],

$$[JX, JY] = J[X, JY] + J[JX, Y] + [X, Y]\,, \tag{2.3}$$

para todos los campos vectoriales X, Y sobre $F(n)$.

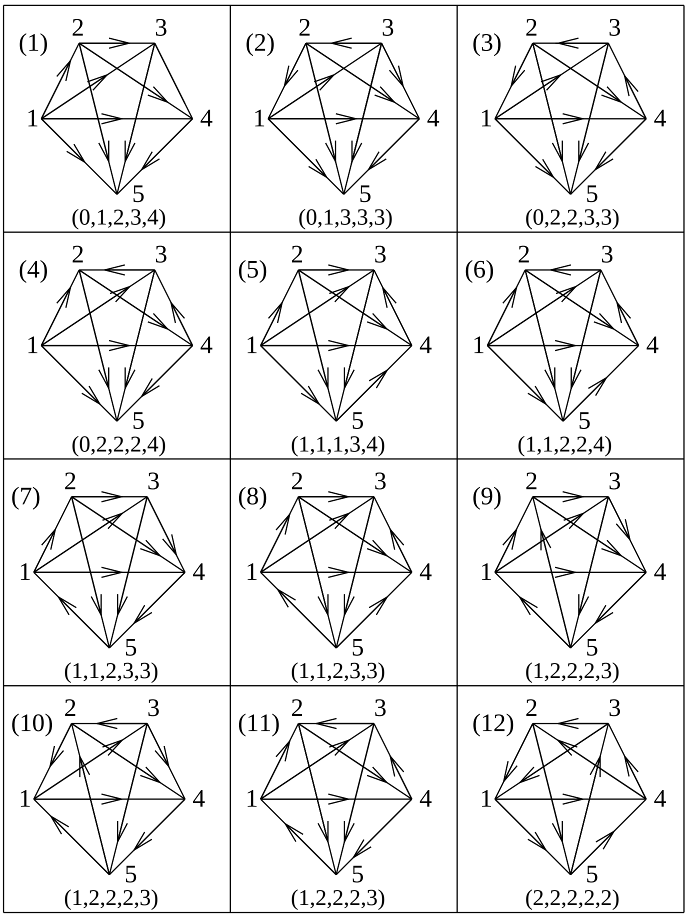

Figure 2.2: Clases de isomorfismos de 5-torneos.

Burstall y Salamon [BS] probaron el siguiente interesante resultado:

Teorema 2.1. *Una estructura cuasicompleja invariante J sobre $F(n)$ es integrable si y solamente si el torneo correspondiente $\mathcal{T}(J)$ es isomorfo al torneo canónico.*

Este teorema nos dice que entre las clases de isomorfismos de torneos, sólo una corresponde a las estructuras cuasicomplejas integrables, y todas las restantes corresponden a estructuras no integrables.

Todas las métricas invariantes a izquierda sobre $F(n)$ pueden ser escritas en la forma (ver [N1] ou [Bl])

$$ds^2_\Lambda = \sum_{i,j} \lambda_{ij}\omega_{i\bar{j}} \otimes \omega_{\bar{i}j} \,, \tag{2.4}$$

donde $\Lambda = (\lambda_{ij})$ es una matriz real simétrica que satisface

$$\lambda_{ij} \begin{cases} > 0, & \text{si} \quad i \neq j \,, \\ = 0, & \text{si} \quad i = j \,, \end{cases} \tag{2.5}$$

y las formas diferenciales $\omega_{i\bar{j}}$ son las llamadas formas de Maurer-Cartan de $U(n)$ (ver [ChW]). Estas formas son tales que

$$\omega_{i\bar{j}} \text{ es una forma de tipo (1,0)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad i \xrightarrow{\mathcal{T}(J)} j \,.$$

Estas métricas son llamadas tipo Borel, y son cuasihermíticas para cada estructura cuasicompleja invariante J sobre $F(n)$, esto es,

$$ds^2_\Lambda(JX, JY) = ds^2_\Lambda(X, Y) \,, \tag{2.6}$$

para todos los campos vectoriales X, Y. Cuando J es integrable y satisface (2.6), se dice que la métrica es hermítica.

Dada una estructura cuasicompleja J sobre $F(n)$, la forma de Kähler asociada a esta estructura es definida, para cada par de vectores tangentes X, Y, por:

$$\Omega(X, Y) = ds^2_\Lambda(X, JY) \,. \tag{2.7}$$

Mo y Negreiros [MN1] probaron que, para cada permutación τ de n elementos, la forma de Kähler se escribe como

$$\Omega = -2\sqrt{-1} \sum_{i<j} \mu_{\tau(i)\tau(j)} \omega_{\tau(i)\overline{\tau(j)}} \wedge \omega_{\overline{\tau(i)}\tau(j)} \,, \tag{2.8}$$

donde $\mu_{\tau(i)\tau(j)} = \varepsilon_{\tau(i)\tau(j)}\lambda_{\tau(i)\tau(j)}$ y $\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \to j \,, \\ -1 & \text{si} \quad j \to i \,, \\ 0 & \text{si} \quad i = j \,. \end{cases}$

Decimos que $F(n)$ es cuasikähler si Ω es una forma cerrada, esto es, si $d\Omega = 0$. Cuando J es integrable y Ω es cerrada, decimos que $F(n)$ es una variedad de Kähler.

Como $d\Omega$ es una 3-forma diferencial compleja, puede descomponerse en la forma $d\Omega = (d\Omega)^{3,0} + (d\Omega)^{2,1} + (d\Omega)^{1,2} + (d\Omega)^{0,3}$, donde $(d\Omega)^{p,q}$ es una forma diferencial de tipo (p, q).

Si Ω no es cerrada, pero $(d\Omega)^{1,2} = 0$, entonces decimos que $F(n)$ es (1,2)-simpléctica. Si Ω es cocerrada, esto es $d^*\Omega = 0$, decimos que $F(n)$ es cosimpléctica.

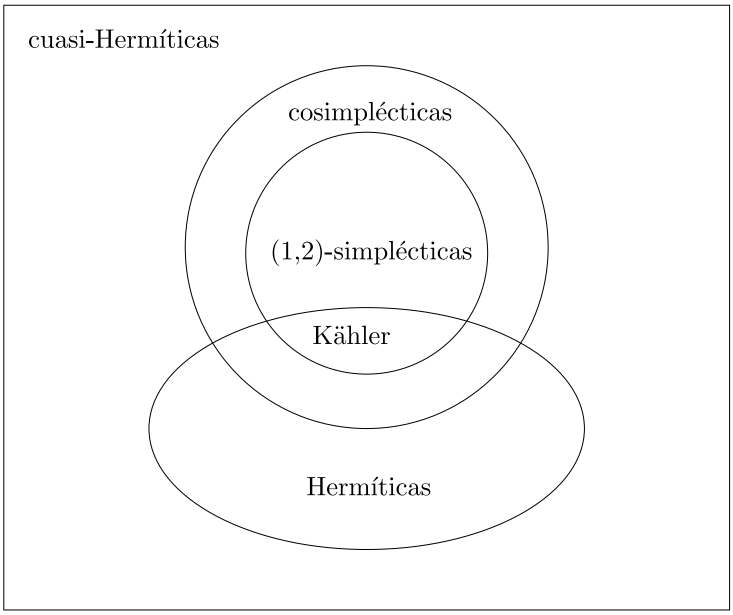

Figure 2.3: Clasificación de las variedades cuasihermíticas.

La Figura 2.3, tomada de [Sa], presenta las clases de variedades cuasihermíticas en las cuales estamos interesados.

Una aplicación $\phi : (M, g, J_1) \to (N, h, J_2)$ es holomorfa si satisface

$$d\phi \circ J_1 = J_2 \circ d\phi \,. \tag{2.9}$$

Si queremos usar el teorema 1.2 para construir nuevos ejemplos de aplicaciones armónicas $\phi\colon M \to F(n)$, de una superficie de Riemann M en $F(n)$, necesitaremos tener ejemplos ya conocidos de aplicaciones ϕ holomorfas. Para esto usamos las aplicaciones de Eells–Wood introducidas por Negreiros en [N2]. Rápidamente veamos cuáles son estas aplicaciones. Sea $h\colon M \to \mathbb{CP}^{n-1}$ holomorfa y no degenerada (h es no degenerada si $h(M)$ no está contenida en ningun $\mathbb{CP}^k$, para todo $k < n-1$). Localmente, en un abierto $U \subset M$, podemos representar h como

$$h_U = (u_0, \dots, u_{n-1}) : M \supset U \to \mathbb{C}^n - \{0\},$$

donde U es tal que $\pi \circ h_U = h$ para $\pi : \mathbb{C}^n - \{0\} \to \mathbb{CP}^{n-1}$. Esto es,

$$h(z) = [h_U(z)] = [(u_0(z), \ldots, u_{n-1}(z))].$$

Definimos la k-ésima curva asociada a h como

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{O}_k : & M & \longrightarrow & \mathbb{G}_{k+1}(\mathbb{C}^n) \\ & z & \longmapsto & h_U(z) \wedge \partial h_U(z) \wedge \cdots \wedge \partial^k h_U(z), \end{array}$$

para $0 \leq k \leq n-1$.
Sea

$$\begin{array}{rccl} h_k : & M & \longrightarrow & \mathbb{CP}^{n-1} \\ & z & \longmapsto & \mathcal{O}_k^{\perp}(z) \cap \mathcal{O}_{k+1}(z), \end{array}$$

para $0 \leq k \leq n-1$.
El siguiente teorema, debido a Eells y Wood [EW], clasifica las aplicaciones armónicas de la esfera $S^2 \sim \mathbb{CP}^1$ en el espacio proyectivo $\mathbb{CP}^{n-1}$.

Teorema 2.2. *Para cada k, $h_k \colon M \to \mathbb{CP}^{n-1}$ es armónica. Además, dada una aplicación armónica y no degenerada $\phi \colon \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^{n-1}$, existen h y k únicos tales que $\phi = h_k$.*

Este teorema nos da de forma natural las aplicaciones

$$\begin{array}{rccl} \Psi\colon & M & \longrightarrow & F(n) \\ & z & \longmapsto & (h_0(z), \ldots, h_{n-1}(z)), \end{array} \tag{2.10}$$

que son llamadas aplicaciones de Eells-Wood.
Una aplicación $\phi \colon M \to (F(n), ds^2_\Lambda)$ es equiarmónica si es armónica para todas las métricas invariantes de tipo Borel ds^2_Λ. Negreiros [N2] probó que las aplicaciones de Eells-Wood son equiarmónicas.

3 Problemas y resultados

3.1 Clasificación de las métricas (1,2)-simplécticas

Borel [Bo] mostró que para cada estructura cuasicompleja invariante integrable existe una familia de métricas de Kähler invariantes sobre $F(n)$. Eells y Salamon [ESa] probaron que una estructura cuasicompleja parabólica sobre $F(n)$ admite una métrica (1,2)-simpléctica. Mo y Negreiros [MN1] mostraron explícitamente la existencia de una familia de métricas (1,2)-simplécticas invariantes, para cada estructura cuasicompleja parabólica invariante sobre $F(n)$.

Se dice que una estructura cuasicompleja J sobre $F(n)$ es parabólica si existe una permutación τ de n elementos tal que el torneo asociado $\mathcal{T}(J)$ está dado, para $i < j$, por:

$$\begin{cases} \tau(j) \to \tau(i), & \text{si} \quad j-i \quad \text{es par}\,, \\ \\ \tau(i) \to \tau(j), & \text{si} \quad j-i \quad \text{es impar}\,. \end{cases}$$

Paredes (ver [P1] ó [P3]) caracterizó explícitamente varias familias de métricas $(1,2)$-simplécticas sobre $F(n)$ diferentes de las de Kähler y de las parabólicas. Más precisamente, para cada $n \geq 5$ caracterizó $n-3$ familias distintas de métricas (1,2)-simplécticas. Cada una de estas familias corresponde a una clase de torneos distinta de la clase del torneo canónico, o equivalentemente de estructuras cuasicomplejas no integrables. Como consecuencia de estos resultados, en [P1] fue conjeturado el siguiente teorema, el cual ya fue probado por Cohen, Negreiros y San Martin en [CNS].

Teorema 3.1. *La variedad $(F(n), J, ds^2_\Lambda)$, para $n \geq 4$, es $(1,2)$-simpléctica si y solamente si el torneo $\mathcal{T}(J)$, asociado a J, es tal que todo subtorneo de orden 4 es isomorfo a (4) ó (7) en la Figura 2.1.*

Este teorema nos da una clasificación completa de las métricas $(1,2)$-simplécticas sobre $F(n)$ en términos de torneos. Esta relación con la combinatoria es muy interesante, puesto que las variedades son objetos que no son discretos, mientras que los torneos sí lo son. Además, como consecuencia del teorema de Lichnerowicz (teorema 1.2) y usando las aplicaciones de Eells-Wood, se obtiene una gran cantidad de ejemplos de aplicaciones armónicas $\phi\colon M \to F(n)$.

3.2 Dimensión de las familias de métricas

Borel [Bo] probó que la única familia de métricas de Kähler que existe sobre $F(n)$ tiene dimensión $n-1$ (depende de $n-1$ parámetros). Tanto la familia de métricas (1,2)–simplécticas caracterizada por Mo y Negreiros en [MN1] como las familias caracterizadas por Paredes en [P1] son de dimensión n (dependen de n parámetros) por lo cual es natural la siguiente pregunta:

¿Será n la dimensión de cada una de las familias de métricas $(1,2)$-simplécticas existentes sobre $F(n)$?

Cohen, Negreiros y San Martin dieron una respuesta positiva a esta pregunta en [CNS].

n	$N(n)$
4	2
5	4
6	6
7	10
8	16
9	30
10	52
11	94
12	172
13	316
14	586
15	1096
16	2048
17	3856
18	7286
19	13798
20	26216

Table 1: $N(n) =$ número de familias de métricas (1,2)-simplécticas sobre $F(n)$.

3.3 Métricas cosimplécticas

Las métricas cosimplécticas sobre cualquier variedad cuasihermítica contienen las métricas $(1,2)$-simplécticas, y estas a su vez contienen todas las métricas de Kähler (ver Figura 2.3). Tiene entonces sentido hacer la siguiente pregunta acerca de las métricas de Borel sobre $F(n)$:

¿Cuáles de las métricas de Borel sobre $F(n)$ son cosimplécticas?

Recientemente, San Martin y Negreiros probaron en [SMN] que todas las métricas de Borel ds^2_Λ son cosimplécticas.

3.4 Número de métricas $(1,2)$-simplécticas

Mo y Negreiros [MN1] probaron que tanto sobre $F(3)$ como sobre $F(4)$ existen 2 familias de métricas $(1,2)$-simplécticas. Paredes (ver [P1] ó [P2]) probó que el número de métricas $(1,2)$-simplécticas sobre $F(5)$, $F(6)$ y $F(7)$ es 4, 6 y 10 respectivamente. En [PGM] probamos que este número es 16 para $F(8)$. Estos resultados sugieren que la sucesión formada por el número de familias de métricas $(1,2)$-simplécticas sobre $F(n)$, a saber 2, 2, 4, 6, 10, 16, es una sucesión de Fibonacci. Desafortunadamente no es así, pues en [PGM] probamos que este número es 30 para $F(9)$; allí mismo calculamos el número de métricas $(1,2)$-simplécticas sobre $F(n)$ para $8 \leq n \leq 20$. Estos resultados se resumen en la tabla 1.

A pesar de los resultados hasta aquí obtenidos, la siguiente pregunta continúa abierta:

¿Cuántas familias de métricas $(1,2)$-simplécticas existen sobre $F(n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$?

Referencias

[Bl] M. BLACK. "Harmonic Maps into Homogeneous Spaces", *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, vol. 255, Longman, Harlow, 1991.

[Bo] A. BOREL. "Kählerian Coset Spaces of Semi-Simple Lie Groups", *Proc. Nat. Acad. of Sci.*, **40** (1954), 1147-1151.

[BH] A. BOREL & F. HIRZEBRUCH. "Characteristic classes and homogeneous spaces I", *Amer. J. Math.*, **80** (1958), 458-538.

[BS] F.E. BURSTALL & S. SALAMON. "Tournaments, Flags and Harmonic Maps". *Math. Ann.*, **277** (1987), 249-265.

[ChE] J. CHEEGER & D. G. EBIN. *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[CNS] N. COHEN, C.J.C. NEGREIROS & L.A.B. SAN MARTIN. "Characterization of $(1,2)$-Symplectic Metrics on Flag Manifolds", *Proceedings of International Congress on Differential Geometry Dedicated to Alfred Gray*, Contemporary Mathematics, 2000.

[ChW] S.S. CHERN & J. G. WOLFSON. "Harmonic Maps of the Two-Sphere into a Complex Grassmann Manifold II". *Ann. of Math.*, **125** (1987), 301–335.

[EL] J. EELLS & L. LEMAIRE. "Selected Topics in Harmonic Maps". *C. B. M. S. Regional Conference Series in Mathematics*, No. 50, American Mathematical Society, Providence, 1983.

[ES] J. EELLS & J. H. SAMPSON. "Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds". *Amer. J. Math.*, **86** (1964), 109-160.

[ESa] J. EELLS & S. SALAMON. "Twistorial Constructions of Harmonic Maps of Surfaces into Four-Manifolds". *Ann. Scuola Norm. Sup.* Pisa (4) **12** (1985), 589–640.

[EW] J. EELLS & J.C. WOOD. "Harmonic Maps from Surfaces to Complex Projective Spaces". *Advances in Mathematics* **49** (1983), 217-263.

[GH] A. GRAY & L. M. HERVELLA. "The Sixteen Classes of Almost Hermitian Manifolds and Their Linear Invariants", *Ann. Mat. Pura Appl.*, **123** (1980), 35-58.

[L] A. LICHNEROWICZ. "Aplications Harmoniques et Variétés Kählériennes". *Sympos. Math. 3* (Bologna 1970), 341-402.

[M] J.W. MOON. *Topics on Tournaments*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968.

[MN1] X. MO & C.J.C. NEGREIROS. "$(1,2)$-Symplectic Structures on Flag Manifolds". *Tohoku Math. Journal*, **52** (2000), 271-282.

[MN2] X. MO & C.J.C. NEGREIROS. "Tournaments and Geometry of Full Flag Manifolds". *Proceedings of the XI Brazilian Topology Meeting*, Rio Claro, Brazil, World Scientific (1999).

[NN] A. NEWLANDER & L. NIRENBERG. "Complex Analitic Coordinates in Almost Complex Manifolds". *Ann. of Math.*, **65** (1957), 391-404.

[N1] C.J.C. NEGREIROS. "Some Remarks about Harmonic Maps into Flag Manifolds". *Indiana University Mathematics Journal* **37**, No. 3 (1988).

[N2] C.J.C. NEGREIROS. *Harmonic Maps from Compact Riemann Surfaces into Flag Manifolds.* Ph.D. Thesis, University of Chicago, 1987.

[P1] M. PAREDES. *Aspectos da Geometria Complexa das Variedades Bandeira.* Tesis de Doctorado. Universidad Estatal de Campinas, Brasil, 2000.

[P2] M. PAREDES. "Some Results on the Geometry of Full Flag Manifolds and Harmonic Maps". (Preprint sometido para publicación, 2000).

[P3] M. PAREDES. "Families of $(1,2)$-Symplectic Metrics on Full Flag Manifolds". (Aceptado para publicación en *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2000.

[P4] M. PAREDES. "Torneos y estructuras parabólicas sobre variedades bandera maximales". *Revista Integración UIS*, vol. 17, No. 1, 1999.

[PGM] M. PAREDES, P. GONZÁLEZ & B. MACKAY. "Sobre un tipo especial de torneos y una clase de métricas sobre variedades bandera". *Memorias de la primera conferencia iberoamericana de matemática computacional*, Pontificia Universidad Javeriana y Universidad Distrital, Bogotá, 2001.

[Sa] S. SALAMON. "Harmonic and Holomorphic Maps". *Lecture Notes in Mathematics 1164*, Springer, 1986.

[SMN] L.A.B. SAN MARTIN & C.J.C. NEGREIROS. "Invariant Almost Hermitian Structures on Flag Manifolds". (Pre-print).