∮ **Revista Integración**
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 20, Nos. 1 y 2, 2002, pág. 27–40

Un modelo matemático para los procesos de absorción dinámica

Gildardo Guzmán* Julio Carrillo*
Edilberto Reyes*

Resumen. Una de las principales vías de aplicación de los métodos matemáticos para la investigación de procesos de sorción es el planteamiento y solución de modelos matemáticos. En este artículo se considera un problema de sorción dinámica con cinética de difusión mixta [2]. Se demuestra la existencia y unicidad de la solución en cierto espacio de suavidad finita, además se demuestran ciertas propiedades de la solución del problema.

1. Descripción del problema

En este momento hay un interés práctico en el empleo de los procesos de absorción dinámica en la industria química, en la del petróleo, en la alimentaria y en otros campos tecnológicos, procesos que se emplean cuando se limpian los residuos gaseosos y las aguas residuales de mezclas tóxicas, como también en la selección de muestras para la realización del monitoreo ecológico.

Los principales métodos de investigación de los modelos matemáticos de la absorción dinámica, bajo condiciones de no equilibrio son descritos en los trabajos de Tíjonov, Zhujovistky y Zabezhinsky [1] donde se considera un modelo matemático unidimensional para la absorción dinámica de un gas a través de un flujo dentro de una columna totalmente llena de granos de un sorbente. Para describir la cinética del proceso en este modelo se propuso la ecuación de cinética de difusión externa. En estos trabajos se llevó a cabo una investigación analítica y se propusieron métodos numéricos y asintóticos para hallar la solución.

El fundamento físico y matemático del modelo determínistico se representa mediante un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer o de segundo orden. La ley de la conservación de la sustancia se refleja por la ecuación de balance, la cual se propaga con una velocidad determinada en el medio, lleno

Palabras y frases claves: Procesos de absorción dinámica, modelo matemático.
MSC2000: Primaria: 34K60. Secundaria: 93A30.

* Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, Colombia, `gguzman@uis.edu.co`, `jccarril@uis.edu.co`, `ereyes@uis.edu.co`.

con un sorbente poroso. El no equilibrio del proceso, definido por las condiciones del transporte de masa de los componentes absorvidos en el flujo liquido o por el gas hacia la superficie del sorbente y en los poros, se caracteriza por la ecuación de cinética de difusión. Dependiendo de la manera como transcurre el proceso, la ecuación de cinética puede tener diferentes formas, y por lo tanto determina diferentes modelos matemáticos. Cuando el estadio determinante (o sea, el más lento o el limitante) es el transporte de masa del flujo hacia la superficie del sorbente se habla sobre la cinética de absorción de *difusión externa*; por el contrario, si el estadio limitante es el transporte en los poros, la cinética de absorción se denomina *difusión interna*.

2. Estado del problema y formulación de varios resultados

Consideremos el problema directo para un modelo matemático con cinética de difusión mixta propuesto por el académico ruso A. N. Tíjonov:

$$\nu(t)u_x(x,t) + a_t(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$
$$a_t(x,t) = \beta(u(x,t) - y(x,t)), \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{2}$$
$$v(x,t) = f(y(x,t)), \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{3}$$
$$a(x,t) = \alpha_0 v(x,t) + (1-\alpha_0)c(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{4}$$
$$c_t(x,t) = \gamma_0(v(x,t) - c(x,t)), \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{5}$$
$$u(0,t) = \mu(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{6}$$
$$a(x,0) = c(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le l \tag{7}$$

en donde $Q_T = [0,l] \times [0,T]$, β y γ_0 son los coeficientes cinéticos positivos de difusión externa y de difusión interna, respectivamente, α_0 es una constante también positiva, $\alpha_0 < 1$, y la isoterma de absorción $f(\xi)$ es una función monótona, estrictamente creciente, tal que $f(0) = 0$.

Consideraciones acerca de las condiciones límites para el sistema (1)–(7)

Supongamos que $\gamma_0 \to \infty$ pero β es finito. Entonces dividiendo ambos lados de la ecuación (5) por γ_0 obtenemos que $v(x,t) = c(x,t)$ en Q_T, y considerando la ecuación (4) obtenemos $v = a$. En efecto, por (4),

$$\begin{aligned} a(x,t) &= \alpha_0 v(x,t) + (1-\alpha_0)\, c(x,t) \\ &= \alpha_0 v(x,t) + (1-\alpha_0)\, v(x,t) \\ &= v(x,t)\,. \end{aligned}$$

De esta manera el sistema obtenido coincide con el sistema de ecuaciones para el caso de difusión externa.

Sea $\beta \to \infty$ pero γ_0 es finito. Razonando de manera análoga de las ecuaciones (2) y (3) encontramos que

$$u(x,t) = y(x,t) \quad \text{en } Q_T,$$

y por (4) y (3) que

$$v\,(x,t) = f(u).$$

Por esta razón el sistema (1)–(7) toma la forma

$$\begin{aligned} \nu(t)u_x(x,t) + a_t(x,t) &= 0, && (x,t) \in Q_T, \\ a(x,t) &= \alpha_0 f(u(x,t) + (1-\alpha_0)c(x,t), && (x,t) \in Q_T, \\ c_t(x,t) &= \gamma_0(f(u(x,t)) - c(x,t)), && (x,t) \in Q_T. \end{aligned}$$

Se ve fácilmente que cuando $\alpha_0 \to 0$, este sistema se convierte en un sistema de ecuaciones de difusión interna. Además, anotemos que el sistema (1)–(7) pasa al modelo de difusión externa y cuando $\alpha_0 \to 1$, ya que en este caso la ecuación (5) está de sobra.

2.1. Reducción del sistema (1)–(7)

El modelo (1)–(7) se puede reducir al siguiente problema de contorno-inicial:

$$\nu(t)u_x\,(x,t) + \beta u\,(x,t) = \beta F(v\,(x,t)), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{8}$$

$$a_t\,(x,t) = \beta(u\,(x,t) - F(v\,(x,t))), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{9}$$

$$v_t(x,t) + \gamma v(x,t) = \gamma a(x,t) + \lambda u(x,t) - \lambda F(v(x,t)), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{10}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{11}$$

$$a(x,0) = v(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l. \tag{12}$$

En efecto, reemplazando (2) en (1) obtenemos

$$\nu\,(t)\,u_x\,(x,t) + \beta\,(u\,(x,t) - y\,(x,t)) = 0.$$

Como $v = f\,(y)$, si denotamos como $F\,(\xi)$ la función inversa de $f\,(\xi)$ tenemos que

$$F\,(v) = F\,(f\,(y)) = y, \tag{13}$$

y por tanto

$$\nu\,(t)\,u_x + \beta u = \beta F\,(v)\,.$$

De otro lado, al reemplazar (13) en (2) se obtiene la ecuación (9).

Ahora, si se deriva (4) con respecto a t y se reemplazan a_t, como está dado en (2), y c_t como está dado en (5), se tiene que

$$\alpha_0 v_t + \gamma_0\,(1-\alpha_0)\,(v-c) = \beta\,(u - F\,(v))\,.$$

Reemplazando a $(1-\alpha_0)\,c$, el cual se obtiene de la ecuación (4), y dividendo por α_0, se tiene que

$$v_t + \gamma v = \gamma a + \lambda\,(u - F\,(v))\,,$$

en donde $\gamma = \gamma_0/\alpha_0$ y $\lambda = \beta/\alpha_0$. Nótese que $\lambda > \beta$, porque $\beta > 0$ y $0 < \alpha_0 < 1$.

Finalmente, si hacemos $t = 0$ en (4) y usamos (7), obtenemos

$$a\,(x,0) \quad = \quad \alpha_0 v\,(x,0) + (1-\alpha_0)\,c\,(x,0)$$

$$\begin{aligned} &= \alpha_0 v(x,0) + (1-\alpha_0)\, a(x,0) \\ &= v(x,0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

2.2. *Propiedades de la solución del problema* (8)–(12)

Teorema 2.1. *Sean*

$$\begin{array}{llll} \mu \in C^1[0,T], & \mu(0)=0, & \mu'(t)>0, & \text{para todo } t\in[0,T], \\ \nu \in C[0,T] \text{ y } & v(t)>0, & \nu'(t)>0, & \text{para todo } t\in[0,T], \end{array} \tag{14}$$

y

$$\begin{cases} F\in C^1(R), & F(0)=0, \\ F'(\xi)\in(0,c_1) & \text{para todo } \xi\in R,\ c_1=\text{const.} \end{cases} \tag{15}$$

Entonces existe una única de solución $\{u(x,t), a(x,t), v(x,t), \nu(t)\}$ *tal que* $u,a,v \in C^1(Q_T)$ *y que satisface* (8)–(12). *Además,*

$$u_t>0, \qquad a_t>0, \qquad v_t>0 \quad \text{en} \quad Q_T^0, \tag{16}$$

$$u_x<0, \qquad a_x<0, \qquad v_x<0 \quad \text{en} \quad Q_T^0, \tag{17}$$

donde $Q_T^0=\{(x,t): 0\le x\le l, 0<t\le T\}=[0,l]\times(0,T]$.

2.3. *Existencia de la solución*

La demostración de existencia consiste en transformar el problema en un sistema de ecuaciones integrales equivalente con el problema planteado [3].

Supongamos que las hipótesis del teorema se cumplen. Para empezar, consideremos el problema de valor inicial (8), (11),

$$\begin{aligned} \nu(t)u_x+\beta u &= \beta F(v), & (x,t)\in Q_T, \\ u(0,t) &= \mu(t), & 0\le t\le T. \end{aligned}$$

Consideremos la ecuación diferencial como lineal[1] en x y de la forma

$$u_x+\alpha(t)\,u=\alpha(t)\,F(v),$$

en donde $\alpha(t)=\beta/\nu(t)$. Como el factor de integración de esta ecuación es de la forma

$$A(x)=e^{\int_0^x \alpha(t)ds}=e^{x\alpha(t)},$$

tenemos que la solución del problema de valor inicial es de la forma

$$u(x,t) \quad = \quad \mu(t)\,e^{-x\alpha(t)}+\alpha(t)\,e^{-x\alpha(t)}\int_0^x F(v(s,t))\,e^{s\alpha(t)}ds$$

[1] Como se sabe por los cursos normales de ecuaciones diferenciales, la solución de la ecuación $y'+p(x)\,y=q(x)$ sujeta a la condición inicial $y(x_0)=y_0$ está dada por la fórmula

$$y(x)=y(x_0)\,e^{-\int_{x_0}^x p(s)ds}+e^{-\int_{x_0}^x p(s)ds}\int_{x_0}^x e^{\int_{x_0}^z p(s)ds}q(z)\,dz.$$

$$= \quad \mu(t)\, e^{-x\alpha(t)} + \alpha(t) \int_0^x F(v(s,t))\, e^{-\alpha(t)(x-s)} ds. \qquad (18)$$

Considerando el problema inicial (9), (12)

$$\begin{aligned} &a_t = \beta(u - F(v)), && (x,t) \in Q_T, \\ &a(x,0) = 0, && 0 \le x \le l, \end{aligned}$$

e integrando directamente la ecuación diferencial respecto a t, obtenemos

$$a(x,z)\Big|_{z=0}^{t} = \beta \int_0^t u(x,z)\, dz - \beta \int_0^t F(v(x,z))\, dz.$$

Usando la condición inicial y (18) obtenemos

$$\begin{aligned} a(x,t) = \beta \int_0^t \mu(z)\, e^{-x\alpha(z)} dz - \beta \int_0^t F(v(x,z))\, dz \\ + \beta \int_0^t \int_0^x \alpha(z)\, F(v(s,z))\, e^{-(x-s)\alpha(z)} ds\, dz. \qquad (19) \end{aligned}$$

Finalmente consideremos el problema de valor inicial (10), (12)

$$\begin{aligned} v_t + \gamma v = \gamma a + \lambda u - \lambda F(v), &\qquad (x,t) \in Q_T, \\ v(x,0) = 0, &\qquad 0 \le x \le l. \end{aligned}$$

Como el factor de integración de la ecuación diferencial, en la variable t, es

$$e^{\int_0^t \gamma ds} = e^{\gamma t},$$

la solución del problema de valor inicial considerado es

$$\begin{aligned} v(x,t) \quad = \quad & \gamma \int_0^t a(x,z)\, e^{-\gamma(t-z)} dz + \lambda \int_0^t u(x,z)\, e^{-\gamma(t-z)} dz \\ & -\lambda \int_0^t F(v(x,z))\, e^{-\gamma(t-z)} dz. \end{aligned}$$

Mediante integración por partes en la primera integral del lado derecho, obtenemos que

$$\begin{aligned} \gamma \int_0^t a(x,z)\, e^{-\gamma(t-z)} dz \;&=\; e^{-\gamma t} \left(a(x,z)\, e^{\gamma z}\Big|_{z=0}^{t} - \int_0^t a_z(x,z)\, e^{\gamma z} dz \right) \\ = a(x,z) - \int_0^t a_z(x,z)\, e^{-\gamma(t-z)} dz & \\ = a(x,t) - \beta \int_0^t [u(x,z) - F(v(x,z))]\, e^{-\gamma(t-z)} dz & \\ = a(x,t) - \beta \int_0^t u(x,z)\, e^{-\gamma(t-z)} dz + \beta \int_0^t F(v(x,z))\, e^{-\gamma(t-z)} dz. & \end{aligned}$$

Por tanto,

$$v(x,t) = a(x,t) - \beta_1 \int_0^t u(x,z)\, e^{-\gamma(t-z)} dz + \beta_1 \int_0^t F(v(x,z))\, e^{-\gamma(t-z)} dz,$$

donde $\beta_1 = \beta - \lambda$. Ahora, mediante (18) y (22), se tiene que

$$\begin{aligned} v(x,t) = & \int_0^t \left(\mu(z)\, e^{-x\alpha(z)} - F(v(x,z))\right)\left(\beta - \beta_1 e^{-\gamma(t-z)}\right) dz \\ & + \int_0^t \int_0^x \alpha(z)\, F(v(x,z))\, e^{-(x-s)\alpha(z)} \left(\beta - \beta_1 e^{-\gamma(t-z)}\right) ds\, dz, \end{aligned} \tag{20}$$

con $\beta_1 = \beta - \lambda < 0$, ya que $\lambda > \beta$.

Así hemos obtenido el sistema de ecuaciones integrales (18)–(20) para las funciones $u(x,t)$, $a(x,t)$ y $v(x,t)$ en Q_T.

Usemos las hipótesis del Teorema 2.1 y el método estándar de las aproximaciones sucesivas para demostrar que la ecuación (20) tiene solución $v \in C(Q_T)$.

Definamos la sucesión de funciones $\{v_n(x,t)\}$, llamada *iteraciones de Picard*, por las fórmulas sucesivas

$$v_0(x,t) = 0, \quad F(v_0(x,t)) = F(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} v_n(x,t) = & M(x,t) + \int_0^t F(v_{n-1}(x,z))\left(\beta_1 e^{-\gamma(t-z)} - \beta\right) dz \\ & + \int_0^t \int_0^x \alpha(z)\, F(v_{n-1}(s,z))\, e^{-(x-s)\alpha(z)} \left(\beta - \beta_1 e^{-\gamma(t-z)}\right) ds\, dz, \end{aligned} \tag{21}$$

donde

$$M(x,t) = \int_0^t \mu(z)\, e^{-x\alpha(z)} \left(\beta - \beta_1 e^{-\gamma(t-z)}\right) dz.$$

Se mostrará que las iteraciones de Picard convergen uniformemente y dan, en el límite, la solución del problema de valor inicial para v.

Demostremos inductivamente que $|v_n(x,t) - v_{n-1}(x,t)|$ es acotado por una serie absolutamente convergente. Para ello definamos

$$\varphi_n(x,t) = v_n(x,t) - v_{n-1}(x,t),$$

con $v_n(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x,t)$, para todo $n \in N$. Para $n = 1$, se tiene de (22) que

$$\begin{aligned} |\varphi_1(x,t)| &= |M(x,t)| \le P \int_0^t e^{-x\alpha(z)} \left|\beta - \beta_1 e^{-\gamma(t-z)}\right| dz \\ &\le P \int_0^t |\beta - \beta_1|\, dz = P\lambda t, \end{aligned}$$

con $P = \max\limits_{z\in[0,t]} |\mu(z)|$.

Es de aclarar que, como $0 < z < t$ y $\gamma > 0$, entonces $-\gamma t < -\gamma(t-z) \leq 0$; y por tanto,

$$0 < e^{-x\alpha(z)} < 1, \qquad 0 < e^{-\gamma t} \leq e^{-\gamma(t-z)} < 1,$$

$$0 < e^{-x\alpha(z)} \leq 1.$$

Adicionalmente, como $\beta_1 = \beta - \lambda < 0$, tenemos que

$$0 < -\beta_1 e^{-\gamma(t-z)} < -\beta_1,$$

y por consiguiente que $0 < \beta < \beta - \beta_1 e^{-\gamma(t-z)} \leq \beta - \beta_1 = \lambda$. Luego

$$\left|\beta_1 e^{-\gamma(t-z)} - \beta\right| = \left|\beta - \beta_1 e^{-\gamma(t-z)}\right| < \lambda.$$

Si definimos

$$\mathfrak{F}(t) = F\left(v_{n-1}(t,z)\right) - F\left(v_{n-2}(t,z)\right),$$

tenemos para $n \geq 2$ que

$$\varphi_n(x,t) = \int_0^t [\mathfrak{F}(x)] \left(\beta_1 e^{-\gamma(t-z)} - \beta\right) dz + \int_0^t \int_0^x \alpha(z) [\mathfrak{F}(s)] e^{-\alpha(z)(x-s)} \left(\beta - \beta_1 e^{-\gamma(t-z)}\right) ds\, dz.$$

Si hacemos $A = \max\limits_{z\in[0,t]} |\alpha(z)|$, y teniendo en cuenta que F es una función de Lipschitz, es decir, existe una constante positiva L tal que

$$|F(y) - F(y^*)| \leq L\,|y - y^*|,$$

y se procede por inducción sobre n, $n \geq 2$, entonces tenemos que:

$$|\varphi_n(x,t)| \leq \frac{P}{2L}\frac{(2\lambda L t)^n}{n!} e^{Ax}.$$

Puesto que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2\lambda L t)^n}{n!}$ converge, entonces por el Criterio M de Weierstrass tenemos que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\varphi_n(x,t)|$ converge absoluta y uniformemente en Q_T. Como las funciones $v_n(x,t)$ son continuas en Q_T, entonces $v_n(x,t) \to \overline{v}(x,t) \in C(Q_T)$. Pasando al límite en (21) cuando $n \to \infty$ obtenemos que la función $\overline{v}(x,t)$ satisface la ecuación (20). Definiendo las funciones $\overline{u}(x,t)$, $\overline{a}(x,t)$ de la forma

$$u(x,t) = \mu(t) e^{-x\alpha(t)} + \alpha(t) \int_0^x F\left(\overline{v}(s,t)\right) e^{-\alpha(t)(x-s)} ds,$$

$$a\,(x,t) = \beta \int_0^t \mu\,(z)\, e^{-x\alpha(z)} dz - \beta \int_0^t F\,(\overline{v}\,(x,z))\, dz + \beta \int_0^t \int_0^x \alpha\,(z)\, F\,(\overline{v}\,(s,z))\, e^{-(x-s)\alpha(z)} ds\, dz. \tag{22}$$

obtenemos que las funciones $\overline{u}(x,t)$, $\overline{a}(x,t)$, $\overline{v}(x,t)$ son de clase $C(Q_T)$ y satisfacen (16)–(17). Un cálculo directo muestra que las funciones $\overline{u}(x,t)$, $\overline{a}(x,t)$, $\overline{v}(x,t)$ son soluciones de (8)–(12) para $(x,t) \in Q_T$. Mostremos que el sistema (16)–(18) tiene solución única.

Sean $u_1(x,t), a_1(x,t), v_1(x,t)$ y $u_2(x,t), a_2(x,t), v_2(x,t)$ soluciones del sistema (16)–(18). Puesto que $v_1(x,t)$,$v_2(x,t)$ son soluciones de la ecuación integral (18), entonces para $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$ es válida la desigualdad

$$\max_{0\le x\le l} |v_1(x,t) - v_2(x,t)| \le 4 \max\{\beta, |\beta_1|\}\, c_1 \int_0^t \max_{0\le x\le l} |v_1(x,\tau) - v_2(x,\tau)| d\tau.$$

Introduciendo la función

$$W(t) = \max_{0\le x\le l} |v_1(x,t) - v_2(x,t)|,$$

de la desigualdad anterior tenemos

$$W(t) \le A \int_0^t W(\tau) d\tau, \quad 0 \le t \le T,$$

donde $A = 4 \max\{\beta, |\beta_1|\}\, c_1$.

Por el Lema de Gronwall se desprende que $W(t) = 0$, donde $0 \le t \le T$. Por lo tanto, $v_1(x,t) = v_2(x,t)$ en Q_T. Las igualdades $u_1(x,t) = u_2(x,t)$, $a_1(x,t) = a_2(x,t)$ en Q_T se desprenden de (16), (17) y de la igualdad $v_1(x,t) = v_2(x,t)$ en Q_T.

2.4. Existencia y continuidad de las derivadas parciales de las funciones $u(x,t)$, $a(x,t)$ y $v(x,t)$

Puesto que las funciones $u(x,t)$, $a(x,t)$ y $v(x,t)$ son una solución de (1)–(5), entonces las derivadas u_x, a_t y v_t existen y son continuas en Q_T.

Al introducir la función

$$\vartheta_h(y) = \frac{v\,(x+h,y) - v\,(x,y)}{h},$$

tenemos de (20) que

$$\vartheta_h(t) = \int_0^t \mu\,(z)\, \beta_2\,(t,z)\, e^{-x\alpha(z)} \left(\frac{e^{-h\alpha(z)} - 1}{h} \right) dz$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_0^t \frac{F(v(x+h,z)) - F(v(x,z))}{h} \beta_2(t,z)\, dz \\
&+ \frac{1}{h} \int_0^t \int_0^{x+h} \alpha(z)\, \beta_2(t,z)\, F(v(s,z))\, e^{-(x+h-s)\alpha(z)} ds\, dz \\
&- \frac{1}{h} \int_0^t \int_0^{x} \alpha(z)\, \beta_2(t,z)\, F(v(s,z))\, e^{-(x-s)\alpha(z)} ds\, dz \\
= &\int_0^t \mu(z)\, \beta_2(t,z)\, e^{-x\alpha(z)} \left(\frac{e^{-h\alpha(z)} - 1}{h} \right) dz \\
&- \int_0^t \frac{F(v(x+h,z)) - F(v(x,z))}{h} \beta_2(t,z)\, dz \\
&+ \frac{1}{h} \int_0^t \left(\int_0^x \alpha(z)\, \beta_2(t,z)\, F(v(s,z))\, e^{-(x+h-s)\alpha(z)} ds \right. \\
&\left. + \int_x^{x+h} \alpha(z)\, \beta_2(t,z)\, F(v(s,z))\, e^{-(x+h-s)\alpha(z)} ds \right) dz \\
&- \frac{1}{h} \int_0^t \int_0^{x} \alpha(z)\, \beta_2(t,z)\, F(v(s,z))\, e^{-(x-s)\alpha(z)} dsdz \\
= &\int_0^t \mu(z)\, \beta_2(t,z)\, e^{-x\alpha(z)} \left(\frac{e^{-h\alpha(z)} - 1}{h} \right) dz \\
&- \int_0^t \frac{F(v(x+h,z)) - F(v(x,z))}{v(x+h,z) - v(x,z)} \vartheta_h(z) \beta_2(t,z)\, dz \\
&+ \int_0^t \int_0^{x} \alpha(z)\, \beta_2(t,z)\, F(v(s,z))\, e^{-(x-s)\alpha(z)} \left(e^{-h\alpha(z)} - \frac{1}{h} \right) dsdz \\
&+ \int_0^t \int_x^{x+h} \alpha(z)\, \beta_2(t,z)\, F(v(s,z))\, e^{-(x+h-s)\alpha(z)} ds\, dz \\
= &\; Q_1(x,h,t) + Q_2(x,h,t) + Q_3(x,h,t) \\
&- \int_0^t \rho(x,h,t) \frac{v(x+h,z) - v(x,z)}{h} \beta_2(t,z)\, dz,
\end{aligned}
$$

en donde

$$
\begin{aligned}
Q_1(x,h,t) &= \int_0^t \mu(z)\, \beta_2(t,z)\, e^{-x\alpha(z)} \left(\frac{e^{-h\alpha(z)} - 1}{h} \right) dz, \\
Q_2(x,h,t) &= \int_0^t \int_0^x \Big[\alpha(z)\, \beta_2(t,z)\, F(v(s,z)) \times \\
&\qquad \times\, e^{-(x-s)\alpha(z)} \left(e^{-h\alpha(z)} - \frac{1}{h} \right) \Big] ds\, dz, \\
Q_3(x,h,t) &= \int_0^t \int_x^{x+h} \alpha(z)\, \beta_2(t,z)\, F(v(s,z))\, e^{-(x+h-s)\alpha(z)} ds\, dz
\end{aligned}
$$

y

$$p(x,\Delta x,t)=\int_0^1 F'(v(x,t)+\theta(v(x+\Delta x)-v(x,t))d\theta. \tag{23}$$

Haciendo

$$w\left(x,h,z\right)=\frac{v\left(x+h,z\right)-v\left(x,z\right)}{h},$$

la ecuación anterior se nos convierte en

$$\begin{aligned} w\left(x,h,z\right)=Q_1\left(x,h,t\right)+Q_2\left(x,h,t\right)+Q_3\left(x,h,t\right)\\ -\int_0^t \rho\left(x,h,t\right)w\left(x,h,z\right)\beta_2\left(t,z\right)dz, \end{aligned}$$

la cual es una ecuación integral con núcleo $\rho\left(x,h,t\right)\beta_2\left(t,z\right)$, y cuya solución se expresa de la forma [4]

$$\begin{aligned} w\left(x,h,z\right)=Q_1\left(x,h,t\right)+Q_2\left(x,h,t\right)+Q_3\left(x,h,t\right)\\ -\int_0^t R\left(x,h,t,z\right)\left(Q_1\left(x,h,t\right)+Q_2\left(x,h,t\right)+Q_3\left(x,h,t\right)\right)dz, \end{aligned}$$

en donde $R\left(x,h,t,z\right)$ es la resolvente del núcleo. Finalmente, al tomar límite cuando $h\to 0$, se obtiene la existencia de v_x [4]. La continuidad de la función $v_x(x,t)$ en Q_T se desprende de esta representación. La existencia y continuidad de la función $u_t(x,t)$ en Q_T se desprende de la continuidad de $v_t(x,t)$ en Q_T como de $a_x(x,t)$. Por lo tanto u, a, $v\in C^1[Q_T]$.

2.5. Monotonía de las primeras derivadas parciales de las funciones $u(x,t)$, $a(x,t)$ y $v(x,t)$

Ahora demostramos las desigualdades (16), (17). Como $u,a,v\in C^1\left(Q_T\right)$, se sigue de (8)–(10) que las derivadas u_{xt}, a_{tt}, v_{tt} existen en Q_T.

Al derivar las ecuaciones (8)–(10) y las condiciones iniciales (11), (12) respecto a t, tenemos que las funciones

$$z\left(x,t\right)=u_t\left(x,t\right),\quad p\left(x,t\right)=a_t\left(x,t\right),\quad q\left(x,t\right)=v_t\left(x,t\right).$$

son la solución del problema

$$\begin{aligned} z_x+\alpha\left(t\right)z&=\alpha\left(t\right)F'\left(v\right)q+\varphi\left(t\right)p, && (x,t)\in Q_T, && (24)\\ p_t&=\beta\left(z-F'\left(v\right)q\right), && (x,t)\in Q_T, && (25)\\ q_t+\gamma q&=\gamma p+\frac{\lambda}{\beta}p_t, && (x,t)\in Q_T, && (26)\\ z\left(0,t\right)&=\mu'\left(t\right), && t\in\left[0,T\right], && (27)\\ p\left(x,0\right)&=q\left(x,0\right)=0, && x\in\left[0,l\right], && (28) \end{aligned}$$

en donde
$$\alpha(t) = \frac{\beta}{\nu(t)}, \quad \varphi(t) = \frac{\nu'(t)}{\nu^2(t)}. \tag{29}$$

Como $e^{x\alpha(t)}$ es un factor de integración del problema de valor inicial (24), (27), en x, su solución está dada de la forma

$$z(x,t) = \mu'(t)\, e^{-x\alpha(t)} + \int_0^x [\alpha(t) F'(v(s,t))\, q(s,t) + \varphi(t)\, p(s,t)]\, e^{-(x-s)\alpha(t)} ds. \tag{30}$$

El problema (26), (28) lo podemos escribir como el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} q_t + (\gamma + \lambda F'(v))\, q &= \gamma p + \lambda z, \\ q(x,0) &= 0, \quad x \in [0,l]. \end{aligned}$$

Dado que el factor integrante de la ecuación diferencial de este problema es de la forma
$$A(t) = e^{\int_0^t (\gamma + \lambda F'(v(x,s)))ds} = e^{\gamma t + \lambda \int_0^t F'(v(x,s))ds},$$

la solución de este problema es de la forma

$$\begin{aligned} q(x,t) &= q(x,0)\, A^{-1}(t) + A^{-1}(t) \int_0^t (\gamma p(x,r) + \lambda z(x,r))\, A(r)\, dr \\ &= e^{-\gamma t - \int_0^t F'(v(x,s))ds} \int_0^t (\gamma p(x,r) + \lambda z(x,r))\, e^{\gamma r + \lambda \int_0^r F'(v(x,s))ds} dr \\ &= \int_0^t (\gamma p(x,r) + \lambda z(x,r))\, e^{-\gamma(t-r) + \lambda\left(\int_0^r F'(v(x,s))ds - \int_0^t F'(v(x,s))ds\right)} dr; \end{aligned}$$

y como $0 \le r \le t$,
$$\int_0^t F'(v(x,s))\, ds = \int_0^r F'(v(x,s))\, ds + \int_r^t F'(v(x,s))\, ds,$$

de lo cual se sigue que

$$q(x,t) = \int_0^t (\gamma p(x,r) + \lambda z(x,r))\, e^{-\gamma(t-r) + \lambda \int_r^t F'(v(x,s))ds} dr. \tag{31}$$

La solución del problema (25), (28) se encuentra resolviendo primero el problema (26), (28). El factor integrante en este caso está dado de la forma $e^{\int_0^t \gamma ds} = e^{\gamma t}$, así que la solución del problema (26), (28) está dada como

$$q(x,\tau)\, e^{\gamma\tau}\big|_{\tau=0}^{t} = \int_0^t \left(\gamma p(x,\tau) + \frac{\lambda}{\beta} p_\tau(x,\tau)\right) e^{\gamma\tau} d\tau,$$

o lo que es lo mismo,

$$q(x,t) = \int_0^t \left(\gamma p(x,\tau) + \frac{\lambda}{\beta} p_\tau(x,\tau)\right) e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau.$$

Usando integración por partes en la segunda integral del lado derecho encontramos que

$$\begin{aligned} q(x,t) &= \gamma \int_0^t p(x,\tau)\, e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau \\ &\quad + \frac{\lambda}{\beta}\left(p(x,\tau)\, e^{-\gamma(t-\tau)}\Big|_{\tau=0}^{t} - \gamma \int_0^t p(x,\tau)\, e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau \right) \\ &= \gamma \int_0^t p(x,\tau)\, e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau + \frac{\lambda}{\beta} p(x,t) - \frac{\lambda\gamma}{\beta} \int_0^t p(x,\tau)\, e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau, \end{aligned}$$

o

$$q(x,t) = \frac{\lambda}{\beta} p(x,t) + \frac{\gamma(1-\lambda)}{\beta} \int_0^t p(x,\tau)\, e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau. \tag{32}$$

Reemplazando (32) en (26) obtenemos la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} p_t &= \beta z - \beta F'(v)\, q \\ &= \beta z - F'(v) \left[\frac{\lambda}{\beta} p(x,t) + \frac{\gamma(1-\lambda)}{\beta} \int_0^t p(x,\theta)\, e^{-\gamma(t-\theta)} d\theta \right], \end{aligned}$$

la cual junto con (28) da el problema de valor inicial siguiente:

$$\begin{aligned} p_t + \lambda F'(v)\, p &= \beta z - \gamma(\beta-\lambda) F'(v) \int_0^t p(x,\theta)\, e^{-\gamma(t-\theta)} d\theta, \\ p(x,0) &= 0, \quad x \in [0,l]. \end{aligned}$$

Puesto que

$$e^{\lambda \int_0^t F'(v(x,s))ds}$$

es el factor integrante de la ecuación diferencial de este problema, su solución la podemos escribir de la forma

$$\begin{aligned} p(x,\tau)\, e^{\lambda \int_0^\tau F'(v(x,s))ds}\Big|_{\tau=0}^{t} &= \int_0^t \big(\beta z(x,\tau) - \gamma(\beta-\lambda) F'(v(x,\tau)) \times \\ &\quad \times \int_0^\tau p(x,\theta)\, e^{-\gamma(\tau-\theta)} d\theta \Big)\, e^{\lambda \int_0^\tau F'(v(x,s))ds} d\tau, \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo, como

$$\begin{aligned} p(x,t) &= \int_0^t \Big(\beta z(x,\tau) - \gamma(\beta-\lambda) \times \\ &\quad \times \int_0^\tau p(x,\theta)\, F'(v(x,\tau))\, e^{-\gamma(\tau-\theta)} d\theta \Big)\, e^{\lambda\left[\int_0^\tau F'(v(x,s))ds - \int_0^t F'(v(x,s))ds\right]} d\tau \\ &= \int_0^t \Big(\beta z(x,\tau) \\ &\quad - \gamma(\beta-\lambda) \int_0^\tau p(x,\theta)\, F'(v(x,\tau))\, e^{-\gamma(\tau-\theta)} d\theta \Big)\, e^{-\lambda \int_\tau^t F'(v(x,s))ds} d\tau \end{aligned}$$

$$= \beta \int_0^t z(x,\tau)\, e^{-\lambda \int_\tau^t F'(v(x,s))ds} d\tau$$
$$- \gamma(\beta-\lambda) \int_0^t \int_0^\tau p(x,\theta)\, F'(v(x,\tau))\, e^{-\gamma(\tau-\theta)-\lambda\int_\tau^t F'(v(x,s))ds} d\theta d\tau.$$

Cambiando de orden de integración en la integral doble se obtiene finalmente que

$$\begin{aligned} p(x,t) &= \beta \int_0^t z(x,\tau)\, e^{-\lambda \int_\tau^t F'(v(x,s))ds} d\tau \\ &- \gamma(\beta-\lambda) \int_0^t \left[p(x,\theta) \int_\theta^t F'(v(x,\tau))\, e^{-\gamma(\tau-\theta)-\lambda\int_\tau^t F'(v(x,s))ds} d\tau \right] d\theta. \end{aligned} \tag{33}$$

Ahora, de (24)–(33) se deduce que

$$\begin{aligned} z(x,0) &= \mu'(0)\, e^{-x\alpha(0)} \\ &\quad + \int_0^x \left[\alpha(0) F'(v(s,0))\, q(s,0) + \varphi(0)\, p(x,0)\right] e^{-(x-s)\alpha(0)} ds \\ &= \mu'(0)\, e^{-x\alpha(0)} > 0, \end{aligned}$$

$$p_t(x,0) = \beta\left(z(x,0) - F'(v(x,0))\, q(x,0)\right) = \beta z(x,0) > 0,$$

$$q_t(x,0) = -\gamma q(x,0) + \gamma p(x,0) + \frac{\lambda}{\beta} p_t(x,0) = \frac{\lambda}{\beta} p_t(x,0) > 0,$$

para todo $x \in [0,l]$. Así que existe un $t_0 \in (0,T]$ tal que

$$z(x,t) > 0,\ p(x,t) > 0,\ q(x,t) > 0, \tag{34}$$

para todo $(x,t) \in Q^0_{t_0}$, en donde $Q^0_{t_0} = [0,l] \times (0,T]$.

Supongamos que la positividad de las funciones z, p, q no tiene lugar en $Q^0_{t_0}$. Entonces existe un $(x_1,t_1) \in [0,l] \times (t_0,T]$ tal que (34) se cumple para todo $(x,t) \in [0,l] \times (0,t_1)$ y

$$z(x_1,t_1)\, p(x_1,t_1)\, q(x_1,t_1) = 0.$$

Esta igualdad es sólo valida cuando al menos unos de los factores es nulo. Probemos lo contrario.

Se sigue de (30) que $z(x_1,t_1) > 0$, de (32) que $q(x_1,t_1) > 0$ y de (33) que $p(x_1,t_1) > 0$; lo cual es una contradicción, y las desigualdades (16) quedan demostradas. ☑

Referencias

[1] TÍJONOV A. N., ZHUJOVISTKY A. A. and ZABEZHINSKY I. A. "Absorción de un gas en tubo de aire por un campo de material poroso". J. Físico-Química, 1945, Vol. 6 (**19**), 253–261.

[2] ANGER G. *Inverse Problems in Differential Equations*. Akademie-Verlag, Berlin, 1990, Plenum Press.

[3] DENISOV A. M. "Local and Global Uniqueness of Solution to the Problem of Determining a Nonlinear Coefficient in a System of Partial Differential Equations". *Siberian Mathematical Journal*, 1995, Vol. 36, No. 1, p. 55-65.

[4] LAMOS H. and DENISOW A. M. "The Problem of Determining the Kinetic Coefficient in Mathematical Model of Sorption Dynamics". *Computational Mathematics and Modeling*, 1999, Vol. 10, No. 3, 207-213.

GILDARDO GUZMÁN, JULIO CARRILLO & EDILBERTO REYES
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
A.A. 678, Bucaramanga, Colombia.
e-mail: gguzman@uis.edu.co, jccarril@uis.edu.co, ereyes@uis.edu.co.