Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 21, Nos. 1 y 2, 2003, pág. 63–67

Introducción al problema de prescribir la curvatura gaussiana sobre $\mathbb{R}^2$

Óscar Andrés Montaño Carreño*

Resumen. A partir de elementos conocidos como el producto escalar, el ángulo entre dos vectores, la proyección estereográfica y la curvatura de una superficie, entre otros, queremos formular un problema clásico en geometría diferencial. El problema consiste en demostrar la existencia de una métrica g conforme puntualmente a la métrica usual de $\mathbb{R}^2$, de tal manera que la curvatura gaussiana calculada con la nueva métrica coincida con una función suave K dada previamente y que llamaremos curvatura prescrita.

1. Introducción

Sea $(\mathbb{R}^2, \delta_{ij})$ el plano con la métrica usual. Si g es otra métrica riemanniana en $\mathbb{R}^2$, diremos que g es puntualmente conforme a δ_{ij} si y sólo si existe una función $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $g = e^{2u}\delta_{ij}$. Un problema clásico en geometría diferencial es determinar la familia de funciones K definidas sobre el plano para las cuales existe una métrica g, conforme a la métrica δ_{ij} y con curvatura de Gauss K.

Dada la función K, la existencia de g es equivalente a la existencia de una solución suave que satisface el problema siguiente:

$$\Delta u + Ke^{2u} = 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^2, \quad \text{donde} \quad g = e^{2u}\delta_{ij}. \tag{1}$$

Pretendemos en este artículo demostrar esta equivalencia, y usar la inversa de la proyección estereográfica para exhibir un ejemplo de una métrica conforme con curvatura gaussiana prescrita igual a uno.

2. Preliminares

2.1. Métricas riemannianas

Una variedad riemanniana es una variedad suave, en la que hemos escogido una función real, bilineal, simétrica y positivamente definida sobre los pares ordenados

Palabras y frases claves: métrica conforme, geometría diferencial, curvatura gaussiana.
MSC2000: Primaria: 53A10, 53C21. Secundaria: 58D17, 54E40.
* Departamento de Ciencias y Matemáticas, Pontificia Universidad Javeriana, Cali, Colombia, *e-mail*: omontano@puj.edu.co.

de vectores tangentes en cada punto. Así, si X, Y y Z pertenecen al espacio tangente a $\mathbb{R}^2$, $T_p\mathbb{R}^2$, en el punto p, entonces $g_p(X, Y)$ es un número real y satisface las siguientes propiedades:

a) $g_p(X, Y) = g_p(Y, X)$. (simétrica)

b) $g_p(aX + bY, Z) = ag_p(X, Z) + bg_p(Y, Z), \quad a, b \in \mathbb{R}$. (bilineal)

c) $g_p(X, X) > 0, \ \forall X \neq 0$. (positivamente positiva)

d) $g_p(X, Y) = 0, \ \forall X \quad \text{implica} \quad Y = 0$. (no singular)

2.2. La primera forma fundamental

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie suave y regular. El producto escalar que define la estructura euclidiana en $\mathbb{R}^3$ determina por restricción una forma bilineal simétrica y no degenerada en cada uno de los espacios tangentes a la superficie, T_pf, $p \in \mathbb{R}^2$. Dado que la diferencial $df(p)$ es una biyección entre $T_p\mathbb{R}^2$ y el espacio tangente T_pf, la primera forma fundamental determina también una métrica riemanniana sobre $\mathbb{R}^2$, así:

$$g_p(X, Y) = \langle df(p)X, df(p)Y \rangle, \quad p \in \mathbb{R}^2, \quad X, Y \in T_p\mathbb{R}^2,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar de $\mathbb{R}^3$.

Las componentes de la matriz de la forma bilineal en la base fija $\{e_1, e_2\}$ en p son $g_{ij} = g_p(e_i, e_j)$. (Gauss usó la notación $E = g_{ij}$, $g_{12} = g_{21} = F, g_{22} = G$).

2.3. Inversa de la proyección estereográfica

La parametrización más natural de la esfera de radio 1 y centro en el origen, S^2, está dada por las coordenadas "geográficas", o esféricas. Podemos, sin embargo considerar otra parametrización que usa la proyección estereográfica. Dado el punto $q \in S^2$, consideramos la línea recta que pasa por dicho punto y por el polo norte $N = (0, 0, 1)$. El punto de intersección de la recta con el plano xy es la imagen de q bajo la proyección estereográfica y se denota por $\Pi(q)$. La aplicación inversa $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 - N$ define una parametrización de la esfera y está dada por la fórmula

$$\Pi^{-1}(x, y) = \left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \ \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \ \frac{x^2 + y^2 - 1}{1 + x^2 + y^2} \right).$$

Con un cálculo sencillo obtenemos

$$d\Pi^{-1}(x, y) = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} \begin{bmatrix} 2 - 2x^2 + 2y^2 & -4xy \\ -4xy & 2 + 2x^2 - 2y^2 \\ 4x & 4y \end{bmatrix};$$

por lo tanto, la matriz de la métrica riemanniana inducida por la *primera forma fundamental* es: $[g] = \dfrac{4}{(1 + x^2 + y^2)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Obsérvese que esta métrica es igual a una función positiva multiplicada por la matriz de la métrica usual.

3. *Métricas conformes*

Definición 3.1. La métrica g es conforme puntualmente a la métrica usual de $\mathbb{R}^2$, δ_{ij} si y sólo si

$$\frac{g(X,Y)}{\sqrt{g(X,X)}\sqrt{g(Y,Y)}} = \frac{\delta_{ij}(X,Y)}{\sqrt{\delta_{ij}(X,X)}\sqrt{\delta_{ij}(Y,Y)}}, \quad \text{para} \quad X,Y \in T_p\mathbb{R}^2,\ p \in \mathbb{R}^2.$$

Es decir, g conserva los ángulos entre los vectores. A manera de ejemplo, podemos decir que la métrica riemanniana inducida por la inversa de la proyección estereográfica es conforme puntualmente a la métrica usual de $\mathbb{R}^2$.

Teorema 3.2. *La métrica g es conforme puntualmente a la métrica usual δ_{ij} de $\mathbb{R}^2$ si y sólo si $g = e^{2u}\delta_{ij}$, para alguna función $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.*

Demostración. La demostración se hará en un solo sentido; el otro se deja como ejercicio.

Sea $[g] = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$, conforme puntualmente a la métrica δ_{ij}.

Tomando $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y aplicando la Definición 3.1, obtenemos $F = 0$; por otra parte con $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ se obtiene la ecuación $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{E}{\sqrt{E}\sqrt{E+G}}$, de donde se deduce $E = G$. Por ser g una forma bilineal positivamente definida, entonces $E > 0$. Concluimos entonces que $g = E(p)\delta_{ij} = e^{2u}\delta_{ij}$, donde $u = \frac{1}{2}\ln E(p)$ y $p = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. ☑

A continuación daremos respuesta a la siguiente pregunta: ¿Qué relación existe entre la función u y la curvatura gaussiana K relativa a la métrica conforme g?

Teorema 3.3. *Si g es una métrica conforme puntualmente a la métrica usual δ_{ij} de $\mathbb{R}^2$, y K es la curvatura gaussiana relativa a g, entonces*

$$\Delta u + Ke^{2u} = 0 \quad en \quad \mathbb{R}^2, \quad donde \quad g = e^{2u}\delta_{ij}. \tag{2}$$

Demostración. Se sabe que la curvatura de Ricci de g se expresa así:

$$R_{ij} = \frac{\partial \Gamma_{ij}t}{\partial x^t} - \frac{\partial \Gamma_{it}^t}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^s\Gamma_{st}^t - \Gamma_{it}^s\Gamma_{sj}^t,$$

donde

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)$$

son los símbolos de Christoffel para g. La curvatura gaussiana está dada por la fórmula

$$2K = R = \frac{1}{2}\sum_{ij} g^{ik}R_{ik}, \quad \text{donde} \quad R \quad \text{es la curvatura escalar.} \tag{3}$$

Si g es puntualmente conforme a δ_{ij}, entonces $g_{ij} = e^{2u}\delta_{ij}$ y $g^{ij} = e^{-2u}\delta_{ij}$.

Tenemos entonces que

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\partial u}{\partial x^1}, \qquad \Gamma^1_{12} = \frac{\partial u}{\partial x^2}, \qquad \Gamma^1_{21} = \frac{\partial u}{\partial x^2}, \qquad \Gamma^1_{22} = -\frac{\partial u}{\partial x^1},$$

$$\Gamma^2_{11} = -\frac{\partial u}{\partial x^2}, \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{\partial u}{\partial x^1}, \qquad \Gamma^2_{21} = \frac{\partial u}{\partial x^1}, \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{\partial u}{\partial x^2},$$

$$R_{11} = -2\Delta u, \qquad R_{22} = -2\Delta u.$$

De (3) se obtiene la ecuación deseada

$$\Delta u + Ke^{2u} = 0.$$ ☑

En el caso de la inversa de la proyección estereográfica se puede verificar que $u = \ln 2 - \ln(1 + x^2 + y^2)$ satisface la ecuación (2) con $K = 1$.

En el caso de $\mathbb{R}^2$ podemos afirmar: dada la curvatura gaussiana prescrita $K = 1$, existe al menos una métrica g conforme puntualmente a la usual tal que la curvatura gaussiana de $\mathbb{R}^2$ con la métrica g coincide con K.

Es claro que esta métrica es la inducida por la inversa de la proyección estereográfica. La pregunta general será: ¿para qué clase de funciones K existe una métrica conforme g tal que la curvatura gaussiana relativa a g sea K?

Algunos resultados obtenidos son los siguientes:

Si K es no positiva y $|K(p)|$ decae más lento que $|p|^{-2}$ en infinito, entonces la ecuación (2), y por ende el problema de la deformación conforme, no tiene solución (ver [7]). Sin embargo, si K es positiva en algún punto, la situación es diferente. Si $K(p_0) > 0$ para algún $p_0 \in \mathbb{R}^2$, R. C. Mc Owen (ver [5]) probó que para $K(p) = O(r^{-L})$ cuando $r \to \infty$, la ecuación (2) tiene una solución en C^2, donde L es una constante positiva. Adicionalmente no es difícil ver que la ecuación (2) tiene soluciones para cada constante positiva $K = C$. Para el caso en que K es no positivo en todo $\mathbb{R}^2$, K. Chen y C. Lin probaron un resultado de existencia, siempre y cuando K satisfaga ciertas condiciones adicionales (ver [3]).

Referencias

[1] García G. y Montaño O. "Métricas conformes en superficies compactas con frontera". *Matemáticas Enseñanza Universitaria*, Vol. XI, Nos. 1 y 2, 2003, pp. 33–44.

[2] Kazdan J. L. and Warner F. W. "Integrability Conditions for $\Delta u = k - \tilde{k}e^{2u}$ with Applications to Riemannian Geometry". *Bull. Amer. Math. Soc.*, **77** (1971), 819–823.

[3] Cheng K. and Lin C. "On the Conformal Curvature Equation in $\mathbb{R}^2$". *Journal of Differential Equations*, **146** (1998), 226–250.

[4] Solanilla. L. "Sobre la imposibilidad de la representación conforme de la totalidad del plano euclidiano sobre una superficie de curvatura negativa constante".

[5] Owen R. C. "Conformal Metrics in $\mathbb{R}^2$ with Prescribe Gaussian Curvatura and Positive Total Curvature". *Indiana Univ. Math. J.*, **34** (1985), 97–104.

[6] Ni W. M. "On the Elliptic Equation with Prescribe Gaussian Curvature". *Invent. Math.*, **66** (1982), 343–352.

[7] Wu S. "Prescribing Gaussian Curvature on $\mathbb{R}^2$". *American Mathematical Society*, Volume 125 (1997).

Óscar Andrés Montaño Carreño
Departamento de Ciencias y Matemáticas
Pontificia Universidad Javeriana
Cali, Colombia
e-mail: omontano@puj.edu.co