Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 21, Nos. 1 y 2, 2003, pág. 49–62

Una introducción a los funtores normales

Javier Camargo García*

Resumen. En el presente escrito se introducirá el funtor de hiperespacios F_2 clasificandolo como normal. Además se mostrará una rápida introducción al estudio de la teoría de funtores en la categoría de los espacios compactos de Hausdorff.

1. Introducción

A mediados del siglo XX se realizaron muchas investigaciones sobre propiedades topológicas de los funtores, especialmente en las categorías de Tíjonov y de los espacios compactos de Hausdorff. La teoría general de funtores en estas categorías tiene origen en *Functors and Uncontable Powers of Compacta* [6] en 1981, donde *Evgenii Schepin*, utilizando propiedades topológicas como continuidad, preservación de peso, preimágenes, etc., introduce la noción de funtor normal.

En general, en el estudio de estos funtores se muestran ejemplos no muy adecuados para un estudiante con un curso básico de topología general. En este escrito, basado en construcciones clásicas de topología, mostraremos ejemplos sencillos de funtores que cumplen varias propiedades topológicas, motivando al lector a que adelante estudios en esta rama tan poco explorada de las matemáticas.

2. Preliminares

En esta sección se enunciarán definiciones básicas de topología general, así como de teoría de categorías, necesarias para el desarrollo del presente escrito.

2.1. Conceptos topológicos

Cada espacio topológico X posee una base con cardinalidad mínima entre todas las base del espacio. A este cardinal se lo llama el *peso* del espacio topológico X, y se denotará por $w(X)$. En otras palabras,

$$w(X) = \text{mín}\{|\beta| : \beta \text{ es base de } X\}.$$

Palabras y frases claves: funtores normales, categorías, espacios compactos.
MSC2000: Primaria: 46M15. Secundaria: 18A22.
* Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, Colombia, *e-mail*: jecamar@uis.edu.co.

Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de espacios topológicos, y definamos:

$$\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha \equiv \{f : \mathcal{A} \to \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha : f(\alpha) \in \mathcal{A}, \forall\alpha \in \mathcal{A}\},$$

que llamaremos el *espacio producto* ó *de Tíjonov*, con la topología donde los abiertos básicos son de la forma

$$O = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i});\ \text{donde } U_{\alpha_i} \text{ es abierto de } X_{\alpha_i},$$

en la cuál π_α denota la proyección del producto $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ sobre el espacio X_α. Por definición de la topología se tiene que π_α es continua y abierta (no necesariamente cerrada). Esta topología definida sobre el espacio producto se conoce como la topología de Tíjonov. Si $X_\alpha = X$ para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, denotaremos $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ mediante la abreviación $X^{\mathcal{A}}$.

Ejemplo 2.1. Sea X un espacio topológico y consideremos el espacio producto $\mathbb{R}^X$; es fácil verificar que los abiertos básicos de este espacio son de la forma

$$O = \langle f; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon\rangle,$$

donde $f \in \mathbb{R}^X, x_1, \ldots, x_n \in X$ y $\varepsilon > 0$; además si, $g \in O$ se tiene que $|f(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon$, para cada $i = 1, \ldots, n$.

Un *sistema inverso* de espacios topológicos es una familia $S = \{X_\delta, p_\rho^\delta, A\}$, donde A es un conjunto dirigido con la relación $\leq$ (A es un conjunto dirigido con la relación $\leq$ si es reflexiva, transitiva y para cada $x, y \in A$ existe un $z \in A$ tal que $x \leq z$ y $y \leq z$), X_δ es un espacio topológico para cada $\delta \in A$ y p_ρ^δ es una aplicación continua $p_\rho^\delta : X_\delta \to X_\rho$ para cada par $\delta, \rho \in A$, tal que $\rho \leq \delta$.

Además, para cada tres elementos $\tau, \rho, \delta \in A$, con $\tau \leq \rho \leq \delta$, se cumple

$$p_\tau^\rho \circ p_\rho^\delta = p_\tau^\delta \quad \text{y} \quad p_\alpha^\alpha = id_{X_\alpha},\ \text{para cada } \alpha \in A.$$

Consideremos el producto cartesiano $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$; el elemento $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ del producto cartesiano es llamado un *rayo* del sistema inverso S, si para cada par $\delta, \rho \in A$ tal que $\rho \leq \delta$, se tiene que $p_\rho^\delta(x_\delta) = x_\rho$.

El subespacio de $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ que consiste de todos los rayos del sistema inverso $S = \{X_\delta, p_\rho^\delta, A\}$ es llamado el *límite del sistema inverso* S, y lo notaremos como

$$\varprojlim S \quad \text{ó} \quad \varprojlim\{X_\delta, p_\rho^\delta, A\}.$$

La prueba de la siguiente proposición se puede encontrar en [3] y es fundamental para comprensión del texto subsiguiente.

Proposición 2.2. *El límite de un sistema inverso $S = \{X_\delta, p_\rho^\delta, A\}$ de espacios de Hausdorff es un subconjunto cerrado del producto cartesiano de estos espacios.*

Ejemplo 2.3. Consideremos el sistema inverso $S = \{I_{t_1}, j_{t_2}^{t_1}, \mathbb{R}^+\}$, donde claramente $\mathbb{R}^+$ es un conjunto dirigido, $I_t = [-t, t]$ para cada $t \in \mathbb{R}^+$ y $j_{t_2}^{t_1}$ es la inmersión natural para cada $t_1 \leq t_2$. Es inmediato verificar que S es un sistema inverso. Además, el límite del sistema inverso es $\{0\}$ ($\varprojlim S = \{0\}$).

Como caso particular de sistema inverso, es común tomar como conjunto dirigido $\mathbb{N}$; en este caso el sistema inverso lo llamaremos *sucesión inversa*, y es correcto representarlo por:

$$X_1 \leftarrow f_1^2 - X_2 \leftarrow f_2^3 - \ldots \leftarrow f_{k-2}^{k-1} - X_{k-1} \leftarrow f_{k-1}^{k} - X_k \leftarrow \ldots$$

y $X_\infty \subset \prod_{i=1}^{\infty} X_i$, donde si $x \in X_\infty$, se tiene $f_n^m(x_m) = x_n, n \leq m$.

2.2. Conceptos categóricos

Por una categoría vamos a entender una cuádrupla $\mathcal{C} = (Ob, \hom, id, \circ)$, donde $Ob\mathcal{C}$ es una clase cuyos miembros son llamados objetos de la categoría, (también lo notaremos por $|\mathcal{C}|$); para cada par de objetos A, B, existe el conjunto $\hom_{\mathcal{C}}(A, B)$; estos conjuntos son disjuntos dos a dos, y sus elementos son llamados morfismos o flechas de la categoría, que tienen dominio A y contradominio B; un morfismo $id_A \in \hom_{\mathcal{C}}(A, A)$, para cada $A \in |\mathcal{C}|$, llamado el morfismo identidad de A, y una ley de composición asociativa ($\circ$) tal que si $f \in \hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ y $g \in hom_{\mathcal{C}}(B, C)$, entonces $g \circ f \in hom_{\mathcal{C}}(A, C)$, llamada composición de f y g, tal que $f \circ id_A = id_B \circ f = f$.

Un morfismo $f \in \hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ es llamado un *epimorfismo* si para todo par de morfismos $g, h \in \hom_{\mathcal{C}}(B, C)$ tales que $h \circ f = g \circ f$ se tiene que $h = g$. De la misma forma, un morfismo $f \in \hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ es llamado un *monomorfismo* si para todo par de morfismos $g, h \in \hom_{\mathcal{C}}(C, A)$ tales que $f \circ h = f \circ g$ se tiene que $h = g$.

Ejemplo 2.4. Este trabajo se desarrollará en la categoría donde los objetos son espacios compactos de Hausdorff y los morfismos funciones continuas con la operación composición usual de funciones; esta categoría la denotaremos por Comp.

Para la categoría Comp, un epimorfismo (monomorfismo) es simplemente una función sobreyectiva (inyectiva).

Ahora bien, si $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ son categorías, un funtor es una aplicación F de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$, tal que si $A \in |\mathcal{C}|$ se tiene que $FA \in |\mathcal{D}|$, y si $f \in \hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ se tiene $Ff \in \hom_{\mathcal{D}}(FA, FB)$, de tal manera que $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$ y $F\, id_A = id_{FA}$ para cada A objeto de $\mathcal{C}$. Si F es un funtor de una categoría $\mathcal{C}$ en sí misma, llamaremos a F un endofuntor en la categoría $\mathcal{C}$.

A continuación se darán unos ejemplos con características de la teoría de funtores en los espacios compactos de Hausdorff, que enunciaremos con detalle más adelante. Para esto consideremos la siguiente notación: sea X un espacio compacto de Hausdorff; mediante $C(X)$ denoto el espacio de Banach de las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ (funcionales) donde

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Además, para cada α en $\mathbb{R}$ definimos el funcional α_X en $C(X)$ como $\alpha_X(x) = \alpha$ para cada x en X.

Ejemplo 2.5. Consideremos $X \in |\,\mathrm{Comp}\,|$. Definimos $VX = \prod_{\varphi \in C(X)} I_{\|\varphi\|}$, donde $I_{\|\varphi\|} = [-\|\varphi\|, \|\varphi\|]$; es decir, $VX \subset \mathbb{R}^{C(X)}$, así que si $\upsilon \in VX$, para cada $\varphi \in C(X)$ se tiene $|\upsilon(\varphi)| \leq \|\varphi\|$. Claramente VX es un espacio compacto de Hausdorff, con lo que $VX \in |\,\mathrm{Comp}\,|$. Para definir un endofuntor en Comp, consideremos $f \in \hom(X, Y)$ un morfismo y definamos $Vf \in \hom(VX, VY)$ mediante la fórmula

$$\pi_\psi \circ Vf = \pi_{\psi \circ f}.$$

Así pues, si $\upsilon \in VX$ y $\psi \in C(Y)$, se tiene

$$Vf(\upsilon)(\psi) = \upsilon(\psi \circ f).$$

Nótese que $\|\pi_{\psi \circ f}\| \leq \|\psi \circ f\| \leq \|\psi\|$. Se verifica de inmediato que $Vg \circ Vf = V(g \circ f)$ y $V\, id_X = id_{VX}$ para cada $X \in |\,\mathrm{Comp}\,|$, luego V es un endofuntor en Comp.

A continuación daremos un ejemplo presentado con detalle en [2], donde la imagen funtorial de un espacio compacto de Hausdorff, al igual que en el anterior ejemplo, tiene representación funcional (es subespacio de $\mathbb{R}^{C(X)}$), lo que facilita algunas pruebas de resultados posteriores.

Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos y $\varphi : (X, d) \to (Y, d')$. Se dice que φ es inexpandible si para cualquiera $x_1, x_2 \in X$ se tiene

$$d'(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leq d(x_1, x_2).$$

Ejemplo 2.6. Para cada $X \in |\mathrm{Comp}|$ definimos

$$EX = \{\upsilon : C(X) \to \mathbb{R} : \upsilon(c_X) = c, \text{ para todo } c \in \mathbb{R} \text{ y } \upsilon \text{ es inexpandible}\}.$$

Claramente $EX \subset \mathbb{R}^{C(X)}$, luego del ejemplo 2.1 los abiertos básicos de EX son de la forma

$$\{(\upsilon; \varphi_1, \ldots, \varphi_n; \varepsilon) : \upsilon \in EX\ , \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C(X), \varepsilon > 0\}.$$

El siguiente teorema garantiza que E definido de esta manera funciona bien para los objetos como un funtor en Comp.

Teorema 2.7. *Si $X \in |\mathrm{Comp}|$, entonces $EX \in |\mathrm{Comp}|$.*

Demostración. Como $EX \subset \mathbb{R}^{C(X)}$ y $\mathbb{R}^{C(X)}$ es de Hausdorff, entonces EX es también de Hausdorff, luego tenemos que probar que EX es compacto. Sean $\upsilon \in EX$ y $\varphi \in C(X)$; entonces, considerando $\varphi, 0_X \in C(X)$, por la definición de funcional inexpandible tenemos

$$|\upsilon(\varphi) - \upsilon(0_X)| \leq \|\varphi - 0_X\|\,;$$

se tiene que $|\upsilon(\varphi)| \leq \|\varphi\|$, con lo que $EX \subset VX$, por lo que nos resta probar que EX es subconjunto cerrado de VX.

Sea $\mu \in VX - EX$; luego μ no debe cumplir una de las dos condiciones para estar en EX. Supongamos primero que existe un $c \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(c_X) \neq c$; entonces tomemos $\varepsilon = |\mu(c_X) - c|$, y consideremos el abierto $(\mu; c_X; \frac{\varepsilon}{2})$.

Si $\mu' \in (\mu; c_X; \frac{\varepsilon}{2})$, entonces $|\mu'(c_X) - \mu(c_X)| < \frac{\varepsilon}{2}$. De aquí,

$$|\mu(c_X) - c| - |\mu'(c_X) - c| \leq |\mu'(c_X) - \mu(c_X)| < \frac{|\mu(c_X) - c|}{2},$$

$$0 < \frac{|\mu(c_X) - c|}{2} < |\mu'(c_X) - c| .$$

Por lo tanto, para cada $\mu' \in (\mu; c_X; \frac{\varepsilon}{2})$, $\mu' \notin EX$; entonces $(\mu; c_X; \frac{\varepsilon}{2}) \subset VX - EX$, luego μ es punto interior de $VX - EX$.

Ahora bien, supongamos que existen $\psi_1, \psi_2 \in C(X)$ tales que

$$|\mu(\psi_1) - \mu(\psi_2)| > \|\psi_1 - \psi_2\|;$$

tomemos $\varepsilon = |\mu(\psi_1) - \mu(\psi_2)| - \|\psi_1 - \psi_2\|$, y el abierto $(\mu; \psi_1, \psi_2; \frac{\varepsilon}{3})$. Si $\mu' \in (\mu; \psi_1, \psi_2; \frac{\varepsilon}{3})$, entonces $|\mu'(\psi_1) - \mu(\psi_1)| < \frac{\varepsilon}{3}$, y $|\mu'(\psi_2) - \mu(\psi_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

$$\begin{aligned} |\mu'(\psi_1) - \mu'(\psi_2)| &= |(\mu(\psi_2) - \mu'(\psi_2)) - (\mu(\psi_1) - \mu'(\psi_1)) + (\mu(\psi_1) - \mu(\psi_2))| \\ &\geq |\mu(\psi_1) - \mu(\psi_2)| - |\mu(\psi_2) - \mu'(\psi_2)| - |\mu(\psi_1) - \mu'(\psi_1)| \\ &> \|\psi_1 - \psi_2\| + \varepsilon - \frac{2\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Por lo que concluimos que si $\mu' \in (\mu; \psi_1, \psi_2; \frac{\varepsilon}{3})$, $\mu' \notin EX$; por lo tanto, $(\mu; \psi_1, \psi_2; \frac{\varepsilon}{3}) \subset VX - EX$. En los dos casos tenemos a μ como punto interior de $VX - EX$, luego obtenemos que EX es compacto. ☑

Para completar la definición del funtor consideremos $X, Y \in |\mathrm{Comp}|$ y $f \in \hom(X, Y)$. Definimos $Ef \in \hom(EX, EY)$ así:

$$(Ef)(\upsilon)(\varphi) = \upsilon(\varphi \circ f),$$

donde $\upsilon \in EX$ y $\varphi \in C(Y)$. Con esta definición se probará que E es un endofuntor en la categoría Comp. Si $\upsilon' \in (Ef)(\upsilon; \varphi_1 \circ f, \ldots, \varphi_n \circ f; \delta)$, entonces existe $\mu \in EX$ tal que $Ef(\mu) = \upsilon'$ y $\mu \in (\upsilon; \varphi_1 \circ f, \ldots, \varphi_n \circ f; \delta)$; por lo tanto,

$$\begin{aligned} |\upsilon(\varphi_i \circ f) - \mu(\varphi_i \circ f)| < \delta \quad &\Rightarrow \quad |(Ef)(\upsilon)(\varphi_i) - (Ef)(\mu)(\varphi_i)| < \delta, \\ |(Ef)(\upsilon)(\varphi_i) - \upsilon'(\varphi_i)| < \delta \quad &\Rightarrow \quad \upsilon' \in ((Ef)(\upsilon); \varphi_1, \ldots, \varphi_n; \delta). \end{aligned}$$

De la afirmación demostrada anteriormente,

$$(Ef)(\upsilon; \varphi_1 \circ f, \ldots, \varphi_n \circ f; \delta) \subset ((Ef)(\upsilon); \varphi_1, \ldots, \varphi_n; \delta)$$

y Ef es continua. Además, para cada $X \in |\mathrm{Comp}|$ se tiene

$$(E\, id_X)(\upsilon)(\varphi) = \upsilon(\varphi \circ id_X) = \upsilon(\varphi) = id_{EX}(\upsilon)(\varphi),$$

y dados $f \in \hom(X, Y)$, $g \in \hom(Y, Z)$ tendremos:

$$E(g \circ f)(\upsilon)(\varphi) \;=\; \upsilon(\varphi \circ g \circ f) \;=\; (Ef)(\upsilon)(\varphi \circ g) \;=\; (Eg)(Ef)(\upsilon)(\varphi),$$

con lo que se prueba que E es un endofuntor en Comp.

El siguiente par de ejemplos son basados en la definición de diferentes hiperespacios dados en *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances*, de A. Illanes y S. Nadler [4], donde algunos aspectos formales son presentados con detalle.

Ejemplo 2.8. Sea $X \in |\,\mathrm{Comp}\,|$, el hiperespacio de X se define como

$$CL(X) = \{A \subset X : A \neq \phi \wedge \overline{A} = A\},$$

dotado con la topología de Vietoris, donde los abiertos básicos son de la forma

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \{A \in CL(X) : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \wedge A \cap U_i \neq \phi\},$$

donde U_i es un subconjunto abierto de X, para cada $i = 1, \ldots, n$. Obsérvese además que

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \langle U_1 \cup \ldots \cup U_n \rangle \cap \langle X, U_1 \rangle \cap \ldots \cap \langle X, U_n \rangle,$$

es decir, los abiertos de la forma $\langle U \rangle, \langle X, V \rangle$ forman una subbase de Vietoris, con lo que usando el lema de Alexander, se obtiene que $CL(X)$ es compacto; además, si $A, B \in CL(X)$ con $A \neq B$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe $a \in A - B$. Como X es particularmente regular, existen U, V abiertos disjuntos en X donde $a \in U, B \subset V$, luego podemos considerar los abiertos de Vietoris disjuntos $\langle X, U \rangle, \langle V \rangle$, tales que $A \in \langle X, U \rangle$ y $B \in \langle V \rangle$, por lo que se concluye que $CL(X)$ es un espacio de Hausdorff y $CL(X) \in |\,\mathrm{Comp}\,|$.

Ahora al igual que el ejemplo anterior, consideremos un morfismo f de la categoría definido entre los espacios X, Y, y definamos $CLf \in \hom(CLX, CLY)$ así:

$$CLf(A) = f(A);$$

nótese que como X, Y son normales, se tienen condiciones suficientes para garantizar que f es cerrada y que CLf está bien definida. Además, se tiene que

$$(CLf)^{-1}\langle Y, U \rangle = \langle X, f^{-1}(U) \rangle; (CLf)^{-1}\langle V \rangle = \langle f^{-1}(V) \rangle,$$

lo que garantiza la continuidad de CLf.

CL es un endofuntor en Comp, pues $CL(f \circ g)(A) = (f \circ g)(A) = CLf(g(A)) = CLf(CLg(A)) = (CLf \circ CLg)(A)$ y $CL\, id_X(A) = id_X(A) = A = id_{CLX}(A)$ para cada $A \in CL(X)$, con lo que completamos la prueba.

El siguiente ejemplo tiene una clara generalización, pero se tomará de esta manera para realizar los cálculos lo más sencillamente posible.

Ejemplo 2.9. Sea $X \in |\,\mathrm{Comp}\,|$; definamos el hiperespacio F_2X como

$$F_2X = \{A \subset X : 1 \leq |A| \leq 2\}.$$

Aquí, si $A \in F_2X$ notaremos $A = \{a_1, a_2\}$, donde $a_1, a_2 \in X$ (puede suceder que $a_1 = a_2$). Claramente F_2X es un subespacio de CLX, y si $A \in CLX - F_2X$, es porque $|A| \geq 3$, luego existen a_1, a_2 y a_3 puntos distintos de A, y como X es un espacio de Hausdorff, existen U_1, U_2 y U_3 abiertos disjuntos en X, donde $a_i \in U_i$

para cada $i \in \{1,2,3\}$; con esto construimos $\langle X, U_1, U_2, U_3\rangle$, un abierto del espacio de Vietoris que contiene a A, donde claramente $\langle X, U_1, U_2, U_3\rangle \cap F_2X = \emptyset$, con lo que concluimos que F_2X es un subconjunto cerrado de CLX, y así $F_2X \in |\,\mathrm{Comp}\,|$.

Para completar la definición del funtor F_2, consideremos $X, Y \in |\,\mathrm{Comp}\,|$ y f una función continua de X en Y. Definamos F_2f, una aplicación de F_2X en F_2Y, por $F_2f(A) = f(A)$, donde $A \in F_2X$.

De la misma forma que en el anterior ejemplo, se tiene que F_2f es continua, $F_2(f \circ g) = F_2f \circ F_2g$ y $F_2\, id_X = id_{F_2x}$, para cada $X \in |\mathrm{Comp}|$; luego F_2 es un endofuntor en la categoría Comp.

En la siguiente sección mostraremos algunas propiedades topológicas propias de los funtores de esta categoría.

3. Funtores en Comp

Sea F un endofuntor en Comp; entonces se tienen las siguientes definiciones:

1. F es monomórfico (epimórfico) si preserva monomorfismos (epimorfismos).

   Si F es un funtor monomórfico, en adelante para cada $X \in |\mathrm{Comp}|$ y A subconjunto cerrado de X, identificaremos a FA y $Fi(FA)$ como subconjuntos de FX, donde i es la inmersión natural $i : A \to X$.

2. Se dice que el funtor monomórfico F preserva preimágenes, si para cada $f \in \hom(X, Y)$ y $A \subset Y$ cerrado se tiene
$$(Ff)^{-1}(FA) = F(f^{-1}(A)).$$

3. Se dice que el funtor monomórfico F preserva intersecciones si para cada familia $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de subconjuntos cerrados de X se tiene
$$\bigcap_{\alpha\in A} F(X_\alpha) = F(\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha).$$

4. El funtor F es llamado continuo si preserva límites de sistemas inversos, es decir: si $S = \{X_\alpha, p^\alpha_\beta, A\}$ es un sistema inverso, $FS = \{FX_\alpha, Fp^\alpha_\beta, A\}$ es también un sistema inverso; entonces
$$F \varprojlim S = \varprojlim FS.$$

   Nótese que de la Proposición 2.2 se tiene que $\varprojlim S \in |\,\mathrm{Comp}\,|$, y la expresión tiene sentido.

5. F preserva peso si para cada espacio infinito $X \in |\,\mathrm{Comp}\,|$ se tiene
$$w(X) = w(FX).$$

6. El funtor F preserva el conjunto unitario si la imagen de un conjunto unitario es un conjunto unitario; y se dice que preserva el conjunto vacío si la imagen funtorial del vacío es el conjunto vacío.

Definición 3.1. Un funtor F es llamado *normal* si cumple las anteriores afirmaciones, y F se dice *débilmente normal* si satisface las propiedades de funtor normal, con excepción de la propiedad de preservar preimágenes.

4. Ejemplos

Empezaremos con el funtor del ejemplo 2.9, ya que se muestra simplemente como un ejemplo que fácilmente se verifica como normal.

4.3. El funtor F_2

A continuación, a manera de proposiciones se demostrarán una a una las propiedades para clasificar F_2 como un funtor normal.

Proposición 4.1. *F_2 es un funtor monomórfico.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ un monomorfismo en Comp. Tenemos que probar que $F_2 f : F_2 X \to F_2 Y$ es tambien un monomorfismo. Sean $A, B \in F_2 X$; tenemos $A = \{a_1, a_2\}$ y $B = \{b_1, b_2\}$, y supongamos que $a_1 \notin \{b_1, b_2\}$; como f es un monomorfismo, tenemos que $f(a_1) \notin \{f(b_1), f(b_2)\}$, luego $f(a_1) \notin F_2 B$ y $F_2 A \neq F_2 B$, con lo que concluimos que F_2 es monomórfico. ☑

Proposición 4.2. *El funtor F_2 es epimórfico.*

Demostración. Consideremos $f : X \to Y$ un epimorfismo, y demostremos que $F_2 f : F_2 X \to F_2 Y$ es también un epimorfismo en Comp. Sea $B = \{b_1, b_2\}$ un elemento de $F_2 Y$. Como f es epimorfismo, existen $\{a_1, a_2\}$ tales que $f(a_1) = b_1$ y $f(a_2) = b_2$, luego $F_2\{a_1, a_2\} = B$, con lo que concluimos que F_2 es epimórfico. ☑

Para cada $X \in |\mathrm{Comp}|$, tenemos el espacio producto X^2; definamos la relación

$$(a, b) \sim (c, d) \Longleftrightarrow (a, b) = (c, d), \vee, (a, b) = (d, c).$$

Claramente $\sim$ es una relación de equivalencia. Definamos ahora

$$g : X^2/_\sim \to F_2 X, \qquad \text{por} \qquad g([(a, b)]) = \{a, b\}.$$

Es inmediato verificar que g es una biyección; además, nótese que

$$g^{-1}(\langle U\rangle) = \{[(a, b)] : \{a, b\} \in \langle U\rangle\} = \{[(a, b)] : \{a, b\} \subset U\},$$

que es claramente un abierto del espacio cociente $X^2/_\sim$. De la misma forma tenemos que $g^{-1}(\langle X, V\rangle)$ es también un abierto de $X^2/_\sim$, y así tenemos la continuidad de g. Además, si tomamos O un abierto básico de $X^2/_\sim$, por definición de la topología se tiene que $\varphi^{-1}(O) = U \times V$, donde φ es la aplicación inducida de X^2 en $X^2/_{\sim}$ y U, V son abiertos básicos de X, y tenemos por consiguiente

$$g(O) = \{\{a,b\} : [(a,b)] \in O\} = \{\{a,b\} : (a,b) \in U \times V\} = \langle U, V\rangle\,.$$

Luego g es un homeomorfismo y los espacios F_2X y $X^2/_{\sim}$ son homeomorfos.

La siguiente proposición es una consecuencia inmediata del anterior parágrafo.

Proposición 4.3. *El funtor F_2 preserva peso de compactos infinitos.*

La continuidad de un funtor, se debe entender como si dado un sistema inverso $S = \{X_\alpha, p^\alpha_\beta, A\}$, $FS = \{FX_\alpha, Fp^\alpha_\beta, A\}$ es también un sistema inverso; entonces existe un homeomorfismo φ entre $F \varprojlim S$ y $\varprojlim FS$ tal que $p_\alpha{}' \circ \varphi = Fp_\alpha$, donde p_α es la proyección restringida a $\varprojlim S$ y $p_\alpha{}'$ a $\varprojlim FS$.

Proposición 4.4. *F_2 es un funtor continuo.*

Demostración. Sea $S = \{X_\alpha; f^\beta_\alpha; A\}$ un sistema inverso, y denotemos $X = \varprojlim\{X_\alpha; f^\beta_\alpha; A\}$ y por Y el límite del sistema inverso $F_2X = \varprojlim\{F_2X_\alpha; F_2f^\beta_\alpha; A\}$. Ahora definamos $\varphi : F_2X \to Y$ por $\varphi = \{F_2p_\alpha\}_{\alpha\in A}$, donde p_α es la aplicación proyección de X a X_α. Tenemos que probar que φ es un homeomorfismo. Sean A, B dos diferentes puntos de F_2X; entonces $A = \{a_1, a_2\}$ y $B = \{b_1, b_2\}$. Supongamos que $a_1 \notin B$; luego existen $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ tales que $p_{\alpha_1}(a_1) \neq p_{\alpha_1}(b_1)$ y $p_{\alpha_2}(a_1) \neq p_{\alpha_2}(b_2)$. Ahora, como A es un conjunto dirigido, existe $\alpha \in A$, donde $\alpha_1 \le \alpha$ y $\alpha_2 \le \alpha$; además, $p_\alpha(a_1) \neq p_\alpha(b_1)$ y $p_\alpha(a_1) \neq p_\alpha(b_2)$, luego $p_\alpha(a_1) \notin F_2p_\alpha(B)$. Entonces $F_2p_\alpha(A) \neq F_2p_\alpha(B)$ y φ es inyectiva.

Consideremos ahora $C \in Y$; si denotamos por $p_\alpha{}'$ la proyección de Y en F_2X_α, basta tomar $A = \cap\{\{p_\alpha^{-1}(c_{1\alpha}), p_\alpha^{-1}(c_{2\alpha})\} : p_\alpha{}'(C) = \{c_{1\alpha}, c_{2\alpha}\}, \forall \alpha \in A\}$. A es un elemento del espacio F_2X, y claramente $\varphi(A) = C$, luego φ es sobreyectiva. La bicontinuidad es consecuencia de la definición, con lo que concluimos que F_2 es continuo. ☑

Proposición 4.5. *El funtor F_2 preserva intersecciones.*

Demostración. Como en la proposición anterior se probó que F_2 es continuo, es suficiente probar que $F_2(A_1 \cap A_2) = F_2A_1 \cap F_2A_2$.

Si $\{a_1, a_2\} \in F_2(A_1 \cap A_2)$, entonces $\{a_1, a_2\} \subset A_1 \cap A_2$, luego $\{a_1, a_2\} \in F_2A_1 \cap F_2A_2$. De manera análoga se prueba que $F_2A_1 \cap F_2A_2 \subset F_2(A_1 \cap A_2)$, luego el funtor F_2 preserva intersecciones. ☑

Proposición 4.6. *F_2 preserva preimágenes.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función continua y B un subconjunto cerrado de Y. Debemos verificar que $(F_2f)^{-1}(F_2B) = F_2(f^{-1}(B))$.

Sea $A \in (F_2f)^{-1}(F_2B)$; entonces $F_2f(A) \in F_2B$, luego $f(A) = \{b_1, b_2\}$ es subconjunto de B, pero $A \in F_2X$, luego $A = \{a_1, a_2\}$, con lo que tenemos que $\{a_1, a_2\} \subset f^{-1}(B)$, así que $A \in F_2(f^{-1}(B))$.

Por otra parte, si $A \in F_2(f^{-1}(B))$, entonces $A = \{a_1, a_2\}$ es subconjunto de $f^{-1}(B)$, luego $\{f(a_1), f(a_2)\} \subset B$. Por lo tanto, $F_2 f(A) \in F_2 B$ y obtenemos $A \in (F_2 f)^{-1}(F_2 B)$. ☑

El siguiente teorema es consecuencia de las proposiciones demostradas anteriormente.

Teorema 4.7. *El funtor F_2 es normal.*

4.4. El funtor de funcionales inexpandibles E

A continuación entraremos a verificar cuáles de las condiciones para ser funtor normal cumple el funtor de funcionales inexpandibles definido anteriormente. Antes de empezar con el estudio de las propiedades de este funtor enunciemos el siguiente lema, que puede considerarse como análogo al teorema de extensión de *Hanh-Banach*. La demostración del siguiente lema, así como de las afirmaciones no demostradas en este ejemplo, se pueden encontrar en [2].

Lema 4.8. *Sea $L \subset C(X)$ tal que $\{c_X : c \in \mathbb{R}\} \subset L$. Si $v : L \to \mathbb{R}$ es inexpandible y para cada $c \in \mathbb{R}, v(c_X) = c$, entonces existe $v' : C(X) \to \mathbb{R}$ inexpandible tal que $v'|_L = v$.*

Proposición 4.9. *E es funtor monomórfico.*

Demostración. Sea $j : X \to Y$ un monomorfismo. Hay que probar que $Ej : EX \to EY$ es también monomorfismo. Sean μ_1, μ_2 dos diferentes funcionales en EX; entonces existe $\varphi \in C(X)$ tal que $\mu_1(\varphi) \neq \mu_2(\varphi)$. Como j es monomorfismo y jX es subconjunto cerrado de Y, un espacio normal, existe $\psi \in C(Y)$ tal que $\psi \circ j = \varphi$, por lo que se tiene que $\mu_1(\psi \circ j) \neq \mu_2(\psi \circ j)$, luego $(Ej)(\mu_1)(\psi) \neq (Ej)(\mu_2)(\psi)$. Con lo que concluimos que E es monomórfico. ☑

Proposición 4.10. *E es funtor epimórfico.*

Demostración. Sean $f : X \to Y$ un epimorfismo y $\upsilon \in EY$. Definimos

$$C = \{\psi \circ f : \psi \in C(Y)\}.$$

Se ve claramente que $C \subset C(X)$. Además, $\{c_X : c \in \mathbb{R}\} \subset C$, porque para cada $c \in \mathbb{R}$ se tiene

$$c_X = c_Y \circ f, \quad \text{y } c_Y \in C(Y).$$

Definamos también un funcional $\upsilon' : C \to \mathbb{R}$ de la forma

$$\upsilon'(\psi \circ f) \equiv \upsilon(\psi);$$

υ' está bien definida, porque f es un epimorfismo. Por definición tenemos que $\upsilon'(c_X) = c$ para cada $c \in \mathbb{R}$, y además υ' es inexpandible; luego por el Lema 4.8 existe una prolongación $\mu \in EX$, y fácilmente se verifica que $(Ef)(\mu) = \upsilon$. Por lo tanto, el funtor E es epimórfico. ☑

Para cada $x \in X$ se tiene el funcional δ_x definido como $\delta_x(f) = f(x)$. Se puede probar que $\delta_x \in EX$ para cada $x \in X$. La aplicación $\delta : X \to EX$ definida como $\delta(x) = \delta_x$ está bien definida y es continua, pues $\pi_\varphi \circ \delta = \varphi$, donde $\varphi \in C(X)$; además es una inmersión, pues si $x_1 \neq x_2$, entonces existe un $\varphi \in C(X)$ tal que $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$, con lo que se concluye que $\delta_{x_1}(\varphi) \neq \delta_{x_2}(\varphi)$.

Sea (X, d) un espacio métrico; definimos $E_p(X)$ como el subespacio de $\mathbb{R}^{C(X)}$ de los funcionales inexpandibles definidas sobre X. Es inmediato verificar que

$$E_p(X) \subset C_p(X).$$

Lema 4.11. *Sea (X, d) un espacio métrico infinito; entonces*

$$w(E_p(X)) \leq d(E_p(X)) \times d(X).$$

Demostración. Sean $F \subset E_p(X)$, F subconjunto denso, tal que $|F| \leq d(E_p(X))$, y seleccionamos $A \subset X$, también denso, tal que $|A| \leq d(X)$. Consideremos

$$\beta = \{(\upsilon; y_1, \ldots, y_n; q) : \upsilon \in F, y_i \in A, q \in \mathbb{Q}^+\},$$

y probemos que β es una base de $E_p(X)$. Sean $\varphi \in E_p(X)$ y $\langle \varphi; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon \rangle$ una vecindad de φ; entonces tenemos que encontrar un abierto $B \in \beta$ tal que $\varphi \in B$ y además $B \subset \langle \varphi; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon \rangle$. Sean $y_1, \ldots, y_n \in A$ tales que $d(x_i, y_i) < \dfrac{\varepsilon}{7}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\psi \in F$ tal que $\psi \in (\varphi; x_1, \ldots, x_n; \frac{\varepsilon}{7})$ y $q \in \mathbb{Q}$ tal que $\dfrac{3\varepsilon}{7} \leq q \leq \dfrac{4\varepsilon}{7}$.

1. Probemos que $\varphi \in \langle \psi; y_1, \ldots, y_n; q \rangle$. En efecto,

$$\begin{aligned}|\varphi(y_i) - \psi(y_i)| &\leq |\varphi(y_i) - \varphi(x_i)| + |\varphi(x_i) - \psi(x_i)| + |\psi(x_i) - \psi(y_i)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{7} + |\varphi(x_i) - \psi(x_i)| + \frac{\varepsilon}{7} \ \leq \ \frac{3\varepsilon}{7} \leq q,\end{aligned}$$

   por lo que tenemos que $\varphi \in \langle \psi; y_1, \ldots, y_n; q \rangle$.

2. Sea $\phi \in \langle \psi; y_1, \ldots, y_n; q \rangle$. Tenemos que

$$\begin{aligned} &|\phi(x_i) - \varphi(x_i)| \ \leq \ |\phi(x_i) - \psi(x_i)| + |\psi(x_i) - \varphi(x_i)| \\ \leq \ &|\phi(x_i) - \phi(y_i)| + |\phi(y_i) - \psi(y_i)| + |\psi(y_i) - \psi(x_i)| + |\psi(x_i) - \varphi(x_i)| \\ \leq \ &d(x_i, y_i) + |\phi(y_i) - \psi(y_i)| + d(x_i, y_i) + |\psi(x_i) - \varphi(x_i)| \ \leq \ \frac{3\varepsilon}{7} + q \ \leq \ \varepsilon, \end{aligned}$$

   luego $\phi \in \langle \varphi; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon \rangle$.

Con lo anterior se prueba que β es una base de $E_p(X)$, y $|\beta| = \varpi$; entonces por definición de peso tenemos $w(E_p(X)) \leq \varpi$, pero también tenemos que $\varpi \leq |A| \times |F| \leq d(X) \times d(E_p(X))$, con lo que se concluye que $w(E_p(X)) \leq d(E_p(X)) \times d(X)$. ☑

Por definición tenemos $E(X) \subset E_p(C(X)) \subset C_p(C(X))$, y utilizando el lema anterior resulta que

$$w(E(X)) \leq d(E(X)) \times d(C(X)).$$

Proposición 4.12. *El funtor E preserva el peso de un compacto de Hausdorff infinito.*

Demostración. De la definición de δ enunciada anteriormente tenemos que $w(X) \leq w(EX)$. Por otra parte, de resultados presentados en [7] y [6] se tiene que si $Y \subset C_p(Z)$, entonces $d(Y) \leq w(Z)$; como $E(X) \subset C_p(C(X))$, obtenemos que $d(E(X)) \leq w(C(X))$, y además $d(X) \leq w(X)$ y $w(C(X)) \leq w(X)$.

Utilizando el resultado del lema anterior tenemos

$$\begin{aligned} w(E(X)) &\leq d(E(X)) \times d(C(X)) \leq \\ &\leq w(C(X)) \times w(C(X)) \leq w(X), \end{aligned}$$

por lo que concluimos que $w(E(X)) = w(X)$. ☑

Proposición 4.13. *El funtor E es continuo.*

Demostración. Sea $X = \varprojlim S$, donde $S = \{X_\alpha, p_\alpha^\beta, A\}$ es un sistema inverso y cada X_α es compacto. Hagamos $Y = \varprojlim E(S)$, donde

$$E(S) = \{E(X_\alpha), E(p_\alpha^\beta), A\},$$

y probemos que $Y = E(X)$. Sea $\pi : E(X) \to Y$ definida de la siguiente forma:

Considerando las proyecciones naturales $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ y $\pi_\alpha{}' : Y \to EX_\alpha$, entonces

$$\pi_\alpha{}' \circ \pi = E\pi_\alpha.$$

Probemos que π es un homeomorfismo.

Tenemos las proyecciones naturales $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$. Sean $\mu_1, \mu_2 \in E(X)$ dos funcionales diferentes; entonces existe $\varphi \in C(X)$ tal que $\mu_1(\varphi) \neq \mu_2(\varphi)$. Sea $a = |\mu_1(\varphi) - \mu_2(\varphi)|$. Por el teorema de Stone-Weirestrass, el conjunto $\{\psi \circ \pi_\alpha : \psi \in C(X_\alpha)\}$ es denso en $C(X)$; por esto existe un $\alpha \in A$ y una función $\psi \in C(X_\alpha)$ tales que $\|\varphi - \psi \circ \pi_\alpha\| < \frac{a}{3}$; como μ_1, μ_2 son inexpandibles, se tiene $\|\mu_i(\varphi) - \mu_i(\psi \circ \pi_\alpha)\| < \frac{a}{3}$, para $i \in \{1, 2\}$; entonces:

$$\begin{aligned} a &= |\mu_1(\varphi) - \mu_2(\varphi)| \\ &= |\mu_1(\varphi) - \mu_1(\psi \circ \pi_\alpha) + \mu_1(\psi \circ \pi_\alpha) - \mu_2(\psi \circ \pi_\alpha) + \mu_2(\psi \circ \pi_\alpha) - \mu_2(\varphi)| \\ &\leq |\mu_1(\varphi) - \mu_1(\psi \circ \pi_\alpha)| + |\mu_2(\psi \circ \pi_\alpha) - \mu_2(\varphi)| + |\mu_1(\psi \circ \pi_\alpha) - \mu_2(\psi \circ \pi_\alpha)| \\ &\leq |\mu_1(\psi \circ \pi_\alpha) - \mu_2(\psi \circ \pi_\alpha)| + \frac{2a}{3}; \end{aligned}$$

$$\frac{a}{3} \leq |\mu_1(\psi \circ \pi_\alpha) - \mu_2(\psi \circ \pi_\alpha)| \Longrightarrow (E\pi_\alpha)(\mu_1) \neq (E\pi_\alpha)(\mu_2).$$

Como π_α es un epimorfismo, entonces $E(\pi_\alpha)$ es también epimorfismo para cada $\alpha \in A$. Por lo tanto concluimos que $\pi : E(X) \to Y$ es sobreyectivo. ☑

Decimos que $\mu \in E(X)$ es soportado por el cerrado A, si $\mu \in E(A)$.

Lema 4.14. *Sean $\mu \in E(X)$, $A \subset X$, A es cerrado en X. Entonces μ es soportado por A si y solamente si para cualesquiera $\varphi_1, \varphi_2 \in C(X)$, con $\varphi_1|_A = \varphi_2|_A$, se tiene que $\mu(\varphi_1) = \mu(\varphi_2)$.*

Proposición 4.15. *El funtor E preserva intersecciones.*

Demostración. Como E es continuo, es suficiente probar que $E(A_1 \cap A_2) = E(A_1) \cap E(A_2)$. Evidentemente se tiene que $E(A_1 \cap A_2) \subset E(A_1) \cap E(A_2)$. Sean $\mu \in E(A_1) \cap E(A_2)$ y $\psi_1, \psi_2 \in C(X)$; debemos concluir que $\psi_1|_{A_1 \cap A_2} = \psi_2|_{A_1 \cap A_2}$, y en virtud del lema anterior obtener el resultado deseado. Consideremos $\varphi \in C(X)$ tal que $\varphi|_{A_1} = \psi_1$ y $\varphi|_{A_2} = \psi_2$; como $\mu \in E(A_1)$, entonces $\mu(\varphi) = \mu(\psi_1)$, y por la misma razón $\mu(\varphi) = \mu(\psi_2)$. ☑

El siguiente teorema es resultado inmediato de los resultados presentados anteriormente.

Teorema 4.16. *El funtor E es débilmente normal.*

A continuación presentamos un ejemplo en el cual se muestra que este funtor no preserva preimágenes, y por lo tanto no es un funtor normal.

Ejemplo 4.17. Considérense los compactos $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, donde x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 son todos distintos. Definimos

$$f : X \to Y,$$

$f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = f(x_3) = y_2$. Considerando el funcional δ_{y_2} definido anteriormente, claramente se tiene $\delta_{y_2} \in E(\{y_2\})$; definimos también

$$\mu(\varphi) = \text{máx}\{\text{mín}\{\varphi(x_1), \varphi(x_2)\}, \text{mín}\{\varphi(x_2), \varphi(x_3)\}, \text{mín}\{\varphi(x_1), \varphi(x_3)\}\},$$

que probaremos que está en $E(X)$.

Sea $c_X \in C(X)$; por definición de c_X se tiene que $\mu(c_X) = c$. Verifiquemos ahora que es inexpandible. Tomemos $\varphi_1, \varphi_2 \in C(X)$. Supongamos primero que $\varphi_1(x_1) \leq \varphi_1(x_2) \leq \varphi_1(x_3)$ y $\varphi_2(x_1) \leq \varphi_2(x_2) \leq \varphi_2(x_3)$; entonces

$$|\mu(\varphi_1) - \mu(\varphi_2)| = |\varphi_1(x_2) - \varphi_2(x_2)| \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|;$$

de la misma forma, en los demás casos se obtiene que

$$|\mu(\varphi_1) - \mu(\varphi_2)| \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|,$$

por lo que concluimos que $\mu \in E(X)$. Tomando $A = \{y_2\}$, un subconjunto cerrado de Y, sea $\varphi \in C(X)$; entonces

$$(Ef)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ f) = \varphi(y_2) = \delta_{y_2}(\varphi),$$

con lo que tenemos que $\mu \in (Ef)^{-1}(E(A))$; pero claramente se tiene que $\mu \notin E(f^{-1}(A))$, por lo que se concluye que $E(f^{-1}(A)) \neq (Ef)^{-1}(E(A))$.

Para complementar el estudio de los funtores normales y revisar más ejemplos, se aconseja la última referencia, donde los funtores normales juegan un papel indispensable en el desarrollo de este texto.

Referencias

[1] Adamek J., Herrlich H. and Strecker G. *Abstract and Concrete Categories.* Wiley interscience publication, 1990.

[2] Camargo J. E. *Sobre la mónada de funcionales inexpandibles.* Tesis maestría, Universidad Nacional de Colombia, 2002.

[3] Engelking R. *Outline of General Topology.* North-Holland Publishing Company, 1968.

[4] Illanes A. and Nadler S. *Hyperespacios, Fundamentals and Recent Advances.* Marcel Dekker, Inc. New York, 1999.

[5] Mc Lane S. *Categories for the Working Mathematician.* Springer Verlag, New York, 1971.

[6] Schepin E. V. "Functors on Uncountable Powers of Compacta". *Uspekhi Math. Nauk.*, **36** (1981), 3–62.

[7] Telejko A. and Zarichnyi M. *Categorical Topology of Compact Hausdorff Spaces.* Mathematical studies, Monograph Series, Volume 5, 1999.

Javier E. Camargo García
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
A.A. 678, Bucaramanga, Colombia.
e-mail: `jecamar@uis.edu.co`.