Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 21, Nos. 1 y 2, 2003, pág. 1–14

Aplicación de productos filtrados y ultraproductos

Luis F. Cáceres*   Joel Meléndez*

Resumen. En este artículo se estudia la cerradura de las colecciones de submódulos y submódulos primos de un módulo unitario, de las colecciones de ideales primarios e ideales P-primarios de un anillo conmutativo y de las colecciones de subretículos, ideales e ideales primos de un retículo con respecto a la operación producto filtrado de conjuntos. También se presenta una caracterización de los módulos noetherianos, de los anillos cociente y de los retículos noetherianos usando la operación producto filtrado de conjuntos.

1. Introducción

A lo largo de este artículo los anillos son conmutativos y con identidad, y los módulos unitarios.

Se ha probado en [2], [3] y [4] que la operación producto filtrado de conjuntos es una herramienta nueva y útil para establecer propiedades en anillos conmutativos con identidad; en particular, en [3] se demuestran resultados propuestos por Kaplansky en [8].

El objetivo de este trabajo es la aplicación de la operación producto filtrado de conjuntos al estudio de ciertas estructuras algebraicas. Además, se prueban propiedades y se dan ejemplos relacionados con la cerradura de las colecciones de submódulos y submódulos primos de un módulo, de las colecciones de ideales primarios e ideales P-primarios de un anillo, con respecto a la operación producto filtrado de conjuntos. También se caracterizan, usando la operación producto filtrado de conjuntos, los módulos noetherianos (en particular, anillos noetherianos), a los anillos cociente y a los retículos noetherianos.

Nuestra referencia básica para anillos conmutativos y módulos es [7], y para retículos [1] y [6]. La mayoría de las referencias para nuestra notación son [1], [2], [6] y [7]. Los términos y notación que no se definen pueden ser hallados en estas fuentes.

Palabras y frases claves: ideales primarios y P-primarios, módulos noetherianos.
MSC2000: Primaria: 13E05, 16P40. Secundaria: 16D80, 16P70.

* Departamento de Matemáticas, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Mayagüez, Puerto Rico, *e-mail:* lcaceres@math.uprm.edu.

2. La operación producto filtrado de conjuntos

Definición 2.1. Sean I un conjunto no vacío y $S(I)$ el conjunto potencia de I. Una colección $D \subseteq S(I)$ es llamada un *filtro* sobre I si

i) $A \in D$ y $A \subseteq B$ implican que $B \in D$, para todo $A, B \in S(I)$.

ii) $A \in D$ y $B \in D$ implican que $A \cap B \in D$, para todo $A, B \in S(I)$.

iii) $I \in D$.

Algunos ejemplos de filtros sobre un conjunto I son

a) El *filtro trivial*: $D = \{I\}$.

b) El *filtro impropio*: $D = S(I)$.

c) Para cada $Y \subseteq I$, el *filtro principal* generado por Y: $D = \{X \subseteq I : Y \subseteq X\}$; este filtro se denota como $\langle Y \rangle$.

d) Dado un conjunto infinito I, se define el *filtro de Fréchet* asociado a I, como $D = \{X \in S(I) : I - X \quad \text{es finito}\}$.

Un filtro D sobre I es filtro propio si $\emptyset \notin D$. Puesto que la mayoría de los resultados obtenidos con filtros impropios son triviales, de ahora en adelante se asume que todos los filtros son propios.

No es difícil demostrar que D es filtro principal sobre I si y sólo si $\bigcap\{X : X \in D\} \in D$. Por tanto, todo filtro propio sobre un conjunto finito I es filtro principal.

Definición 2.2. Un filtro propio D sobre I es un *ultrafiltro* si para cada $A \in S(I)$, $A \in D$ ó $I - A \in D$. Un ultrafiltro D es llamado *ultrafiltro no principal* sobre I si $\{i\} \notin D$, para todo $i \in I$.

Un ultrafiltro D que es filtro principal sobre I es llamado *ultrafiltro principal.* No es difícil demostrar que D es ultrafiltro principal sobre I si y sólo si $D = \{X \subseteq I : i \in X\}$, para algún $i \in I$. En este caso, se dice que D es *generado* por un elemento de I. Por tanto, todo ultrafiltro sobre un conjunto finito I es generado por un elemento de I.

Por otro lado, es fácil demostrar que si D es un ultrafiltro y $A \cup B \in D$, entonces $A \in D$ ó $B \in D$.

De igual manera, si D es un ultrafiltro no principal y $A \in D$, entonces A es infinito.

Ahora se presentan las importantes definiciones de las operaciones producto filtrado y ultraproducto de conjuntos, definiciones que fueron introducidas en [9].

Definición 2.3. Sea I un conjunto no vacío, D un filtro sobre I y para cada $i \in I$, conjuntos A_i. Definimos $\prod\limits_{i \in I} A_i/D = \{a : \{i \in I : a \in A_i\} \in D\}$, que es llamado el *producto filtrado* de los conjuntos A_i con respecto a D. Cuando D es un ultrafiltro, $\prod\limits_{i \in I} A_i/D$ es llamado el *ultraproducto* de los conjuntos A_i con respecto a D.

El siguiente teorema demostrado en [2, Proposición 1.1.4] presenta una manera alterna de hallar productos filtrados.

Teorema 2.4. *Sea D un filtro sobre un conjunto I y A_i un conjunto, para cada $i \in I$. Entonces,*

$$\prod_{i\in I} A_i/D = \bigcup_{X\in D} \bigcap_{i\in X} A_i.$$

Del Teorema 2.4 se obtiene los siguientes corolarios.

Corolario 2.5. *Sea $D = \langle Y \rangle$ para algún $Y \subseteq I$, y A_i un conjunto para cada $i \in I$. Entonces,*

$$\prod_{i\in I} A_i/D = \bigcap_{i\in Y} A_i.$$

Corolario 2.6. *Sea D un ultrafiltro principal sobre I, y A_i un conjunto para cada $i \in I$. Entonces,*

$$\prod_{i\in I} A_i/D = A_j$$

para algún $j \in I$.

El Corolario 2.6 muestra que no se obtiene ningún conjunto nuevo con la operación ultraproducto de conjuntos cuando el ultrafiltro es principal sobre I o con cualquier ultrafiltro sobre un conjunto finito I.

No es difícil demostrar que si D es un filtro sobre I y A_i es un conjunto, para cada $i \in I$, entonces

$$\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \prod_{i\in I} A_i/D \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i. \tag{1}$$

Una condición suficiente para que la igualdad $\prod_{i\in I} A_i/D = \bigcup_{i\in I} A_i$ se cumpla en (1) es que D sea un ultrafiltro no principal sobre un conjunto contablemente infinito I, y los conjuntos A_i, para cada $i \in I$, con $A_i \neq A_j$ si $i \neq j$, formen una cadena ascendente.

En el siguiente ejemplo se considera un conjunto finito I, conjuntos A_i para cada $i \in I$, que forman una cadena ascendente, y un ultrafiltro principal sobre I, para mostrar que la igualdad $\prod_{i\in I} A_i/D = \bigcup_{i\in I} A_i$ no es cierta bajo estas condiciones.

Ejemplo 2.7. Sean $I = \{1, 2, 4, 8\}$, $D = \langle\{4\}\rangle$ y el ideal $A_i = \langle 2i \rangle$ del anillo de los enteros $\mathbb{Z}$, para cada $i \in I$. Nótese que,

$$\langle 16 \rangle \subsetneq \langle 8 \rangle \subsetneq \langle 4 \rangle \subsetneq \langle 2 \rangle.$$

Por consiguiente, $\prod_{i\in I} A_i/D = \langle 8 \rangle \neq \langle 2 \rangle = \bigcup_{i\in I} A_i$.

Similarmente, una condición suficiente para que la igualdad $\prod_{i\in I} A_i/D = \bigcap_{i\in I} A_i$ se cumpla en (1) es que D sea un ultrafiltro no principal sobre un conjunto contablemente infinito I, y que los conjuntos A_i, para cada $i \in I$, con $A_i \neq A_j$ si $i \neq j$, formen una cadena descendente.

En [5] se presenta una caracterización para ultrafiltros usando productos filtrados.

3. Producto filtrado de submódulos, de submódulos primos y una caracterización de los módulos noetherianos

El siguiente ejemplo ilustra una situación general que se enuncia en el Teorema 3.2.

Ejemplo 3.1. Considere $\mathbb{Z}[t]$ como $\mathbb{Z}$-módulo y sean D un ultrafiltro no principal sobre el conjunto $I = \{0, 1, 2, \ldots\}$ y el submódulo $A_i = \langle 1, t, t^2, \ldots, t^i\rangle$ de $\mathbb{Z}[t]$, para cada $i \in I$. Observe que

$$\langle 1\rangle \subsetneq \langle 1, t\rangle \subsetneq \langle 1, t, t^2\rangle \subsetneq \cdots . \tag{2}$$

Puesto que I es contablemente infinito, D ultrafiltro no principal sobre I y (2) una cadena ascendente de submódulos, se tiene que

$$\prod_{i\in I}\langle 1, t, t^2, \ldots, t^i\rangle/D = \langle 1, t, t^2, t^3, \ldots\rangle.$$

No es difícil demostrar que, $\prod_{i\in I}\langle 1, t, t^2, \ldots, t^i\rangle/D$ es un submódulo de $\mathbb{Z}[t]$.

Teorema 3.2. *Sea A un módulo sobre un anillo R, D un filtro sobre I y B_i un submódulo de A, para cada $i \in I$. Entonces, $\prod_{i\in I} B_i/D$ es un submódulo de A.*

Demostración. De acuerdo a [5, Teorema 2.1], $\prod_{i\in I} B_i/D$ es un subgrupo aditivo de A. Resta demostrar que $rb \in \prod_{i\in I} B_i/D$, para todo $r \in R$ y todo $b \in \prod_{i\in I} B_i/D$. En efecto, sea $b \in \prod_{i\in I} B_i/D$ arbitrario; entonces $\{i \in I : b \in B_i\} \in D$. Nótese que, para cualquier $r \in R$, se cumple que $\{i \in I : b \in B_i\} \subseteq \{i \in I : rb \in B_i\}$. Luego, $\{i \in I : rb \in B_i\} \in D$. Por tanto, $rb \in \prod_{i\in I} B_i/D$. ☑

Sean M un módulo sobre un anillo R y P un submódulo de M. P es llamado *submódulo primo* de M si, para todo $m \in M$ y todo $r \in R$,

$$rm \in P \quad \text{implica} \quad m \in P \quad \text{ó} \quad rM \subseteq P.$$

Teorema 3.3. *Sean R un anillo y M un R-módulo, D un ultrafiltro sobre I y A_i un submódulo primo de M, para cada $i \in I$. Entonces $\prod_{i\in I} A_i/D$ es un submódulo primo de M.*

Demostración. Se desea demostrar que para todo $m \in M$ y todo $r \in R$, se cumple

$$rm \in \prod_{i\in I} A_i/D \quad \text{implica} \quad m \in \prod_{i\in I} A_i/D \ \text{ o } \ rM \subseteq \prod_{i\in I} A_i/D.$$

Supóngase que para todo $m \in M$ y $r \in R$, $rm \in \prod_{i\in I} A_i/D$ y $m \notin \prod_{i\in I} A_i/D$. Ahora bien, $rm \in \prod_{i\in I} A_i/D$ si y sólo si $X = \{i \in I : rm \in A_i\} \in D$. Como para cada

$i \in X$, A_i es submódulo primo de M, se tiene que $m \in A_i$ ó $rM \subseteq A_i$, para cada $i \in X$. De este modo, $Z = \{i \in I : m \in A_i \text{ ó } rM \subseteq A_i\} \in D$. Nótese que $Z \subseteq \{i \in I : m \in A_i\} \cup \{i \in I : rM \subseteq A_i\} \in D$. Luego, por ser D ultrafiltro sobre I, $B = \{i \in I : m \in A_i\} \in D$ ó $C = \{i \in I : rM \subseteq A_i\} \in D$. Por otro lado, $m \notin \prod_{i \in I} A_i/D$ si y sólo si $\{i \in I : m \in A_i\} \notin D$.

Como D es ultrafiltro sobre I, $Y = \{i \in I : m \notin A_i\} \in D$. Si $B \in D$ entonces $\emptyset = B \cap Y \in D$; pero esto es falso, pues D es filtro propio. Por consiguiente, $C \in D$. Sea $s \in rM$ arbitrario; entonces $C \subseteq \{i \in I : s \in A_i\}$. De este modo, por definición de filtro, $\{i \in I : s \in A_i\} \in D$. Así, $s \in \prod_{i \in I} A_i/D$ para cualquier $s \in rM$. Luego $rM \subseteq \prod_{i \in I} A_i/D$. Por tanto, $\prod_{i \in I} A_i/D$ es submódulo primo de M. ☑

A continuación se dan algunos resultados que acentuarán nuestra comprensión de la operación producto filtrado de conjuntos en un módulo noetheriano.

Teorema 3.4. *Sea A un módulo y B_i un submódulo de A, para cada $i \in I$. Si D es un filtro sobre I y $\prod_{i \in I} B_i/D$ es finitamente generado, entonces existe $X \in D$ tal que $\prod_{i \in X} B_i/D = \bigcap_{i \in I} B_i$.*

Demostración. Sea A un módulo y B_i un submódulo de A, para cada $i \in I$. Suponga que D es un filtro sobre I y $\prod_{i \in I} B_i/D$ es finitamente generado. Entonces, $\prod_{i \in I} B_i/D$ es un submódulo finitamente generado. Supongamos que $\prod_{i \in I} B_i/D = \langle b_1, b_2, \cdots, b_n \rangle$, para algunos $b_1, \ldots, b_n \in A$. Para $1 \leqslant j \leqslant n$, $b_j \in \prod_{i \in I} B_i/D$ si y sólo si $\{i \in I : b_j \in B_i\} \in D$. Por tanto, $b_1, \cdots, b_n \in \prod_{i \in I} B_i/D$ implica que $\bigcap_{j=1}^{n} \{i \in I : b_j \in B_i\} \in D$; pero

$$\bigcap_{j=1}^{n} \{i \in I : b_j \in B_i\} = \{i \in I : b_1, \cdots, b_n \in B_i\} \in D.$$

Sea $X = \{i \in I : b_1, \cdots, b_n \in B_i\}$. Si $i \in X$ entonces $\prod_{i \in I} B_i/D \subseteq B_i$. Por tanto, $\prod_{i \in I} B_i/D \subseteq \bigcap_{i \in X} B_i$. Por el Teorema 2.4 se obtiene $\bigcap_{i \in X} B_i \subseteq \prod_{i \in I} B_i/D$. ☑

Puesto que todos los submódulos de un módulo noetheriano son finitamente generados, se obtiene el siguiente corolario del Teorema 3.4.

Corolario 3.5. *Sea A un módulo noetheriano y B_i un submódulo de A, para cada $i \in I$. Si D es un filtro sobre I, entonces existe $X \in D$ tal que $\prod_{i \in I} B_i/D = \bigcap_{i \in X} B_i$.*

El siguiente resultado provee una caracterización de los módulos noetherianos en términos de la operación producto filtrado de conjuntos.

Teorema 3.6. *Sea A un módulo. A es noetheriano si y sólo si para todo I, todo filtro D sobre I y B_i un submódulo de A, para cada $i \in I$, existe $X \in D$ tal que $\prod_{i\in I} B_i/D = \bigcap_{i\in X} B_i$.*

Demostración. La primera implicación es una consecuencia del Corolario 3.5. Para el recíproco, suponga que A no es noetheriano y que $B_1 \subsetneq B_2 \subsetneq \cdots \subsetneq B_n \subsetneq \cdots$ es una cadena ascendente infinita de submódulos de A. Sea $I = \mathbb{Z}^+$ y D un ultrafiltro no principal sobre I. Por hipótesis, $\prod_{i\in I} B_i/D = \bigcap_{i\in X} B_i$, para algún $X \in D$. Pero $\bigcap_{i\in X} B_i = B_m$ para el elemento más pequeño m en X. Por el Teorema 2.4, $\bigcup_{X\in D}\bigcap_{i\in X} B_i = B_m$. Entonces, $\bigcap_{i\in X} B_i \subseteq B_m$ para cada $X \in D$. Como D es ultrafiltro no principal sobre I, se tiene que $\{1, 2, \ldots, m\} \notin D$. Entonces, $Y = \{m + 1, m + 2, \ldots\} \in D$. Por consiguiente, $B_{m+1} = \bigcap_{i\in Y} B_i \subseteq B_m$. Así, $B_{m+1} \subseteq B_m$, lo que contradice la suposición. Por tanto, A es módulo noetheriano. ☑

Empleando la noción de producto filtrado de conjuntos se demuestra el siguiente resultado conocido en teoría de módulos noetherianos.

Teorema 3.7. *Sea M un módulo. Suponga que cada submódulo de M es finitamente generado. Entonces, M es noetheriano.*

Demostración. Considere la cadena ascendente de submódulos de M

$$B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots, \tag{3}$$

y sea D un ultrafiltro no principal sobre $I = \{0, 1, 2, \ldots\}$. De acuerdo con el Teorema 3.2, $\prod_{k\in I} B_k/D$ es un submódulo de M. Entonces, por hipótesis, $\prod_{k\in I} B_k/D$ es finitamente generado; esto es, $\prod_{k\in I} B_k/D = \langle a_1, \ldots, a_l\rangle$ para algunos $a_1, \ldots, a_l \in M$. Como $a_i \in \prod_{k\in I} B_k/D$ y D es ultrafiltro no principal sobre I, entonces el conjunto $\{k \in I : a_i \in B_k\}$ es infinito y un elemento de D, para cada $i = 1, 2, \ldots, l$. Nótese que, existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que B_N contiene a $a_1, \ldots, a_l$. En consecuencia, $\prod_{k\in I} B_k/D \subseteq B_m$, para todo $m \geqslant N$. Pero, $\prod_{k\in I} B_k/D = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k$, entonces $B_n \subseteq \prod_{k\in I} B_k/D$ para todo $n \in I$. Por consiguiente, $\prod_{k\in I} B_k/D = B_m$ para todo $m \geqslant N$. Así, existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $B_m = B_N$, para todo $m \geqslant N$. Por tanto, M es noetheriano. ☑

Si un anillo R es considerado como un R-módulo, es fácil ver que los submódulos de R son precisamente los ideales de R. De este modo, usando el Teorema 3.6 se obtiene la siguiente caracterización de los anillos noetherianos mediante la operación producto filtrado de conjuntos.

Corolario 3.8. *Sea R un anillo. R es noetheriano si y sólo si para todo I, todo filtro D sobre I y A_i un ideal de R, para cada $i \in I$, existe $X \in D$ tal que*

$$\prod_{i\in I} A_i/D = \bigcap_{i\in X} A_i.$$

Sea R un anillo. Un ideal primo P de R es llamado ideal *primo minimal* sobre un ideal A de R, si $A \subseteq P$ y no existe ideal primo más pequeño con esta propiedad.

Teorema 3.9. *Sea R un anillo noetheriano y A un ideal de R. Entonces existe un número finito de ideales primos minimales sobre A.*

Demostración. Si A es primo, la demostración es obvia. Supóngase, por lo tanto, que A no es primo y que existe un número infinito de ideales primos minimales sobre A. Denotemos el conjunto de todos ellos por $\{P_i : i \in I\}$ y sea D un ultrafiltro no principal sobre I. Como R es noetheriano, por el Corolario 3.8, existe $X \in D$ tal que

$$\prod_{i\in I} P_i/D = \bigcap_{i\in X} P_i$$

y es primo. Ahora note que, para cada $i \in X$, $A \subsetneq \bigcap_{i\in X} P_i \subsetneq P_i$. Esto contradice la minimalidad de P_i, para cada $i \in X$. ☑

Sea A un ideal de un anillo R. El *radical* de A, denotado $\sqrt{A}$, es el conjunto de todos los $\alpha \in R$ tales que $\alpha^m \in R$, para algún $m \in \mathbb{Z}^+$.

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata de [10, Capítulo 2, Sección 2.3, Teorema 4].

Teorema 3.10. *Sea R un anillo noetheriano y A un ideal de R. Suponga que $P_{j_1}, \ldots, P_{j_r}$ son todos los ideales primos minimales sobre A. Entonces,*

$$\sqrt{A} = \bigcap_{k=1}^{r} P_{j_k}.$$

El siguiente teorema se usará en la siguiente sección para establecer un resultado en ideales primarios usando la operación producto filtrado de conjuntos.

Teorema 3.11. *Sea R un anillo noetheriano y A un ideal de R que no es primo. Supóngase que $P_{j_1}, P_{j_2}, \ldots, P_{j_n}$, donde $n > 1$, son todos los ideales primos minimales sobre A. Entonces $\bigcap_{k=l}^{m} P_{j_k}$, donde $1 \leqslant l < m \leqslant n$, no es ideal primo de R.*

Demostración. Supongamos que, para $1 \leqslant l < m \leqslant n$, $\bigcap_{k=l}^{m} P_{j_k}$ es ideal primo de R. Entonces, para todo $k = l, \ldots, m$, se cumple que

$$A \subsetneq \bigcap_{k=l}^{m} P_{j_k} \subsetneq P_{j_k}.$$

Esto contradice la minimalidad de P_{j_k}, para todo $k = l, \ldots, m$. ☑

4. Producto filtrado de ideales primarios e ideales P-primarios

Sea R un anillo y J un ideal de R; se dice que J es un *ideal primario* de R si para todo $a, b \in R$ se cumple que $ab \in J$ y que $a \notin J$ implica $b^n \in J$, para algún $n \in \mathbb{Z}^+$.

El siguiente teorema muestra que la colección de ideales primarios de un anillo noetheriano, bajo ciertas condiciones, no necesariamente es cerrada respecto a la operación producto filtrado de conjuntos.

Teorema 4.1. *Sea D cualquier filtro sobre I y A_i un ideal primario de un anillo noetheriano R, para cada $i \in I$. Supongamos que existe más de un ideal primo minimal sobre $\prod_{i\in I} A_i/D$ y que $\prod_{i\in I} A_i/D$ no es ideal primo de R. Entonces, $\prod_{i\in I} A_i/D$ no es ideal primario de R.*

Demostración. Como R es noetheriano y $\prod_{i\in I} A_i/D$ es un ideal de R, entonces, de acuerdo con el Teorema 3.9, existe un número finito de ideales primos minimales sobre $\prod_{i\in I} A_i/D$. Supongamos que ellos son $P_{j_1}, \ldots, P_{j_n}$. Por hipótesis, $n > 1$. Ahora bien, por el Teorema 3.10, se obtiene que, $\sqrt{\prod_{i\in I} A_i/D} = \bigcap_{k=1}^{n} P_{j_k}$. Pero, de acuerdo con el Teorema 3.11, $\sqrt{\prod_{i\in I} A_i/D}$ no es ideal primo de R. Por tanto, por el contrarrecíproco del teorema [7, Capítulo VIII, Teorema 2.9], $\prod_{i\in I} A_i/D$ no es ideal primario de R. ☑

El siguiente ejemplo muestra la necesidad de que exista más de un ideal primo minimal sobre el producto filtrado de los ideales primarios en la hipótesis del Teorema 4.1.

Ejemplo 4.2. Sean $I = \mathbb{Z}^+$, D un ultrafiltro no principal sobre I y el ideal primario $\langle x^i, y^2\rangle$ del anillo de polinomios $\mathbb{Z}[x, y]$, para cada $i \in I$. No es difícil mostrar que, $\prod_{i\in I} \langle x^i, y^2\rangle/D = \langle y^2\rangle$. Note que $\langle y^2\rangle$ es ideal primario de $\mathbb{Z}[x, y]$, y el ideal $\langle y\rangle$ es primo minimal sobre el ideal $\langle y^2\rangle$ de $\mathbb{Z}[x, y]$. Además, es fácil demostrar que $\langle y\rangle$ es el único ideal primo minimal sobre el ideal $\langle y^2\rangle$ de $\mathbb{Z}[x, y]$. Así pues, el ideal $\prod_{i\in I} \langle x^i, y^2\rangle/D$ de $\mathbb{Z}[x, y]$ es primario y tiene un solo ideal primo minimal sobre el.

El siguiente ejemplo ilustra el Teorema 4.1.

Ejemplo 4.3. Considérese el anillo de los enteros $\mathbb{Z}$ y sean $I = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$, donde $p_1, \ldots, p_k$ son números primos distintos entre sí, $D = \langle Y\rangle$, para algún $Y = \{p_{j_1}, p_{j_2}, \ldots, p_{j_r}\} \subseteq I$, con $r > 1$, y el ideal primario $\langle p^m\rangle$ de $\mathbb{Z}$, para todo $p \in I$ y $m \geqslant 1$. Entonces,

$$\prod_{p\in I} \langle p^m\rangle/D = \bigcap_{p\in Y} \langle p^m\rangle = \bigcap_{n=1}^{r} \langle p_{j_n}^m\rangle = \langle p_{j_1}^m\rangle\langle p_{j_2}^m\rangle \cdots \langle p_{j_r}^m\rangle = \langle (p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_r})^m\rangle.$$

Nótese que $\prod_{p\in I}\langle p^m\rangle/D$ no es ideal primo y que $\langle p_{j_1}\rangle$, $\langle p_{j_2}\rangle$, ..., $\langle p_{j_r}\rangle$ son todos los ideales primos minimales sobre $\prod_{p\in I}\langle p^m\rangle/D$. Entonces, por el Teorema 4.1, $\prod_{p\in I}\langle p^m\rangle/D$ no es ideal primario. Lo cual es cierto, pues $(p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_r})^m$ no es potencia de ningún número primo.

En general, la intersección finita de ideales primarios no es un ideal primario. Sin embargo, el ultraproducto de un número finito de ideales primarios siempre es un ideal primario de acuerdo con el Corolario 2.6.

Si Q es un ideal primario de un anillo R, entonces el radical P de Q es llamado *ideal primo asociado* de Q. En este caso, el ideal Q es llamado ideal P-*primario*.

La colección de ideales P-primarios no siempre es cerrada respecto a la operación ultraproducto de conjuntos, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Antes, nótese que, si D es ultrafiltro sobre I y Q_i es ideal P-primario de un anillo R, para cada $i\in I$, entonces $ab\in\prod_{i\in I}Q_i/D$ y $a\notin\prod_{i\in I}Q_i/D$ implica $b\in P$. En efecto, supongamos que $ab\in\prod_{i\in I}Q_i/D$ y $a\notin\prod_{i\in I}Q_i/D$. Entonces,

$$\{i\in I : ab\in Q_i\}\cap\{i\in I : a\notin Q_i\}\in D.$$

Por consiguiente, $\{i\in I : ab\in Q_i \ y \ a\notin Q_i\}\in D$. Puesto que Q_i es P-primario y $\emptyset\notin D$, de acuerdo con [7, Capítulo VIII, Teorema 2.10(ii)], se tiene que $b\in P$. Por otro lado, $\prod_{i\in I}Q_i/D\subseteq P$. En efecto, sea $x\in\prod_{i\in I}Q_i/D$ arbitrario; entonces $\{i\in I : x\in Q_i\}\in D$. Como Q_i es P-primario y $\emptyset\notin D$, se tiene $x\in P$. Sin embargo, la inclusión $P\subseteq\sqrt{\prod_{i\in I}Q_i/D}$ no siempre es cierta.

Ejemplo 4.4. Considérese el anillo de los enteros $\mathbb{Z}$, y sean $I=\mathbb{Z}^+$, D un ultrafiltro no principal sobre I, $p\in\mathbb{Z}$ primo y $P=\langle p\rangle$.

Nótese que cada uno de los ideales $\langle p\rangle$, $\langle p^2\rangle$, ..., $\langle p^i\rangle$, ... es P-primario y $\prod_{i\in I}\langle p^i\rangle/D=\langle 0\rangle$. Ahora bien, $\sqrt{\langle 0\rangle}=\langle 0\rangle$. Por tanto, $P\nsubseteq\sqrt{\prod_{i\in I}\langle p^i\rangle/D}$.

5. Productos filtrados de ideales en anillos cociente

Un subconjunto no vacío S de un anillo R es llamado *multiplicativo* si $ab\in S$ cuando $a,b\in S$. El *anillo cociente* de R por S, o la *localización* de R por S, denotado por $S^{-1}R$, es un anillo conmutativo con identidad cuya construcción es la generalización de la construcción familiar de los números racionales a partir de los números enteros.

Si S es un subconjunto multiplicativo de un anillo conmutativo R e I es un ideal de R, entonces $S^{-1}I=\{a/s : a\in I; s\in S\}$ es un ideal en $S^{-1}R$.

Existe una aplicación $\varphi_S : R\longrightarrow S^{-1}R$ dada por $\varphi_S(r)=rs/s$, para todo $s\in S$, tal que φ_S es un homomorfismo bien definido. El siguiente teorema no es difícil de demostrar.

Teorema 5.1. *Sean R un anillo, S un subconjunto multiplicativo de R, D un filtro sobre I y A_i un ideal de R, para cada $i \in I$. Entonces,*

$$\varphi_S^{-1}\left(\prod_{i\in I}(S^{-1}A_i)/D\right) = \prod_{i\in I}\varphi_S^{-1}(S^{-1}A_i)/D.$$

El siguiente teorema provee una caracterización de los anillos cociente usando producto filtrado.

Teorema 5.2. *Sean R un anillo, S un subconjunto multiplicativo en R, D un filtro sobre I y A_i un ideal de R, para cada $i \in I$. Entonces, $\prod_{i\in I}(S^{-1}A_i)/D = S^{-1}R$ si y sólo si existe $X \in D$ tal que $S \cap A_i \neq \emptyset$, para cada $i \in X$.*

Demostración. Suponga que,

$$\prod_{i\in I}(S^{-1}A_i)/D \;=\; S^{-1}R.$$

Entonces,

$$\varphi_S^{-1}\left(\prod_{i\in I}(S^{-1}A_i)/D\right) \;=\; R.$$

Por el Teorema 5.1, $\prod_{i\in I}\varphi_S^{-1}(S^{-1}A_i)/D = R$. Así, $1_R \in \prod_{i\in I}\varphi_S^{-1}(S^{-1}A_i)/D$. De este modo, $\{i \in I : 1_R \in \varphi_S^{-1}(S^{-1}A_i)\} \in D$. Esto implica que $\{i \in I : \varphi_S(1_R) \in S^{-1}A_i\} \in D$. Sea $X = \{i \in I : \varphi_S(1_R) \in S^{-1}A_i\}$. Como $\varphi_S(1_R) \in S^{-1}A_i$ para todo $i \in X$, se tiene que $\varphi_S(1_R) = a_i/s_i$ para algún $a_i \in A_i$, $s_i \in S$ y todo $i \in X$. Pero $\varphi_S(1_R) = 1_R s/s$, para todo $s \in S$. Así, $1_R s/s = a_i/s_i$ para todo $i \in X$ y todo $s \in S$. Luego, para algún $s_1 \in S$, $ss_is_1 = a_iss_1$ para todo $i \in X$ y todo $s \in S$; pero, $ss_is_1 \in S$ y $a_iss_1 \in A_i$, para todo $i \in X$ y todo $s \in S$. Por tanto, $S \cap A_i \neq \emptyset$, para todo $i \in X$. Recíprocamente, supongamos que existe $X \in D$ tal que $S \cap A_i \neq \emptyset$ para todo $i \in X$. Sea $s_i \in S \cap A_i$ para todo $i \in X$. Entonces $1_{S^{-1}R} = s_i/s_i \in S^{-1}A_i$ para todo $i \in X$. Luego, $S^{-1}A_i = S^{-1}R$ para todo $i \in X$. Nótese que para todo $a \in S^{-1}R$, $X \subseteq \{i \in I : a \in S^{-1}A_i\} \in D$. Por consiguiente, $S^{-1}R \subseteq \prod_{i\in I}(S^{-1}A_i)/D$. La otra inclusión es obvia. Por tanto, $\prod_{i\in I}(S^{-1}A_i)/D = S^{-1}R$. ☑

Ejemplo 5.3. Considere el anillo de los enteros $\mathbb{Z}$ y el conjunto multiplicativo $S = \{6, 6^2, 6^3, \ldots\}$ de $\mathbb{Z}$. Sean $I = \mathbb{Z}^+$, D un ultrafiltro no principal sobre I y el ideal $\langle 6^i\rangle$ de $\mathbb{Z}$, para cada $i \in I$. No es difícil probar que,

$$\prod_{i\in I}(S^{-1}\langle 6^i\rangle)/D = \{m/6^n : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Ahora usaremos el Teorema 5.2 para llegar al mismo resultado. El conjunto $X = \{i \in I : \varphi_S(1_R) \in S^{-1}A_i\}$, en la demostración del Teorema 5.2, en este caso es $X = \{i \in \mathbb{Z}^+ : 1s/s \in S^{-1}\langle 6^i\rangle\}$, o lo que es lo mismo, $X = \{i \in \mathbb{Z}^+ : s/s \in$

$S^{-1}\langle 6^i\rangle\}$. Ahora bien, no es difícil demostrar que, para todo $i \in \mathbb{Z}^+$, $s/s \in S^{-1}\langle 6^i\rangle$. Por consiguiente, $X = \mathbb{Z}^+$. Por otro lado, nótese que el generador del ideal $\langle 6^i\rangle$, para cada $i \in \mathbb{Z}^+$, es un elemento de S. En resumen, existe $X \in D$ tal que $S \cap \langle 6^i\rangle \neq \emptyset$, para cada $i \in X$. Entonces, por el Teorema 5.2,

$$\prod_{i\in I}(S^{-1}\langle 6^i\rangle)/D = S^{-1}\mathbb{Z} = \{m/6^n : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Empleando la caracterización dada en el Corolario 3.8 de un anillo noetheriano mediante producto filtrado de conjuntos se obtiene el siguiente

Teorema 5.4. *Toda localización $S^{-1}R$ de un anillo noetheriano R, cuando φ_S es sobreyectivo, es noetheriano.*

Demostración. Como R es noetheriano de acuerdo con el Corolario 3.8, para todo J, todo filtro D sobre J y para el ideal $\varphi_S^{-1}(S^{-1}I_j)$ en R, donde I_j es algún ideal de R, para cada $j \in J$, existe $X \in D$ tal que

$$\prod_{j\in J}(\varphi_S^{-1}(S^{-1}I_j))/D = \bigcap_{j\in X}(\varphi_S^{-1}(S^{-1}I_j)).$$

De aquí se tiene que

$$\varphi_S^{-1}\left(\prod_{j\in J}(S^{-1}I_j)/D\right) = \varphi_S^{-1}\left(\bigcap_{j\in X}(S^{-1}I_j)\right).$$

Puesto que el homomorfismo φ_S es sobreyectivo, $\prod_{j\in J}(S^{-1}I_j)/D = \bigcap_{j\in X}(S^{-1}I_j)$. Por tanto, para todo J, todo filtro D sobre J y un ideal $S^{-1}I_j$ de $S^{-1}R$, para cada $j \in J$, existe $X \in D$ tal que $\prod_{j\in J}(S^{-1}I_j)/D = \bigcap_{j\in X} S^{-1}I_j$. Luego, de acuerdo con el Corolario 3.8, $S^{-1}R$ es noetheriano. ☑

6. Producto filtrado de subretículos y una caracterización de los retículos noetherianos

Un conjunto parcialmente ordenado L es un *retículo* si para cada $a, b \in L$, $\sup\{a,b\}$ e $\inf\{a,b\}$ son elementos de L.

El siguiente teorema muestra que la colección de subretículos de un retículo arbitrario es cerrada respecto a la operación producto filtrado de conjuntos.

Teorema 6.1. *Sea L un retículo, D un filtro sobre I y Q_i un subretículo de L, para cada $i \in I$. Entonces, $\prod_{i\in I} Q_i/D$ es un subretículo de L.*

Demostración. Sean $a, b \in L$ arbitarios y tales que $a, b \in \prod_{i\in I} Q_i/D$. Entonces, $X = \{i \in I : a \in Q_i\} \bigcap \{i \in I : b \in Q_i\} \in D$. Pero, $X \subseteq \{i \in I : a, b \in Q_i\}$. Por definición de filtro, $Y = \{i \in I : a, b \in Q_i\} \in D$. Como Q_i, para todo $i \in Y$, es subretículo de L, se tiene que $Y \subseteq \{i \in I : a \vee b,\ a \wedge b \in Q_i\}$. Por consiguiente, $\{i \in I : a \vee b,\ a \wedge b \in Q_i\} \in D$. Por tanto, $a \vee b,\ a \wedge b \in \prod_{i\in I} Q_i/D$. ☑

Un subretículo J de un retículo L es un ideal si $a \in L$ y $b \in J$ implica $a \wedge b \in J$. Un ideal propio J de un retículo L es primo si $a, b \in L$ y $a \wedge b \in J$ implica $a \in J$ o $b \in J$.

Teorema 6.2. *Sea L un retículo, D un filtro sobre I y J_i un ideal de L, para cada $i \in I$. Entonces, $\prod_{i\in I} J_i/D$ es un ideal de L.*

Demostración. Por el Teorema 6.1, $\prod_{i\in I} J_i/D$ es un subretículo de L. Resta demostrar que si $a \in L$ y $b \in \prod_{i\in I} J_i/D$ entonces $a \wedge b \in \prod_{i\in I} J_i/D$. En efecto, sean $a \in L$ y $b \in \prod_{i\in I} J_i/D$ arbitrarios. Entonces, $X = \{i \in I : b \in J_i\} \in D$. Como J_i, para todo $i \in X$, es ideal de L, se tiene que $X \subseteq \{i \in I : \ a \wedge b \in J_i\}$. Luego, por definición de filtro, $\{i \in I : \ a \wedge b \in J_i\} \in D$. Por tanto, $a \wedge b \in \prod_{i\in I} J_i/D$. ☑

Teorema 6.3. *Sea L un retículo, D un ultrafiltro sobre I y J_i un ideal primo de L, para cada $i \in I$. Entonces, $\prod_{i\in I} J_i/D$ es un ideal primo de L.*

Demostración. Por el Teorema 6.2, $\prod_{i\in I} J_i/D$ es un ideal de L. Resta demostrar que si $a, b \in L$ y $a \wedge b \in \prod_{i\in I} J_i/D$ entonces $a \in \prod_{i\in I} J_i/D$ ó $b \in \prod_{i\in I} J_i/D$. En efecto, sean $a, b \in L$ arbitrarios y tales que $a \wedge b \in \prod_{i\in I} J_i/D$. Entonces

$$X = \{i \in I : \ a \wedge b \in J_i\} \in D.$$

Como J_i, para todo $i \in X$, es ideal primo, se tiene que

$$X \subseteq \{i \in I : \ a \in J_i \ \text{ o } \ b \in J_i\} \in D.$$

Pero,

$$\{i \in I : \ a \in J_i \ \text{ o } \ b \in J_i\} \subseteq \{i \in I : a \in J_i\} \bigcup \{i \in I : b \in J_i\} \in D.$$

Como D es ultrafiltro sobre I,

$$\{i \in I : \ a \in J_i\} \in D \quad \text{ó} \quad \{i \in I : \ b \in J_i\} \in D.$$

Por tanto,

$$a \in \prod_{i\in I} J_i/D \quad \text{ó} \quad b \in \prod_{i\in I} J_i/D.$$ ☑

Los siguientes resultados acentuarán nuestra comprensión de la operación producto filtrado de conjuntos en un retículo noetheriano.

Teorema 6.4. *Sea L un retículo y L_i un ideal de L, para cada $i \in I$. Si D es un filtro sobre I y $\prod_{i\in I} L_i/D$ es un ideal principal de L, entonces existe $X \in D$ tal que $\prod_{i\in I} L_i/D = \bigcap_{i\in X} L_i$.*

Demostración. Sea L un retículo y, para cada $i \in I$, L_i un ideal de L. Supongamos que D es un filtro sobre I y $\prod_{i\in I} L_i/D$ es un ideal principal de L. Entonces, $\prod_{i\in I} L_i/D = (a]$, para algún $a \in L$. También, $a \in \prod_{i\in I} L_i/D$ si y sólo si $\{i \in I : a \in L_i\} \in D$. Sea $X = \{i \in I : a \in L_i\}$. Si $i \in X$ entonces $\prod_{i\in I} L_i/D \subseteq L_i$. Por tanto,

$$\prod_{i\in I} L_i/D \subseteq \bigcap_{i\in X} L_i.$$

Por otro lado, por el Teorema 2.4,

$$\bigcap_{i\in X} L_i \subseteq \prod_{i\in I} L_i/D.$$

☑

Del Teorema 6.4, si L es un retículo noetheriano, se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 6.5. *Sea L un retículo noetheriano y L_i un ideal de L, para cada $i \in I$. Si D es un filtro en I, entonces existe $X \in D$ tal que $\prod_{i\in I} L_i/D = \bigcap_{i\in X} L_i$.*

El siguiente teorema provee una caracterización de los retículos noetherianos usando la operación producto filtrado de conjuntos.

Teorema 6.6. *Sea L un retículo. L es noetheriano si y sólo si para todo I, todo filtro D sobre I y L_i un ideal de L, para cada $i \in I$, existe $X \in D$ tal que*

$$\prod_{i\in I} L_i/D = \bigcap_{i\in X} L_i.$$

Demostración. La primera implicación es una consecuencia del Corolario 6.5. Para el recíproco, supóngase que L no es noetheriano y considérese la cadena ascendente infinita de elementos de L

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots . \tag{4}$$

Sean $I = \mathbb{Z}^+$, D un ultrafiltro no principal sobre I y el ideal principal $L_i = (x_i]$, para cada $i \in I$. Por hipótesis,

$$\prod_{i\in I} L_i/D = \bigcap_{i\in X} L_i,$$

para algún $X \in D$. Ahora, por (4), nótese que

$$L_1 \subsetneq L_2 \subsetneq \cdots \subsetneq L_n \subsetneq \cdots .$$

Así, $\bigcap_{i\in X} L_i = L_m$ para el elemento más pequeño m en X. Por tanto, $\prod_{i\in I} L_i/D = L_m$. Por el Teorema 2.4, $\bigcup_{X\in D} \bigcap_{i\in X} L_i = L_m$. Entonces $\bigcap_{i\in X} L_i \subseteq L_m$, para cada $X \in D$. Como D es ultrafiltro no principal sobre I, se tiene que $\{1, 2, 3, \ldots, m\} \notin D$. Entonces, por ser D ultrafiltro sobre I,

$$Y = \{m + 1, m + 2, \ldots\} \in D.$$

Por consiguiente,

$$L_{m+1} = \bigcap_{i \in Y} L_i \subseteq L_m.$$

Esto implica que $x_{m+1} \leq x_m$, una contradicción con lo supuesto. Por tanto, L es retículo noetheriano. ☑

Referencias

[1] Burris S. and Shankappanavar H. *A Course in Universal Algebra*, Springer–Verlag, New York, 1981.

[2] Cáceres Duque L. *Ultraproducts of Sets and Ideal Theories of Conmutative Rings*, Ph.D. Thesis, 1998.

[3] Cáceres Duque L. and Nelson G. "A Description of Ideals in Noetherian Ring", *Communications in Algebra*, 2002.

[4] Cáceres Duque L. "Ideals Theories of the Rings of Polynomials Over the Integers", *Bulletin of the Section Logic.*, Vol. 30, N^o 1, 2001, pp. 21–31.

[5] Cáceres Duque L. and Carta E. "Filtered Products of Subgroups and Ideals", *Prooceding of the National Conference on Undergraduate Research*, University of Kentucky, 2002.

[6] Grätzer G. *Lattice Theory*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1971.

[7] Hungerford T. *Algebra*, Springer–Verlag, New York, 1974.

[8] Kaplansky I. *Conmutative Rings*, Polygonal Publishing House, New York, 1974.

[9] Nelsón G. "Compactness, Ultralimits, Ultraproducts and Maximal Ideals", preprint, 1991.

[10] Northcott D. *Lessons on Rings, Modules and Multiplicities*, University Printing House, Great Britain, 1968.

Luis F. Cáceres & Joel Meléndez
Departamento de Matemáticas
Universidad de Puerto Rico
Recinto de Mayagüez, Puerto Rico
e-mail: `lcaceres@math.uprm.edu`