Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 22, Nos. 1 y 2, 2004, pág. 23–35

Acerca de los digrafos localmente transitivos

Juana S. Fuentes* Marlio Paredes** Sofía Pinzón**

Resumen. En este trabajo introducimos la noción de digrafo localmente transitivo como una generalización de la noción de torneo localmente transitivo introducida por Brouwer en [1]. Presentamos aquí algunos resultados computacionales sobre torneos y planteamos problemas similares para el caso de digrafos.

1. Introducción

Nuestro interés por estudiar torneos se inició con el estudio de ciertas estructuras geométricas llamadas estructuras cuasicomplejas, definidas sobre los espacios homogéneos

$$\mathbb{F} = \frac{U(n)}{U(1) \times \cdots \times U(1)},$$

donde

$$U(n) = \{A \in Mat(n, \mathbb{C}) : A\bar{A}^{\,t} = I\}$$

es el grupo unitario. Estos espacios son conocidos como variedades bandera maximales (ver [13]).

El problema en el cual estábamos interesados era el de caracterizar las estructuras cuasicomplejas sobre $\mathbb{F}$, las cuales admiten métricas (1,2)–simplécticas. Este problema se traduce en caracterizar cierto tipo de torneos, los cuales fueron llamados libres de cono, y con esta idea se obtuvieron varios resultados que han sido publicados en los trabajos [13], [14], [2] y [3].

Un torneo o n–torneo $\mathcal{T}$ es un grafo dirigido o digrafo con n vértices o jugadores $p_1, \dots, p_n$, tales que cada par de vértices está unido por exactamente un arco $p_i \to p_j$ ó $p_j \to p_i$. Los torneos son grafos completos, porque entre cada par de vértices siempre hay un arco.

Un problema que surgió como consecuencia de los trabajos anteriores era saber cuántos torneos que tienen la propiedad de ser libre de cono existen. Debido a la

Palabras y frases claves: digrafos, torneos, digrafos localmente transitivos
MSC2000: Primaria: 05C20. Secundaria: 53C15.

* Licenciada en Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, Colombia, *e-mail*: `juanisf_13@yahoo.com.mx`

** Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, Colombia, *e-mail*: `mparedes@uis.edu.co`, `spinzon@uis.edu.co`.

cantidad de información que se debe manejar para estudiar un problema como este, fue necesario hacer uso del computador. En [17] se reportaron los resultados obtenidos en esta dirección, para lo cual fue necesario elaborar varios programas de computador en C++.

Posteriormente, el profesor Brendan McKay, del Departamento de Ciencias Computacionales de la Universidad Nacional de Australia, señaló que la propiedad de un torneo de ser libre de cono es equivalente a que el torneo sea localmente transitivo. La idea de torneo localmente transitivo fue introducida por Brouwer en [1]; en este trabajo se presentan algunas propiedades de este tipo de torneos, las cuales nos ayudaron para completar nuestro estudio. Los resultados obtenidos usando torneos localmente transitivos son presentados en [4]. En [1] se da una fórmula para contar los torneos localmente transitivos, salvo isomorfismos. Esta fórmula fue mejorada en [4].

Posteriormente, en [20] se generalizó el concepto de torneo localmente transitivo al de digrafo localmente transitivo, con el fin de poder estudiar otro tipo de estructuras geométricas sobre $\mathbb{F}$, conocidas como f–estructuras. Con esta idea logramos generalizar resultados que habíamos obtenido para estructuras cuasicomplejas a f–estructuras. Los resultados obtenidos dieron lugar al artículo [5].

Todo lo anterior nos ha llevado a hacernos una pregunta similar a la que nos hicimos para torneos libres de cono o localmente transitivos. El problema correspondiente es: ¿cuántos digrafos localmente transitivos, salvo isomorfismos, existen? En este trabajo presentamos algunos resultados al respecto obtenidos recientemente.

2. Torneos

En esta sección presentamos la teoría básica sobre torneos, la cual es necesaria para el desarrollo del artículo.

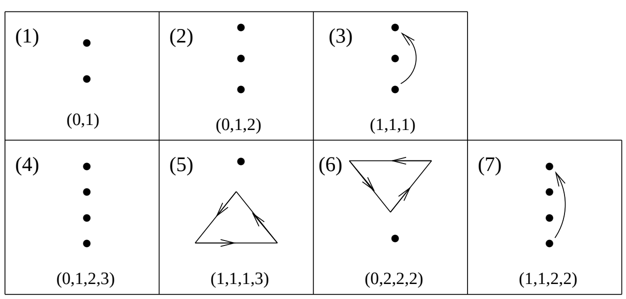

Figura 1. Clases de isomorfismo de n–torneos para $n = 2, 3, 4$, y vector resultado correspondiente.

Definición 2.1. Un torneo o n–torneo $\mathcal{T}$ es un grafo que consiste de un conjunto de n vértices o jugadores distintos $p_1, \ldots, p_n$, tales que cada par de vértices está unido por exactamente un arco $p_i \to p_j$ ó $p_j \to p_i$. Si $p_i \to p_j$, entonces decimos que p_i le gana a p_j (ver [11]).

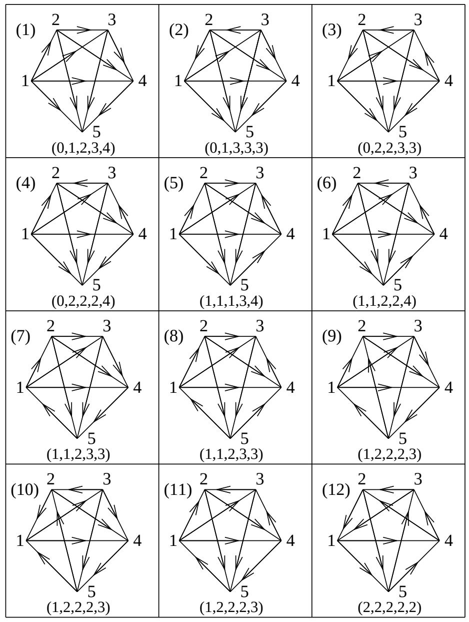

Figura 2. Clases de isomorfismo de 5–torneos y vector resultado correspondiente.

Definición 2.2. Sea $\mathcal{T}_1$ un torneo con n jugadores $\{1,\ldots,n\}$ y $\mathcal{T}_2$ un torneo con m jugadores $\{1,\ldots,m\}$. Un homomorfismo entre $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ es una aplicación $\phi\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,m\}$ tal que

$$(s \longrightarrow t \quad \text{en } \mathcal{T}_1) \quad\Longrightarrow\quad (\phi(s) \longrightarrow \phi(t) \text{ ó } \phi(s) = \phi(t) \quad \text{en } \mathcal{T}_2).$$

Cuando ϕ es biyectiva se dice que $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son isomorfos.

Cada torneo determina una n–upla $(s_1,\ldots,s_n)$ cuyas entradas son el número de juegos que gana cada jugador. Esta n–upla es llamada vector resultado o vector marcador del torneo (en inglés *score vector*). Podemos ordenar las entradas del vector resultado de tal forma que $0 \le s_1 \le \cdots \le s_n$, y además tenemos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} s_i = \binom{n}{2}$.

Torneos isomorfos tienen el mismo vector resultado, pero no es cierto que torneos con el mismo vector resultado sean isomorfos. Por ejemplo, para $n = 5$ existen torneos que tienen el mismo vector resultado, y sin embargo no son isomorfos (ver Figura 2). Los torneos pueden ser clasificados en clases de isomorfismo; la Figura 1 contiene las clases de isomorfismo de n–torneos para $n = 2, 3, 4$, y la Figura 2 contiene las clases de isomorfismo de 5–torneos.

Definición 2.3. Se dice que un torneo es transitivo si la relación "$\to$" es transitiva, esto es, si $i \to j$ y $j \to k$ implican $i \to k$.

Los torneos transitivos tienen la particularidad de que todos ellos son isomorfos entre sí y su vector resultado es $(0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Para $n = 2$ solo existen torneos transitivos; para $n = 3$ tenemos dos clases de isomorfismo, una de las cuales es la de los torneos transitivos (ver Figura 1).

Definición 2.4. Un m–torneo $\mathcal{S}$ es un subtorneo del n–torneo $\mathcal{T}$ si existe una aplicación ψ uno a uno entre los vértices de $\mathcal{S}$ y un subconjunto de los vértices de $\mathcal{T}$ tal que si $i \to j$ en $\mathcal{S}$, entonces $\psi(i) \to \psi(j)$ en $\mathcal{T}$.

Un k–ciclo de un n–torneo $\mathcal{T}$ es un subtorneo formado por k vértices de $\mathcal{T}$, $p_1, p_2, \ldots, p_k$, tales que $p_1 \to p_2 \to \cdots \to p_k \to p_1$.

Una caracterización muy útil de los torneos transitivos es que ellos son los únicos que no poseen 3–ciclos; en otras palabras, no existen 3 vértices i, j, k, tales que $i \to j \to k \to i$. En realidad podemos decir que los torneos transitivos son los únicos torneos que no contienen k–ciclos, para $k \geq 3$; es decir es muy fácil probar el siguiente resultado.

Lema 2.5. *Un n–torneo $\mathcal{T}$ es transitivo si y solo si no contiene k–ciclos, $k \geq 3$.*

La demostración es inmediata, puesto que si un torneo contiene algún k–ciclo, obviamente no puede ser transitivo.

El caso $n = 4$ es de mucha importancia para nosotros; la clase de isomorfismo correspondiente a los 4–torneos transitivos es la número (4) de la Figura 1. Las clases (5) y (6) en la misma Figura corresponden a torneos que tienen la propiedad de poseer un 3–ciclo conado, lo cual significa que el torneo posee un 3–ciclo ijk y existe otro vértice l que le gana a todos los vértices del 3–ciclo o que pierde con todos ellos. Obsérvese que el torneo representante de la clase (7) en esta Figura contiene 3–ciclos, pero ninguno de ellos es conado.

Definición 2.6. Se dice que un n–torneo $\mathcal{T}$ es libre de cono si todo subtorneo de orden 4 de $\mathcal{T}$ es isomorfo a (4) ó (7) en la Figura 1.

En otras palabras, un torneo es libre de cono si ningún subtorneo de orden 4 es isomorfo a (5) ó (6) en la Figura 2. Este era el tipo de torneos que estábamos interesados en estudiar con el fin de dar respuesta a algunas preguntas sobre la geometría de las variedades bandera $\mathbb{F}$. En particular, queríamos responder la siguiente pregunta: ¿Cuántos n–torneos libres de cono existen?

Como el número de torneos crece de forma exponencial, el manejo de la información se complica mucho a medida que tomamos valores de n más grandes. La primera reducción del problema se consigue usando la clasificación de los torneos en clases de isomorfismos. La Tabla 1, tomada de Moon [11], muestra la cantidad de clases de isomorfismo de n–torneos para cada $n \leq 12$. Observemos que inclusive el número de clases de isomorfismo crece muy rápidamente.

Para hacer los cálculos computacionales usamos la matriz asociada a cada torneo, la cual es definida de la siguiente manera.

Definición 2.7. Dado un torneo $\mathcal{T}$, la matriz de adyacencia, o simplemente la matriz, del torneo $M(\mathcal{T}) = (a_{ij})$, se define por: $a_{ij} = 0$, si $j \to i$; $a_{ij} = 1$, si $i \to j$; y $a_{ii} = 0$.

n	$T(n)$
1	1
2	1
3	2
4	4
5	12
6	56
7	456
8	6.880
9	191.536
10	9'733.056
11	903'753.248
12	154.108'311.168

Tabla 1. $T(n)$ = número de clases de isomorfismos de n–torneos.

Las matrices de adyacencia de los torneos (4) y (7) en la Figura 1 son, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que si sumamos las entradas de las filas de la matriz de adyacencia de un torneo, entonces obtenemos el vector resultado del torneo; por ejemplo, para las matrices de adyacencia anteriores obtenemos (0,1,2,3) y (1,1,2,2), respectivamente.

Para intentar dar respuesta a nuestra pregunta necesitamos, para un torneo dado, encontrar todos los subtorneos de orden 4, y decidir si ellos son isomorfos o no a los torneos (4) y (7) de la Figura 1. Lo primero que necesitamos hacer es calcular un representante de cada clase de isomorfismo de los torneos, lo cual no es nada sencillo. El libro de Moon [11] contiene esta información para $n \leq 6$, y para $n = 7$ el cálculo fue hecho por Dias en [6]. Para $n \geq 8$ la información no se encontraba disponible en la literatura, y para esto recibimos la colaboración del profesor Brendan McKay, quien ha desarrollado el paquete Nauty [9] para el estudio de isomorfismos entre grafos en general. McKay produjo todas las matrices representantes de cada una las clases de isomorfismo de n–torneos para $n \leq 20$ (ver [10]).

Para determinar cuáles de estas clases correspondían a torneos libres de cono elaboramos un programa en C++; dicho programa descompone un torneo en todos los subtorneos de orden 4 y calcula el vector resultado de cada uno de estos subtorneos. Posteriormente, usando el vector resultado, compara cada uno de estos subtorneos con los torneos de orden 4, o sea (4), (5), (6) y (7) en la Figura 1, para saber si los únicos subtorneos de orden 4 son (4) ó (7). La Tabla 2 contiene los resultados obtenidos para $4 \leq n \leq 20$.

n	$N(n)$
4	2
5	4
6	6
7	10
8	16
9	30
10	52
11	94
12	172
13	316
14	586
15	1096
16	2048
17	3856
18	7286
19	13798
20	26216

Tabla 2. $N(n)$ = número de n–torneos libres de cono.

3. Torneos localmente transitivos

En realidad nuestro interés era encontrar una fórmula para $N(n)$, pero para esto la idea de libre de cono no es la mejor. Esta fórmula fue encontrada por Brouwer en [1], solo que para resolver el problema él usó el concepto de torneo locamente transitivo.

Definición 3.1. Se dice que un torneo $\mathcal{T}$ es localmente transitivo si para cada vértice j los subtorneos $\mathcal{T}^-(j) = \{i \in \mathcal{T} : i \to j\}$ y $\mathcal{T}^+(j) = \{i \in \mathcal{T} : j \to i\}$ son transitivos.

Teorema 3.2. *Un torneo $\mathcal{T}$ es localmente transitivo si y solo si es libre de cono.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{T}$ no es libre de cono; entonces contiene uno de los 4–torneos (5) ó (6) en la Figura 1. Si contiene a (5), entonces hay un vértice j que le gana a los otros tres vértices, es decir que $\mathcal{T}^+(j)$ no es transitivo. Similarmente, si $\mathcal{T}$ contiene a (6), entonces el vértice j que en este caso pierde con los otros tres vértices es tal que $\mathcal{T}^-(j)$ no es transitivo. Por tanto, $\mathcal{T}$ no es localmente transitivo.

Ahora supongamos que $\mathcal{T}$ no es localmente transitivo. Entonces existe un vértice j tal que $\mathcal{T}^-(j)$ ó $\mathcal{T}^+(j)$ no son transitivos. Si es $\mathcal{T}^-(j)$ el que no es transitivo, entonces él contiene un 3–ciclo $i \to k \to l \to i$. Como $i, k, l \in \mathcal{T}^-(j)$, entonces $i \to j$, $k \to j$ y $l \to j$. Es decir, que el torneo formado por los vértices i, k, l, j es el mismo (6) en la Figura 1, y por tanto $\mathcal{T}$ no es libre de cono. ☑

Así pues, el número de torneos libres de cono es igual al número de torneos localmente transitivos. El siguiente teorema fue probado por Brouwer en [1].

Teorema 3.3. *El número de n–torneos localmente transitivos, salvo isomorfismos, está dado por la fórmula*

$$N(n) = \sum_{d|n} \left(\frac{2^{d-1}}{d} \operatorname{odd}\binom{n}{d} \sum_{e|\frac{n}{d}} \frac{\mu(e)}{e} \right), \tag{1}$$

donde μ es la función de Möbius de la teoría clásica de números y $\operatorname{odd}(i)$ *es uno o cero si i es impar o par, respectivamente.*

En [4] hemos probado que esta fórmula puede escribirse en la siguiente forma más simplificada:

$$N(n) = \frac{1}{n} \sum_{q|n} 2^{\frac{n}{q}-1} \operatorname{odd}(q)\ \phi(q), \tag{2}$$

donde ϕ es la función de Euler.

El teorema 3.2 nos dice que para el caso de 4–torneos las clases (4) y (7) en la Figura 1 corresponden a los torneos localmente transitivos. Así, es fácil probar la siguiente proposición.

Proposición 3.4. *Un torneo $\mathcal{T}$ es localmente transitivo si y solo si todo 4–subtorneo de $\mathcal{T}$ es localmente transitivo.*

No presentamos la prueba de esta proposición, porque la haremos más adelante para el caso más general de digrafos.

4. Digrafos localmente transitivos

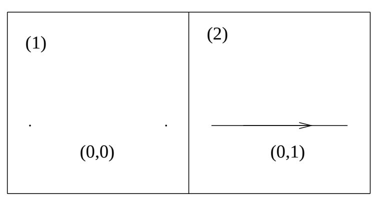

Figura 3. Clases de isomorfismos de 2–digrafos.

En esta última sección presentamos las ideas sobre digrafos localmente transitivos, las cuales fueron introducidas en [20] con el fin de estudiar f–estructuras sobre variedades bandera.

Definición 4.1. Un digrafo es un grafo orientado finito. Esto es, un digrafo es un par $\mathcal{G} = (V, E)$, donde V es el conjunto de vértices y E es el conjunto de aristas o arcos que unen pares de vértices.

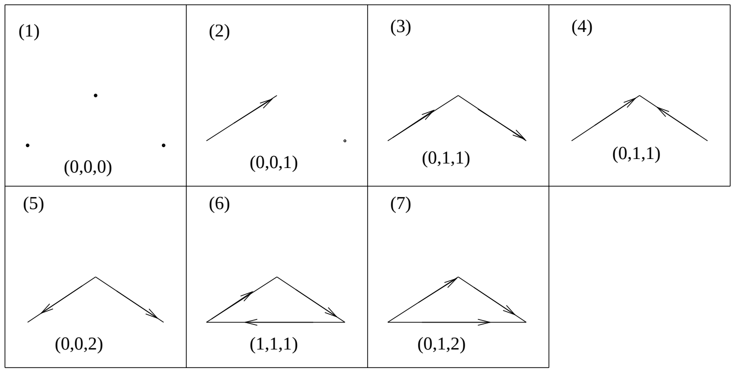

Figura 4. Clases de isomorfismos de 3–digrafos.

Como en el caso de torneos, el símbolo $v \to w$ significará que hay un arco del vértice v al vértice w. El símbolo $v \leftrightarrow w$ quiere decir que $v \to w$ ó $w \to v$. Cuando no haya arcos entre v y w, escribiremos $v \not\leftrightarrow w$.

Dado un digrafo $\mathcal{G} = (V, E)$ y un vértice $v \in V$, definimos los subdigrafos cuyos vértices están determinados por los siguientes subconjuntos de V:

$$\mathcal{G}^+(v) = \{w \in V : v \to w\}, \qquad \mathcal{G}^-(v) = \{w \in V : w \to v\}. \tag{3}$$

Similarmente a los torneos, un digrafo determina un vector resultado $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, donde s_i es la cardinalidad del conjunto de vértices del subdigrafo $\mathcal{G}^+(v_i)$ para algún vértice $v_i \in \mathcal{G}$.

Obviamente, un torneo es un digrafo en el cual siempre entre cada par de vértices hay un arco.

Definición 4.2. Sean $\mathcal{G}_1$ un digrafo con n vértices $\{1, \ldots, n\}$ y $\mathcal{G}_2$ un digrafo con m vértices $\{1, \ldots, m\}$. Un homomorfismo entre $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ es una aplicación $\phi\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ tal que

$$s \to t \quad \text{en} \quad \mathcal{G}_1 \qquad \Longrightarrow \qquad (\phi(s) \to \phi(t) \quad \text{ó} \quad \phi(s) = \phi(t) \quad \text{en} \quad \mathcal{G}_2)$$

y

$$s \not\leftrightarrow t \quad \text{en} \quad \mathcal{G}_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \phi(s) \not\leftrightarrow \phi(t) \quad \text{en} \quad \mathcal{G}_2.$$

Cuando ϕ es biyectiva decimos que $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ son isomorfos.

Los digrafos también pueden clasificarse en clases de isomorfismo, y se obtienen 2 clases de isomorfismos de 2–digrafos, 7 clases de isomorfismos de 3–digrafos y 42 clases de isomorfismos de 4–digrafos. Estas clases de isomorfismo obviamente contienen las clases de isomorfismo que ya conocemos de torneos (ver Figuras 3, 4, 5, 6 y 7).

Definición 4.3. Un digrafo $\mathcal{G} = (V, E)$ es llamado:

1. Trivial, si la cardinalidad del conjunto E es cero.

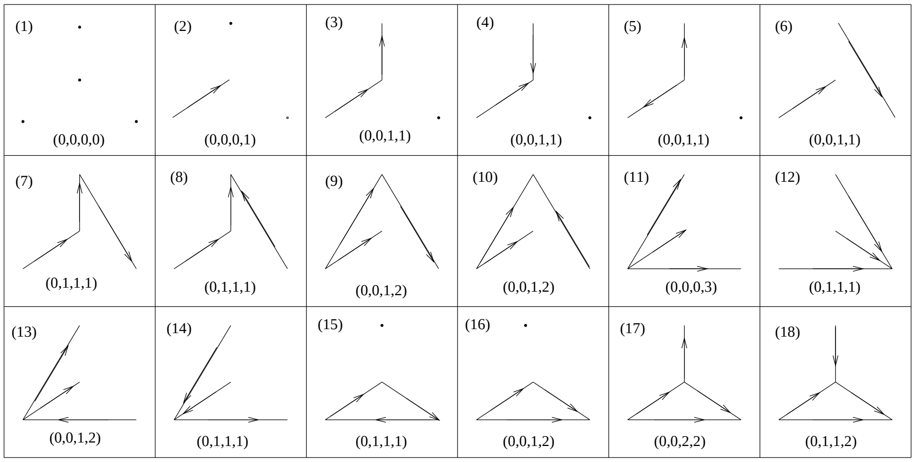

Figura 5. Clases de isomorfismos de 4–digrafos.

2. Transitivo, si la relación "$\to$" es transitiva.

3. Relativamente conexo, si para cualesquiera $i, j, k \in V$ se cumple que $i \to j$ implica que $i \leftrightarrow j$ ó $j \leftrightarrow k$.

4. Localmente transitivo, si para todo $v \in V$, cada uno de los conjuntos $\mathcal{G}^+(v)$ y $\mathcal{G}^-(v)$ es transitivo y relativamente conexo.

El siguiente teorema generaliza la proposición 3.4.

Teorema 4.4. *Un digrafo $\mathcal{G}$ es localmente transitivo si y solo si todo 4–subdigrafo de $\mathcal{G}$ es localmente transitivo.*

Demostración. Si $\mathcal{G}$ es localmente transitivo, entonces todos los subdigrafos de $\mathcal{G}$, en particular los 4–subdigrafos, son localmente transitivos.

Para probar la recíproca, supongamos que $\mathcal{G}$ no es localmente transitivo; entonces existe $v \in V$ tal que uno de los subdigrafos $\mathcal{G}^+(v)$ ó $\mathcal{G}^-(v)$ no es transitivo o no es relativamente conexo. Supongamos que $\mathcal{G}^+(v)$ ó $\mathcal{G}^-(v)$ no es transitivo. Esto quiere decir que existen $j, k, l \in V$ tales que $j \to k$, $k \to l$, pero $j \not\to l$. Si $l \to j$, entonces el 4–subdigrafo de $\mathcal{G}$ determinado por los vértices v, j, k, l es (37) ó (38) en la Figura 7. Si $l \not\to j$, entonces el 4–subdigrafo de $\mathcal{G}$ determinado por los vértices v, j, k, l es (39) ó (40) en la Figura 7. Es decir, que hemos encontrado un 4–subdigrafo de $\mathcal{G}$ que no es localmente transitivo. De forma similar se puede argumentar si suponemos que uno de los subdigrafos $\mathcal{G}^+(v)$ ó $\mathcal{G}^-(v)$ no es relativamente conexo. ☑

Las 7 clases de 3–digrafos en la Figura 4 corresponden a digrafos localmente transitivos. En el caso de los 4–digrafos, del total de las 42 clases las 36 que aparecen en las Figuras 5 y 6 corresponden a digrafos localmente transitivos. Las 6 clases que aparecen en la Figura 7 no son localmente transitivas; de hecho, las clases (37) y (38)

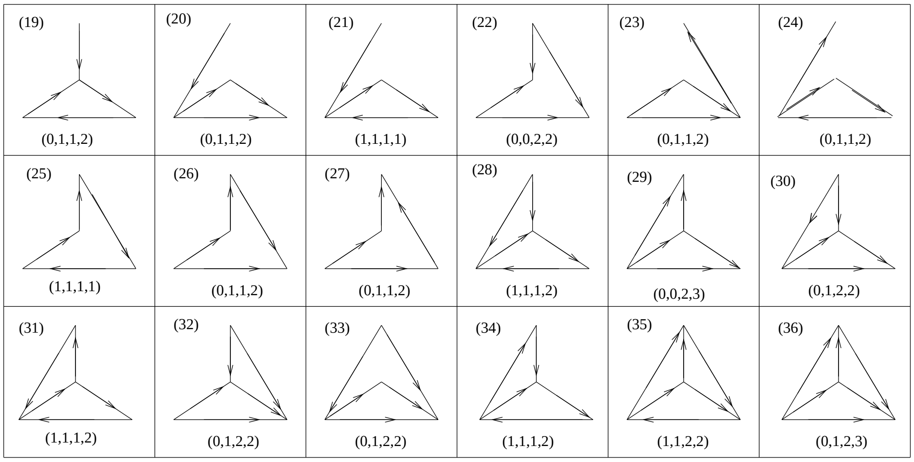

Figura 6. Clases de isomorfismos de 4–digrafos.

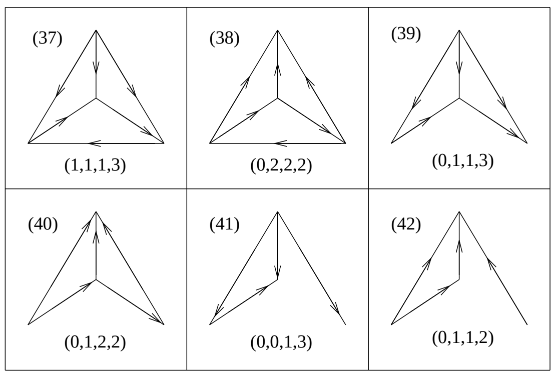

Figura 7. Clases de isomorfismos de 4–digrafos.

corresponden a los 4–torneos no localmente transitivos. En otras palabras, el siguiente lema es verdadero

Lema 4.5. *Un* 4*–digrafo es localmente transitivo si y solo si no es isomorfo a ninguno de los digrafos de la Figura 7.*

Este lema junto con el teorema anterior implica el siguiente resultado, el cual caracteriza los digrafos localmente transitivos para $n \geq 5$.

Teorema 4.6. *Un digrafo con* n *vértices,* $n \geq 5$*, es localmente transitivo si y solo si todo subdigrafo de orden* 4 *no es isomorfo a ninguno de los* 4*–digrafos en la Figura 7.*

Hasta aquí hemos visto que los digrafos localmente transitivos tienen propiedades similares a las de los torneos localmente transitivos. Es deseable entonces poder encontrar una fórmula similar a la ecuación (1) para digrafos localmente transitivos, solo que esta tarea no debe ser nada sencilla, puesto que el número de digrafos crece más rápido que el número de torneos. Es fácil ver que el número de digrafos de orden n es $3^{\binom{n}{2}}$.

La siguiente tabla contiene el número de clases de isomorfismo para digrafos y torneos con $n = 3, 4, 5, 6, 7$ vértices. Hemos puesto esta información junta con el fin de observar lo rápido que crece el número de clases de isomorfismo de digrafos.

n	$D(n)$	$T(n)$
3	7	2
4	42	4
5	582	12
6	21.480	56
7	2'142.288	456

Tabla 3. $D(n)$ = número de clases de isomorfismo de n-digrafos y $T(n)$ = número de clases de isomorfismos de n-torneos.

En [20], se contaó el número de n–digrafos localmente transitivos para $n = 3, 4$. Recientemente, en [8] se calculó el número de 5–digrafos localmente transitivos, obteniéndose que son 326 en total. Para realizar este cálculo se usó el programa Nauty, el cual ya habíamos mencionado anteriormente (ver [9]).

Nuestro interés es completar la siguiente tabla:

n	# Digrafos localmente transitivos	# Torneos localmente transitivos
3	7	2
4	36	2
5	326	4
6	?	6
7	?	10
8	?	16
9	?	30

Eso, sin duda no es una tarea fácil.

Agradecimiento. Este trabajo ha sido financiado parcialmente por Colciencias, contrato No. 240–2001.

Referencias

[1] A. E. Brouwer. "The enumeration of locally transitive tournaments", *Afdeling Zuivere Wiskunde* [Department of Pure Mathematics], **138**. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1980.

[2] N. Cohen, C. J. C. Negreiros & L. A. B. San Martin. "$(1,2)$–Symplectic metrics, flag manifolds and tournaments", *Bull. London Math. Soc.* **34** (2002), 1-9.

[3] N. Cohen, C. J. C. Negreiros & L. A. B. San Martin. "A rank–three condition for invariant $(1,2)$–symplectic almost Hermitian structures on flag manifolds", *Bull. Braz. Math. Soc.* New Series **33**(1) (2002), 49-73.

[4] N. Cohen, M. Paredes & S. Pinzón. "Locally transitive tournaments and $(1,2)$–symplectic metrics on maximal flag manifolds", preprint.

[5] N. Cohen, C. J. C. Negreiros, M. Paredes, S. Pinzón & L. A. B. San Martin. "f–Structures on the classical flag manifold which admit (1,2)–symplectic metrics", preprint.

[6] A. O. Dias. *Invariantes homotópicos em torneios.* Tesis de Maestría, Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 1998.

[7] E. Flórez. *Introducción a la teoría de torneos.* Trabajo de grado, Licenciatura en Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, 2001.

[8] J. S. Fuentes. *Digrafos localmente transitivos.* Trabajo de grado, Licenciatura en Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, 2004.

[9] http://www.cs.anu.edu.au/~bdm/nauty

[10] http://www.cs.anu.edu.au/~bdm/data/digraphs.html

[11] J. W. Moon. *Topics on tournaments.* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968.

[12] M. Paredes. "Torneos y estructuras parabólicas sobre variedades bandera maximales", *Revista Integración*, Vol. **17**, No. 1 (1999), 1-10.

[13] M. Paredes. *Aspectos da geometria complexa das variedades bandeira.* Tesis Doctoral, Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 2000.

[14] M. Paredes. "Some results on the geometry of full flag manifolds and harmonic maps", *Rev. Colombiana Mat.* **34** (2000), 57-89.

[15] M. Paredes. "Families of $(1,2)$–symplectic metrics on full flag manifolds", *Int. J. Math. Math. Sci.* **29** (2002), 651-664.

[16] M. Paredes. “Estabilidad de aplicaciones armónicas definidas sobre una superficie y con valores en una variedad bandera maximal”, por aparecer en *Lecturas Matemáticas*.

[17] M. Paredes, P. González & B. McKay. “Sobre un tipo especial de torneos y una clase de métricas sobre variedades bandera”, en *Memorias de la Primera Conferencia Iberoamericana de Matemática Computacional*, Sociedad Colombiana de Matemáticas, Bogotá, Julio 25 a 27 de 2001.

[18] M. Paredes & S. Pinzón. “Variedades bandera maximales, torneos y aplicaciones armónicas”, *Revista Integración*, Vol **18**, No. 2 (2000), 65–77.

[19] M. Paredes & S. Pinzón. “Geometría hermítica de variedades bandera”, por aparecer en *Lecturas Matemáticas*.

[20] S. Pinzón. *Variedades bandeira, f–estruturas e métricas* $(1, 2)$*–simpléticas*. Tesis Doctoral, Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 2003.

Juana S. Fuentes, Marlio Paredes & Sofía Pinzón
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
A.A. 678, Bucaramanga, Colombia.
e-mail: juanisf_13@yahoo.com.mx, mparedes@uis.edu.co, spinzon@uis.edu.co.