

Comparación de las Cartas de Control Univariadas con Transformación en la Medida de Variabilidad

Comparison of Univariate Control Charts with Transformation in Variability Measure

Roberto José Herrera Acosta*
Adel Alfonso Mendoza Mendoza**
Tomás Fontalvo Herrera***

RESUMEN

El monitoreo de la variabilidad de una característica de calidad mediante cartas de control univariadas en un proceso productivo, es de suma importancia para detectar cambios significativos en este que permitan al ingeniero de control conocer el estado y el comportamiento de esta característica de calidad. Alwan [1] plantea el estudio del mejoramiento de la sensibilidad en las cartas de control univariado mediante la transformación de la medida de variabilidad tomando la transformación de la desviación estándar para las cartas EWMA logarítmica propuesta por Crowder [2] encontrando una mejora de la sensibilidad a los cambios pequeños de la variabilidad. Esta sensibilidad mejora en la propuesta de CUSUM HV que aplica una transformación triparamétrica a la desviación estándar [3] propuesta inicialmente por Castagliola [3].

Palabras clave: Medida de variabilidad, Transformación, Sensibilidad, Simulación R, ARL y Señales de alarma.

ABSTRACT

Monitoring of the variability of a quality feature using univariate control charts in a production process is critical to detect significant changes in order to allow the engineer to control the condition and behavior of that feature. Alwan [1] proposes the study to improve the sensitivity in univariate control charts by transforming the measure of variability transformation taking the standard deviation for the logarithmic EWMA charts proposed by Crowder [2], finding an improvement in sensitivity to small changes in variability. This sensitivity improves in HV CUSUM proposal which applies a transformation to the standard deviation of three parameters [3] first proposed by Castagliola [3].

Key words: Measure of variability, Transformation, Sensitivity, Simulation R, ARL and Alarm signals.

* Grupo de Estadística Industrial, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Kilómetro 7 vía Puerto Colombia, Colombia. robertoherrera@mail.uniatlantico.edu.co

** Grupo de 3i+D, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Kilómetro 7 vía Puerto Colombia, Colombia. adelmendoza@mail.uniatlantico.edu.co

*** Grupo de Calidad y Productividad Organizacional Integral, Universidad de Cartagena, Calle 30 Número 48-152 Cartagena de Indias. tfontalvo@unicartagena.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

En un proceso de producción cuando se monitorean variables continuas es importante la detección de los cambios en la variabilidad de las medidas de localización y variabilidad aplicadas. Por lo general, en el caso univariado se utilizan las cartas de control Shewhart, CUSUM y EWMA, que se construyen asumiendo normalidad e independencia en la medida de localización y de variabilidad.

En caso de que este supuesto no se cumpla, se tendrá una considerable disminución en la sensibilidad de la carta de control para detectar señales de alarma. En este artículo se toman varias modificaciones de las cartas de control univariadas para monitorear la variabilidad, es el caso de las cartas CUSUM HV propuesta por los autores, EWMA transformación logarítmica y S de Shewhart.

Estas modificaciones permitieron sensibilizar la carta de control para cambios pequeños en el proceso. Este trabajo para desarrollar las comparaciones de las cartas utilizó el programa de simulación R, específicamente para cambios en la medida de variabilidad transformada. Como medida de comparación se realizó un conteo de los puntos antes de la primera señal de alarma, calculando el ARL (longitud de corridas promedio) para detectar cuál de las cartas propuestas es más sensible a estos cambios.

2. DETECCIÓN DE SEÑALES DE ALARMA

Por lo general en los procesos industriales las cartas Shewhart, CUSUM y EWMA son las que se consideran como las más importantes para el monitoreo de las características de calidad. Estas cartas se construyen basadas en el supuesto de normalidad e independencia en la medida de localización y de variabilidad. Estos supuestos que en algunos casos no se cumplen y específicamente cuando se toma como estadístico la desviación estándar, lo que genera es un decremento en la señal de alarma dado que la carta de control carece de la sensibilidad en detectar situaciones fuera de control.

Una forma de detectar estos cambios es mediante el número de longitud de corridas (RL), es decir medir el momento en que un subgrupo genera una señal fuera de control. Por lo que se evidencia que el RL es una variable aleatoria que al replicarse este experimento bajo las mismas condiciones, los valores obtenidos de RL son distintos a los calculados con anterioridad, por lo que es necesario evaluar entonces la longitud promedio de corrida (ARL) que es el valor utilizado para realizar las comparaciones en las cartas de control.

3. CRITERIOS DE COMPARACIÓN

Uno de los criterios que es utilizado para determinar la capacidad para que una gráfica detecte en el menor tiempo posible un cambio, es calculando la longitud promedio de corrida (ARL). En este caso se forma un valor inicial de ARL ajustando cada uno de las cartas que se someten a comparación. Se

realiza un incremento de la variabilidad del proceso para las cartas involucradas y se determina el RL, hasta detectar una señal de alarma, calculando los diversos valores de ARL. Estos cambios progresivos de la desviación estándar σ_0 (generalmente estos valores se aumentan en porcentajes del cinco al diez por cien), aplicados para cada una de las cartas involucradas permiten de este modo obtener valores de ARL; escogiendo aquellas cartas que presenten el menor número promedio de longitud de corridas (ARL). La carta de control que logre detectar con mayor rapidez el cambio producido en la desviación estándar, es evidencia concreta de la sensibilidad de la carta bajo las condiciones planteadas en la simulación.

4. CARTAS DE CONTROL UNIVARIADAS

4.1. Cartas de control univariadas de Shewhart

Vargas [4] y Herrera [5] construyen límites a tres desviaciones estándar de la media $\mu_s \pm 3\sigma_s$. Siendo μ_s y σ_s es la medida y la desviación estándar de la estadística S respectivamente. Si se asume normalidad entonces $\frac{S}{c_4}$ estima el carta valor de σ , donde c_4 es una constante que depende del tamaño de la muestra n , siendo σ la desviación estándar de una distribución asumida. $E(S) = c_4\sigma$, se observa claramente que S no es un estimador insesgado de σ .

La desviación estándar S es definida mediante [6],

$\sigma_s = \sigma\sqrt{1-c_4}$ el valor de la constante es,

$$c_4 = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

Los límites de control para la Fase II en las cartas S , son los siguientes,

$$UCL = S_0 + 3\frac{S_0}{c_4}\sqrt{1-c_4^2} = \left(1 + \frac{3}{c_4}\sqrt{1-c_4^2}\right)S_0$$

$$LCL = S_0 - 3\frac{S_0}{c_4}\sqrt{1-c_4^2} = \left(1 - \frac{3}{c_4}\sqrt{1-c_4^2}\right)S_0$$

$$UCL = B_6\sigma \quad LCL = B_5\sigma$$

Las constantes para estos límites se calculan,

$$B_5 = 1 - \frac{3}{c_4}\sqrt{1-c_4^2}$$

$$B_6 = 1 + \frac{3}{c_4}\sqrt{1-c_4^2}$$

Donde los valores de K y λ están sujetos a las propiedades que se desean del valor de ARL fijado, tanto para estados bajo control como estados fuera de control.

4.2. Cartas de control EWMA por transformación logarítmica

Crowder y Hamilton [2] proponen obtener la estadística EWMA para monitorear la dispersión aplicando la variable $Y = \ln(S_t^2)$ donde S_t^2 es la varianza de cada subgrupo. Por lo que el estadístico EWMA es,

$$EWMA_t = \max\{(1-\lambda)EWMA_{t-1} + \lambda Y_t, \ln(\sigma_0^2)\}$$

Donde $EWMA_0 = (\sigma_0^2)$ y λ es una constante de suavizamiento que satisface $0 < \lambda \leq 1$. En la fórmula anterior de EWMA generalmente se asume que el valor de la varianza es $\sigma_0^2 = 1$. También se asume que los valores de $\frac{(n-1)S_t^2}{\sigma^2}$ son variables aleatorias independientes con distribución chi-cuadrado X_{n-1}^2 , o equivalentemente, los valores de S_t^2 son independientes con distribución Gamma [7] $\left\{ \frac{(n-1)}{2}, \frac{2\sigma^2}{(n-1)} \right\}$, n es el tamaño de la muestra y σ^2 es la varianza del proceso.

4.3. Cartas CUSUM HV

Supóngase que se desea monitorear la σ^2 de una característica de calidad tomando una muestra $X_{t,1}, \dots, X_{t,n}$ de n variables independientes normalmente distribuidas, donde μ es la media y σ_0^2 es la desviación estándar objetivo del proceso bajo condiciones normales y t es el número de subgrupos se asume que σ_0^2 es conocido.

Sea S_t^2 la varianza muestral de los t subgrupos, es decir [7],

$$S_t^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{t,j} - \bar{X}_t)^2$$

Donde \bar{X}_t es la media muestra del subgrupo t .

Es conocido que para monitorear la media de un proceso en una carta CUSUM bilateral [8], se utilizan las siguientes estadísticas,

$$S_t^+ = \max\{0, V_t - k^+ + S_{t-1}^+\}$$

$$S_t^- = \max\{0, -V_t - k^- + S_{t-1}^-\}$$

Con $S_0^+, S_0^- \geq 0$, los valores de S_t^+ es usado para incrementos de la media del proceso.

En esta carta de control se emplea la transformación $T_t = a + b \ln(S_t^2 + c)$ propuesta por Castagliola [3], en lugar de V_t .

El estadístico de control que se considera por su simplicidad es [9],

$$S_i = \max\{0, S_{i-1} + (V_i - k)\}$$

k es una constante que sensibiliza la Carta de control CUSUM, generalmente se toma como referencia el valor de 0.5. En la fase inicial se considera $S_0 = 0$ para la estandarización del estadístico, donde $S_0 > 0$, y los valores de a , b y c están definidos como se presentó la carta S^2 EWMA, es decir

$$a = A(n) - 2B(n)\ln\sigma_0 \quad b = B(n) \quad c = C(n)\sigma_0^2$$

Siendo,

$$B(n) = \frac{I}{\sqrt{\ln(w^2 + I)}}$$

$$A(n) = \frac{B(n)}{2} \ln\left(\frac{w^2(w^2 + I)}{\text{Var}(S^2)}\right)$$

$$C(n) = \frac{\sqrt{\text{Var}(S^2)}}{w} - E(S^2)$$

El valor de w se define mediante la presente formulación,

$$w = \left[\sqrt{\left(\frac{\gamma(S^2)}{2}\right)^2 + I} + \left(\frac{\gamma(S^2)}{2}\right) \right]^{\frac{I}{3}} - \left[\sqrt{\left(\frac{\gamma(S^2)}{2}\right)^2 + I} - \left(\frac{\gamma(S^2)}{2}\right) \right]^{\frac{I}{3}}$$

Esta transformación $T = A(n) + B(n)\ln\{S^2 + C(n)\}$ se aproxima a una distribución normal estándar $N(0, 1)$, por lo tanto el primer valor de S_0 se define como,

$$S_0 = E[V_i]$$

Los nuevos estadísticos para la Carta CUSUM HV son en su orden,

$$S_i^+ = \max\{0, Z_i - k^+ + A(n) + B(n)\ln\{I + C(n)\}\}$$

$$S_i^- = \max\{0, -Z_i - k^+ + A(n) + B(n)\ln\{I + C(n)\}\}$$

5. RESULTADOS OBTENIDOS

En la Tabla número 1 se muestran los resultados de la simulación de un cambio en la medida de variabilidad desde el 0% hasta el 23% de incremento. Obsérvese que las propuestas de EWMA de Transformación logarítmica y CUSUM HV presentan la mayor sensibilidad a los cambios pequeños de la medida de variabilidad.

Tabla 1. Comparación de las ARL

δ	S de Shewhart	EWMA transformación logarítmica	CUSUM HV
0.00	200.12	203.48	201.82
0.05	105.99	74.98	88.74
0.10	66.93	33.49	42.37
0.15	38.67	20.83	21.43
0.16	35.56	18.64	18.77
0.17	32.62	16.65	16.37
0.18	30.10	14.97	14.24
0.19	27.83	13.54	12.50
0.20	25.72	12.30	10.99
0.21	23.86	11.22	9.66
0.22	22.24	10.28	8.52
0.23	20.74	9.46	7.46

6. CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en este trabajo indican que la Carta CUSUM HV en el monitoreo de la dispersión es considerablemente más sensible al incremento de la dispersión que los esquemas tradicionales R y S . En donde los parámetros de la transformación propuesta son sencillos de obtener por métodos numéricos y permiten asumir un comportamiento aproximadamente normal estándar para la distribución de una función de la varianza muestral.

Presenta además mayor sensibilidad en detectar señales de alarma que el esquema EWMA propuesto por Castagliola [3].

Por ejemplo, cuando el incremento es por lo menos 18% de la varianza objetivo, se presenta mayor eficiencia en la detección de señales fuera de control en la carta CUSUM HV con 14.24 que en la carta EWMA con transformación logarítmica con 14.97 y la carta tradicional de Shewhart que tiene un RL de 30.10.

Se recomienda estudiar la sensibilidad de la Carta CUSUM HV cuando se apliquen límites de control de respuesta rápida FIR [10 - 11], así como también cuando el incremento de la variabilidad se realice de manera continua.

AGRADECIMIENTOS

Agradecimientos a las universidades públicas: Universidad del Atlántico y Universidad de Cartagena.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] L. Alwan, *Statistical process analysis*, McGraw-Hill, 2000.
- [2] S. W. Crowder y M. Hamilton, "An ewma for monitoring a process standard deviation", *Journal of Quality*, n°. 24, 1992.
- [3] P. A. Castagliola, "New ewma control chart for monitoring the process variance", *Quality and Reliability Engineering International*, n°. 1, pp. 781-794, 2005.
- [4] J. A. Vargas, *Control Estadístico de Calidad*, Unibiblos, 2007.
- [5] R. J. Herrera, *Seis Sigma Métodos Estadísticos y sus Aplicaciones*, Ecoe Ediciones, 2006.
- [6] D. Montgomery, *Introduction to Statistical Quality Control*, 2001.
- [7] F. Bacelli, G. Cohen, G.J. Olsder, J.P. Quadrat, C. Acosta, J. Mejia, J. Pignatello, V. Reo. "A comparison of control charting procedures for monitoring process dispersión", *IIE Transactions*, n°. 31, pp. 569-579, 1999.
- [8] D. Hawkins, *A cusum for a scale parameter*, Wiley, 1981.
- [9] T. Chang, y F. Gan, "Accumulative sum control chart for monitoring process variance", *Journal of Quality Technology*, n°. 27, pp. 109-119, 1995.
- [10] J. F. Lawless, *Statistical models and methods for lifetime data*, John Wiley & Sons, 1982.
- [11] N.L. Johson, N. Balakrishnan, "Continuous univariate distributions", *Journal of Quality Technology*, n°. 13, pp. 228-231, 1994.