

Suárez, Chaves y Fernández. 2017. De las fórmulas fundamentales en la trigonometría esférica a las fórmulas fundamentales de la trigonometría hiperbólica. Revista Sigma, 13 (2). Pág. 1-15.

<http://coes.udenar.edu.co/revistasigma/articulosXIII/2.pdf>

## REVISTA SIGMA

Departamento de Matemáticas

*Universidad de Nariño*

Volumen XIII N<sup>o</sup>2 (2017), páginas 1–15

# De las fórmulas fundamentales en la trigonometría esférica a las fórmulas fundamentales de la trigonometría hiperbólica

Marcos Fidel Suárez Portilla <sup>2</sup><sup>1</sup>

Andrés Chaves Beltrán <sup>1</sup><sup>2</sup>

Edinsson Fernández Mosquera <sup>3</sup><sup>3</sup>

Abstract.

This article presents a way to move from the fundamental formulas of Spherical Trigonometry to the fundamental formulas of hyperbolic Trigonometry.

*Keywords.* Euclidean Geometry, Non-Euclidean Geometry, Spherical Trigonometry, Hyperbolic Trigonometry.

Resumen.

Se presenta una manera de pasar de las fórmulas fundamentales de la Trigonometría Esférica a las fórmulas fundamentales de la Trigonometría hiperbólica.

*Palabras Clave.* Geometría Euclidiana, Geometría No Euclidiana, Trigonometría Esférica, Trigonometría Hiperbólica.

---

## 1. Introducción

La Trigonometría Esférica y Trigonometría Hiperbólica, son temas poco tratados en las licenciaturas en matemáticas. Con este artículo se busca las bases de la trigonometría en una superficie como la esfera, para luego conectarlo, de manera algebraica con la trigonometría hiperbólica. Lo anterior permite diferenciar un aspecto de la práctica matemática del siglo XIX con la práctica actual, ya que en el Siglo XIX no se aceptó el paso de lo físico a lo imaginario, mientras que actualmente sí podría ser aceptado matemáticamente.

La Geometría Euclidiana expuesta en los *elementos* de Euclides, que tiene como base cinco postulados<sup>4</sup>, es una recopilación de Euclides a la geometría conocida en la época, la

<sup>1</sup>Universidad de Nariño, email: marcosuarez2@gmail.com

<sup>2</sup>Universidad de Nariño, email: anbel@yahoo.es

<sup>3</sup>Universidad de Nariño, email: edy454@yahoo.es

<sup>4</sup>Estos cinco postulados son conocidos como los Postulados de Euclides, que son:

cual fue desarrollada a partir de una axiomática-deductiva, y fue considerada la que mejor representaba el espacio en que vivimos por más de XX siglos.

A partir de la controversia generada por el V Postulado de Euclides, que debatía si podría ser considerado como postulado o teorema, se generaron otras geometrías conocidas como Geometrías No Euclidianas.<sup>5</sup> En las GNEs se encuentra como casos particulares a dos tipos, la Geometría Hiperbólica y la Geometría Elíptica.

Aunque aspectos de la Geometría Elíptica fueron utilizados antes de la Geometría Hiperbólica y del descubrimiento teórico de las GNEs en general, la Geometría Hiperbólica se descubrió y consolidó teóricamente antes que la Geometría Elíptica. En el camino de estos descubrimientos, en [5, p. 57] y [3, p. 51] se menciona que, Johann Heinrich Lambert (1728-1777) al observar las fórmulas de área en la Geometría Esférica y en la Geometría Hiperbólica, expresa la siguiente idea; “de ello debería casi sacar la conclusión de que la tercera hipótesis se verifica sobre una esfera de radio imaginario”<sup>6</sup>. De esta manera Lambert sugirió implícitamente el paso a la Geometría Hiperbólica por medio de la Geometría Esférica en una esfera de radio imaginario.

En [4, p. 1] dice que la manera como se descubrieron las GNEs, difiere de la manera como se presentan. Donde se cree que, la manera del descubrimiento de las GNEs, en particular de la Geometría Hiperbólica surgió a partir de remplazar el radio real  $R$  en una esfera por un radio imaginario  $iR$ , donde  $i$  es  $\sqrt{-1}$ .

Lo que se presenta a continuación, tiene como base el tercer capítulo de la tesis titulada *De la Trigonometría Esférica a la Trigonometría Hiperbólica: Aspectos del surgimiento de las Geometrías No Euclidianas* [8].

## 2. De la Trigonometría Esférica a la Trigonometría Hiperbólica

Para intentar observar el paso de la Geometría Esférica a la Geometría Hiperbólica, en esta sección se ilustrará que, a partir de las fórmulas fundamentales de la Trigonometría Esférica se puede llegar a las fórmulas fundamentales de la Trigonometría Hiperbólica. Las fórmulas a las que se hace referencia, son las fórmulas de senos y cosenos, las cuales son relaciones entre ángulos y lados de triángulos. Estas relaciones en la Trigonometría Esférica se las conoce como fórmulas de Bessel, ya que fueron descubiertas por primera vez por el matemático Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846). previo a ello, para un mejor entendimiento téngase en cuenta algunos conceptos en la Geometría del espacio.

---

**I Postulado.** Dos puntos cualesquiera determinan un segmento de recta.

**II Postulado.** Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.

**III Postulado.** Se puede trazar una circunferencia dados cualquier punto como centro y un radio cualquiera.

**IV Postulado.** Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

**V Postulado.** *Postulado de las paralelas:* Si una línea recta corta a otras dos, de tal manera que la suma de los dos ángulos interiores del mismo lado sea menor que dos rectos, las otras dos rectas se cortan, al prolongarlas, por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

<sup>5</sup>En adelante se nombrará GE a la Geometría Euclidiana, GNEs a las Geometrías No Euclidianas y GNE a alguna Geometría No Euclidiana en particular.

<sup>6</sup>Para abordar el Problema del V Postulado, Saccheri[7] desarrollo tres hipótesis, la primera referente a la Geometría Euclidiana, la segunda a la Geometría elíptica y la tercera es la base de la Geometría hiperbólica; quien las nombro por sus siglas HAR, HAO e HAA, respectivamente. Para un diferente entendimiento al respecto observar [8, pp. 9-21].

## 2.1. Definiciones en Geometría del Espacio

Es de importancia el entendimiento de las siguientes definiciones, ya que, el paso de las fórmulas fundamentales de la trigonometría esférica a las fórmulas fundamentales de la geometría hiperbólica, se desarrolló bajo la utilización del espacio tridimensional.

En primer lugar, se debe tener en cuenta que, si una recta es perpendicular a dos rectas que la intersecan en un mismo punto, es perpendicular al plano comprendido por las dos rectas, además toda recta de este plano que pase por el punto de intersección será perpendicular a la recta dada y el punto de intersección es el pie de la recta perpendicular al plano (ver figura 1).

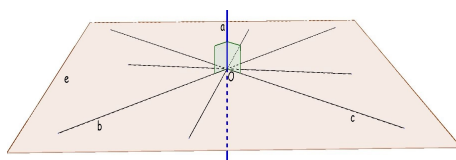


Figura 1: Perpendicularidad de la recta y el plano

### Definición 2.1 (Ángulos diedros). <sup>7</sup>

Cuando dos planos tienen una sola recta en común se determina cuatro regiones del espacio comprendidas entre dos semiplanos llamadas *ángulos diedros*. Aquí, se considerará el que se observa entre los semiplanos  $a$  y  $b$  y se nombrará como  $A - \widehat{BC} - D$  representado en la figura 2. La recta de intersección  $BC$  recibe el nombre de *arista* del ángulo diedro y los semiplanos respecto a la recta de división  $BC$  y que contienen a los puntos  $A$  y  $D$  se llaman *caras* del ángulo diedro, designadas de igual manera como las caras  $a$  y  $b$  del ángulo diedro. Se llama ángulo correspondiente al diedro, al ángulo formado por dos rectas en cada cara y cada una de ellas es perpendicular a la arista en un mismo punto. Así, siendo  $EF$  y  $EH$  perpendiculares a la arista  $BC$ , el ángulo  $\widehat{FEH}$  es el ángulo del diedro  $A - \widehat{BC} - D$ .

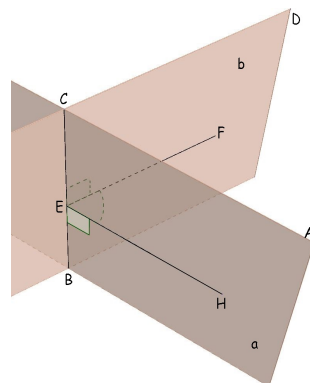


Figura 2: Ángulos diedros.

### Definición 2.2 (Ángulos triedros).

Cuando tres planos tienen un solo punto en común se determinan ocho regiones del espacio llamadas *ángulos triedros*. Estos ángulos triedros están comprendidos entre tres porciones de planos unidos dos a dos por semirrectas.

<sup>7</sup>Estas definiciones tienen como base de estudio, los libros *Trigonometría plana y esférica: teoría y 680 problemas resueltos* [1, pp. 144-162] y *Trigonometría esférica: fundamentos* [2, pp. 5-23].

Las porciones de planos que comprenden el ángulo triedro se llaman *caras* del ángulo triedro. Así, aquí se considera el ángulo triedro comprendido por las caras  $a$ ,  $b$  y  $c$ , que a la vez están unidas dos a dos con semirrectas llamadas *aristas* del ángulo triedro y designadas como las aristas  $OA$ ,  $OB$  y  $OC$ , el punto en común  $O$  de los tres planos es el *vértice* del ángulo triedro, y el ángulo triedro se designa como el ángulo triedro  $O - \widehat{ABC}$ , como se representa en la figura 3.

Las caras  $a$ ,  $b$  y  $c$  del ángulo triedro toman como sus medidas los ángulos planos  $\widehat{BOC}$ ,  $\widehat{AOC}$ ,  $\widehat{AOB}$  respectivamente. La medida del ángulo de cada cara es siempre menor que  $180^\circ$ . En un ángulo triedro, cada dos caras contiene un ángulo diedro, que en total se tienen tres ángulos diedros donde su medida es siempre menor que  $180^\circ$ , se designan mediante las letras  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  y  $\widehat{C}$ , y cada ángulos diedros es opuestos a las caras  $a$ ,  $b$  y  $c$  respectivamente.

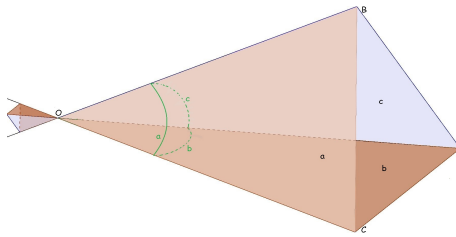


Figura 3: Ángulos triedros.

**Definición 2.3 (Circunferencias máximas y menores).**

La intersección de un plano y una superficie esférica es una circunferencia. Si el plano secante pasa por el centro  $O$  de la esfera, la anterior intersección recibe el nombre de *circunferencia máxima*; en los demás casos, se llama *circunferencia menor*, como se representa en la figura 4. Los extremos del diámetro perpendicular al plano de las circunferencias (máximas o menores) reciben el nombre de *polos* de tales circunferencias, que en la figura 4 se los designa como los puntos  $P$  y  $P'$ .

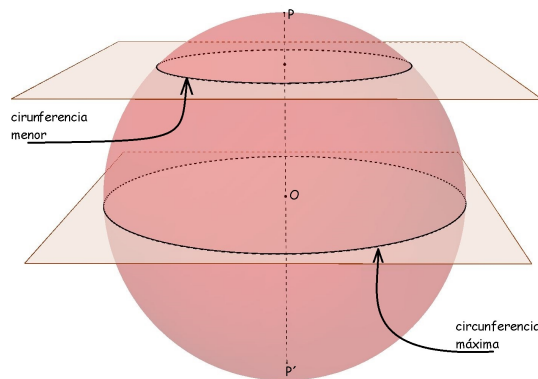


Figura 4: Circunferencias máximas y menores.

**Definición 2.4 (Distancia esférica).**

Sea  $A$  y  $B$  dos puntos en la esfera no diametralmente opuestos, entonces entre ellos pasara una sola circunferencia máxima y su *distancia esférica* está dada por la medida del menor arco entre los puntos  $A$  y  $B$  de la circunferencia máxima que los contiene, el cual su medida

o distancia del arco  $AB$  es la del ángulo plano  $\widehat{AOB}$ , donde el punto  $O$  es el centro de la esfera (ver figura 5).

Por ejemplo: dos puntos en una esfera que son extremos de un diámetro pertenecen a infinitas circunferencias máximas y su distancia es  $180^\circ$ .

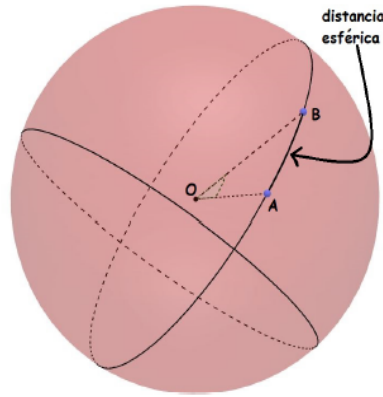


Figura 5: Distancia esférica.

**Definición 2.5 (Ángulo esférico).**

Dos circunferencias máximas siempre se cortan en los extremos de un diámetro. La abertura sobre la superficie esférica de tales circunferencias se denomina *ángulo esférico* como se observa en la figura 6.

En la esfera con centro el punto  $O$  en la figura 6, los arcos de circunferencia máxima  $PA$  y  $PB$  que contienen el ángulo esférico son los *lados* del ángulo esférico, y el punto  $P$  de intersección de los arcos es el *vértice*. La medida del ángulo esférico corresponde a la medida del ángulo diedro formado por los semiplanos correspondientes a los lados del ángulo esférico y el diámetro con extremo el vértice del ángulo esférico.

Dada la circunferencia máxima que pasa por  $A$  y  $B$  y tenga como polo el punto  $P$ , se tendrá que, la medida del arco  $AB$  de circunferencia máxima está dado por la medida del ángulo plano  $\widehat{AOB}$ , que corresponde a la medida del ángulo diedro  $A - PO - B$  y esta medida a la vez con la medida del ángulo esférico  $\widehat{APB}$ . Así, la medida de un ángulo esférico está dada por la medida o distancia esférica del arco sobre la circunferencia máxima de polo el vértice del ángulo esférico y que une los lados del ángulo esférico por su interior.

**Definición 2.6 (Triángulos esféricos).**

La región de la superficie esférica limitada por tres arcos de circunferencia máxima que se cortan dos a dos se denomina *triángulo esférico*.

Los tres arcos  $AB$ ,  $BC$  y  $CA$  del triángulo esférico  $ABC$  se denominan *lados* del triángulo esférico y se designan por  $c$ ,  $a$  y  $b$  respectivamente. Los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , donde se intersecan las circunferencias máximas son los *vértices del triángulo esférico*, los cuales son opuestos a los lados  $a$ ,  $b$  y  $c$  respectivamente, como se observa en la figura 7. La designación  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  y  $\widehat{C}$  también será utilizada para nombrar el ángulo correspondiente a su vértice.

La medida de cada ángulo de un triángulo esférico, está dada por la medida del ángulo diedro correspondiente. Es decir, el ángulo  $\widehat{A}$  en el triángulo esférico  $ABC$  está dado por la medida del ángulo diedro  $B - AO - C$ . Ver figura 7.

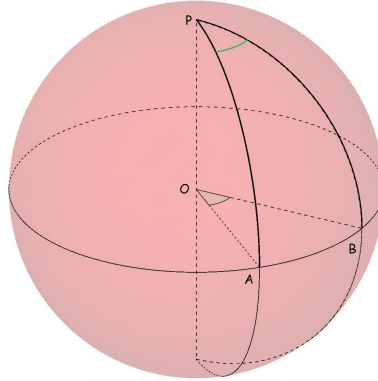


Figura 6: Ángulo esférico  $APB$ .

La región comprendida entre las proyecciones de los lados  $a$ ,  $b$  y  $c$  del triángulo esférico con el centro  $O$  de la esfera forma el ángulo triedro  $O - \widehat{ABC}$  como se observa en la figura 7. Los lados de un triángulo esférico, siendo arcos de circunferencias máximas, son expresados normalmente en unidades angulares. De esta manera, los lados  $a$ ,  $b$ , y  $c$  del triángulo esférico se miden por los ángulos planos  $\widehat{BOC}$ ,  $\widehat{COA}$  y  $\widehat{AOB}$  respectivamente de las caras del ángulo triedro  $O - \widehat{ABC}$ .

Observando un ángulo triedro correspondiente a un triángulo esférico, los ángulos de las caras y los ángulos diedros no se alteran en magnitud modificando el radio de la esfera. De esta manera y según lo expuesto hasta este momento, a cada propiedad de los ángulos triedros le corresponde una propiedad análoga en los triángulos esféricos, y recíprocamente. Por lo tanto las relaciones entre los lados y ángulos en un triángulo esférico observado de esta manera son independientes del radio de la esfera, de las cuales algunas relaciones serán trabajadas en el apartado 2.3, más específicamente en el desarrollo de las llamadas fórmulas de Bessel.<sup>8</sup>

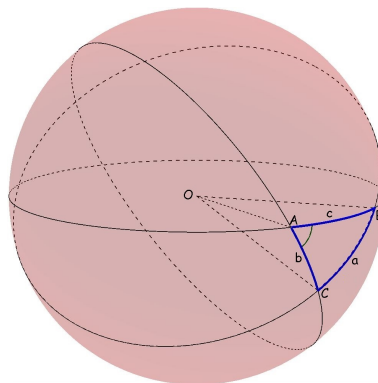


Figura 7: Triángulos esféricos  $ABC$ .

**Definición 2.7 (Triángulos esféricos polares).**

Dado un triángulo esférico  $ABC$  de lados  $a$ ,  $b$  y  $c$ . La unión de los polos correspondientes a las circunferencias máximas que contienen a los lados  $a$ ,  $b$ , y  $c$ , donde cada polo se encuentra

<sup>8</sup>Téngase en cuenta que en casos como, obtener la dimensión lineal (longitud) de un lado en un triángulo esférico, si es necesario conocer el radio de la esfera que lo contiene.

más cerca del vértice opuesto al lado utilizado para encontrar dicho polo, forma un triángulo esférico llamado *triángulo esférico polar* o *triangulo polar*.

En la figura 8, los radios  $OC'$ ,  $OA'$  y  $OB'$  son perpendiculares a los planos que pasa por los puntos  $O, A, B$ ;  $O, B, C$ ; y  $O, A, C$ , respectivamente.

Los elementos de un triángulo polar se nombrarán de la siguiente manera. Dada la circunferencia máxima que contiene al lado  $AB$ , su polo más cerca de  $C$  será  $C'$ ; dada la circunferencia máxima que contiene al lado  $BC$ , su polo más cerca de  $A$  será  $A'$ ; dada la circunferencia máxima que contiene al lado  $CA$ , su polo más cerca de  $B$  será  $B'$ . Así el triángulo esférico polar del triángulo esférico  $ABC$  es  $A'B'C'$  de lados  $a'$ ,  $b'$  y  $c'$  respectivamente a su vértice opuesto.

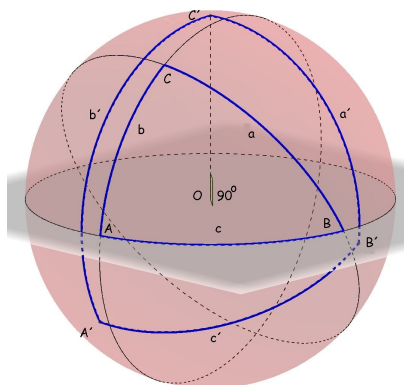


Figura 8: Triángulos esféricos polares.

## 2.2. Propiedades y teoremas en triángulos esféricos

Aunque las propiedades de los ángulos triedros no han sido expuestas en este trabajo, no son difíciles de deducir a partir de las propiedades de los triángulos esféricos que se exponen a continuación.

1. Cualquier lado de un triángulo esférico es menor que una semicircunferencia, es decir menor que  $180^\circ$ .

$$a < 180^\circ$$

2. Cualquier ángulo esférico es menor que  $180^\circ$ .

$$\widehat{A} < 180^\circ$$

3. Cada lado del triángulo esférico es menor que la suma de los otros dos y mayor que el módulo de su diferencia.

$$|a - b| < c < a + b$$

4. La suma de los lados de un triángulo esférico es menor que cuatro ángulos rectos

$$a + b + c < 360^\circ$$

La expresión  $360^\circ - (a + b + c)$  se llama *defecto esférico*.

5. En un triángulo esférico, si dos lados son iguales, los ángulos opuestos son iguales, y recíprocamente.

$$a = b \iff \widehat{A} = \widehat{B}$$

6. En un triángulo esférico, si dos lados son desiguales, los ángulos opuestos son desiguales, a mayor lado se opone mayor ángulo y recíprocamente.

$$a > b \iff \widehat{A} > \widehat{B}$$

7. La suma de los tres ángulos en un triángulo esférico es mayor que dos ángulos rectos y menor que seis ángulos rectos.

$$180^\circ < \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 540^\circ$$

El exceso en la suma del valor de los tres ángulos esféricos en un triángulo esférico con respecto a  $180^\circ$ , se llama *exceso esférico*.

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - 180^\circ$  es el exceso esférico y se lo representa por  $E$ .

Véase dos Teoremas correspondientes a triángulos esféricos.

Si el triángulo esférico  $ABC$  tiene como triángulo polar  $A'B'C'$  entonces  $ABC$  es triángulo polar del  $A'B'C'$ .

Dado un triángulo esférico y su triángulo polar, cada ángulo esférico de cualquiera de los triángulos dados es igual al suplemento del lado correspondiente del otro triángulo. Es decir, dado el triángulo esférico  $ABC$  y su triángulo polar  $A'B'C'$ , se tiene que,

$$\begin{aligned} \widehat{A} &= 180^\circ - a' & \widehat{B} &= 180^\circ - b' & \widehat{C} &= 180^\circ - c' \\ \widehat{A}' &= 180^\circ - a & \widehat{B}' &= 180^\circ - b & \widehat{C}' &= 180^\circ - c \end{aligned}$$

### 2.3. Fórmulas fundamentales de la Trigonometría Esférica

Los apartados anteriores 2.1 y 2.2 son necesarios para entender las fórmulas de senos y cosenos de la Trigonometría Esférica o también conocidas como las Fórmulas de Bessel.

**Teorema del seno:** El seno de cada lado es directamente proporcional al seno de cada ángulo opuesto en un triángulo esférico. De otra forma,  $\frac{\text{sen } a}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } \widehat{B}} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } \widehat{C}}$ , (ver figura 9).

Sobre una esfera de centro  $O$ , determínese un triángulo esférico  $ABC$  cuyos lados  $a$  y  $b$  sean menores que  $90^\circ$ . Únase  $O$  con los vértices del triángulo para formar el ángulo triedro  $O-\widehat{ABC}$ . Por  $C$  pasa una circunferencia máxima que corta perpendicularmente en  $H$  a la circunferencia máxima que pasa por el arco  $AB$ . Sea  $CH = h_c$  el cual se llama altura esférica del triángulo (ver figura 9).

Proyéctese ortogonalmente el vértice  $C$  sobre el plano  $OAB$  en  $P$ , y  $P$  sobre las rectas  $OA$  en  $N$  y  $OB$  en  $M$ , únase el vértice  $C$  con  $M$  y  $N$ . Se obtiene así los triángulos rectángulos planos  $CPN$  y  $CPM$  rectos en  $P$ .

Obsérvese, como la recta  $CP$  es ortogonal al plano  $OAB$  también es perpendicular a  $OA$ . De esta manera, en el triángulo plano  $CPN$  por contener dos perpendiculares a  $OA$ ,<sup>9</sup> la recta  $CN$  también es perpendicular a  $OA$ , de manera análoga la recta  $CM$  es perpendicular a la recta  $OB$ . Se obtiene así los triángulos rectos planos  $CNO$  y  $CMO$  rectos en  $N$  y  $M$  respectivamente.

Obsérvese que el ángulo plano  $\widehat{CNP}$  es correspondiente al ángulo diedro  $C-\widehat{OA}-B$ , el cual sirve de medida al ángulo esférico  $\widehat{A}$  del triángulo esférico. Por tanto, de los triángulos  $CPN$  y  $CPM$  se tiene:

$$\text{sen } \widehat{A} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CN}} \longrightarrow \overline{CP} = \overline{CN} * \text{sen } \widehat{A}$$

---

<sup>9</sup>A saber la rectas perpendiculares a  $OA$  son  $CP$  y  $NP$ .



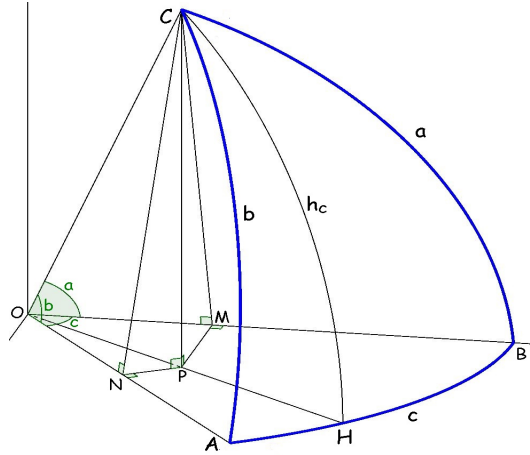


Figura 9: Triángulos esféricos  $ABC$  y su correspondiente ángulo triedro  $O - \widehat{ABC}$ .

$$\text{sen } \widehat{B} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CM}} \rightarrow \overline{CP} = \overline{CM} * \text{sen } \widehat{B}$$

Igualando ambas ecuaciones

$$\overline{CN} * \text{sen } \widehat{A} = \overline{CM} * \text{sen } \widehat{B} \quad (2.1)$$

Por otro lado, la medida de los lados  $AC$  y  $BC$  son las de los ángulos planos  $\widehat{AOC}$  y  $\widehat{BOC}$  respectivamente, que a la vez corresponden con los ángulos planos de vértice  $O$  en los triángulos  $CNO$  y  $CMO$  respectivamente, obteniendo que:

$$\text{sen } a = \frac{\overline{CM}}{\overline{OC}} \rightarrow \overline{CM} = \overline{OC} * \text{sen } a$$

$$\text{sen } b = \frac{\overline{CN}}{\overline{OC}} \rightarrow \overline{CN} = \overline{OC} * \text{sen } b$$

Sustituyendo  $\overline{CN}$  y  $\overline{CM}$  en la ecuación 2.1, se sigue

$$\overline{OC} * \text{sen } b * \text{sen } \widehat{A} = \overline{OC} * \text{sen } a * \text{sen } \widehat{B}$$

Simplificando por  $\overline{OC} \neq 0$ ,

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } \widehat{B}}$$

Trazando la altura esférica  $h_a$  sobre el lado  $a$ , se probaría la relación  $\frac{\text{sen } b}{\text{sen } \widehat{B}} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } \widehat{C}}$ , y por tanto, el primer grupo de fórmulas de Bessel es:

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } \widehat{B}} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } \widehat{C}}$$

Como en un triángulo esférico se tiene tres lados, tres ángulos opuestos a cada lado y por su proporcionalidad directa, la razón del seno de cualquier lado y el seno de su ángulo opuesto es igual a cada una de las otras dos razones; esta relación permite calcular un lado o un ángulo, conocido su ángulo o lado puesto, y otro par de elementos opuestos.

**Teorema del coseno para los lados:** El coseno de cada lado es igual al producto de los cosenos de los otros dos lados, más el producto de los senos de dichos lados por el coseno del ángulo comprendido en un triángulo esférico. De otra forma, ver figura 9 y 10:

$$\cos a = \cos b * \cos c + \operatorname{sen} b * \operatorname{sen} c * \cos \hat{A}$$

$$\cos b = \cos a * \cos c + \operatorname{sen} a * \operatorname{sen} c * \cos \hat{B}$$

$$\cos c = \cos a * \cos b + \operatorname{sen} a * \operatorname{sen} b * \cos \hat{C}$$

De los triángulos  $CNO$  y  $CPN$  de la figura precedente se tiene:

$$\overline{CN} = \overline{OC} * \operatorname{sen} b$$

$$\overline{NP} = \overline{CN} * \cos \hat{A}$$

Remplazando  $\overline{CN}$  se obtiene

$$\overline{NP} = \overline{OC} * \operatorname{sen} b * \cos \hat{A} \quad (2.2)$$

En la figura 9 observando la construcción sobre el plano  $OAB$  luego de las siguientes proyecciones; teniendo que  $OM$ , es igual a la suma de las proyecciones de las componentes  $ON$ ,  $NP$ , y  $PM$  sobre la recta  $OB$ , sea  $G$  y  $M$  las proyecciones de  $N$  y  $P$  respectivamente en la recta  $OB$  y  $J$  la proyección de  $P$  sobre  $NG$  (ver figura 10). Se sigue que:

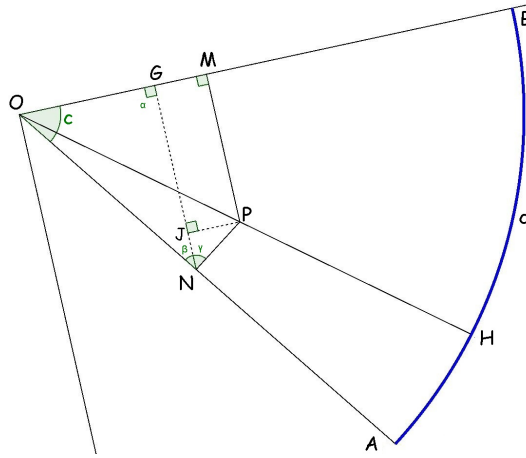


Figura 10: sobre el plano  $OAB$  de la construcción 9

$$\overline{OM} = \overline{OG} + \overline{GM} \quad (2.3)$$

De los triángulos planos  $CMO$ ,  $CNO$  de la figura 9, y del triángulo  $GNO$  de la figura 10, se tiene

$$\overline{OM} = \overline{OC} * \cos a$$

$$\overline{OG} = \overline{ON} * \cos c = \overline{OC} * \cos b * \cos c$$

Dado que el ángulo  $AOB$  tienen medida  $c$  y  $\alpha = 90^\circ$  se tiene  $\beta = 90^\circ - c$ , y como  $\beta + \gamma = 90^\circ$ , se tiene que  $\gamma = c$ . además, teniendo en cuenta la ecuación 2.2;

$$\overline{GM} = \overline{JP} = \overline{NP} * \text{sen } c = \overline{OC} * \text{sen } b * \cos \widehat{A} * \text{sen } c$$

Por lo tanto, reemplazando  $\overline{OM}$ ,  $\overline{OG}$  y  $\overline{GM}$  en la ecuación 2.3;

$$\overline{OC} * \cos a = \overline{OC} * \cos b * \cos c + \overline{OC} * \text{sen } b * \text{sen } c * \cos \widehat{A}$$

Y simplificando por  $\overline{OC} \neq 0$ , se obtiene;

$$\cos a = \cos b * \cos c + \text{sen } b * \text{sen } c * \cos \widehat{A}$$

Análogamente para los cosenos de los lados  $b$  y  $c$ .

Por lo tanto el segundo grupo de fórmulas de Bessel, que permite calcular un lado conocido el ángulo opuesto y los lados que los comprenden, o bien, un ángulo conocidos los tres lados, es:

$$\cos a = \cos b * \cos c + \text{sen } b * \text{sen } c * \cos \widehat{A}$$

$$\cos b = \cos a * \cos c + \text{sen } a * \text{sen } c * \cos \widehat{B}$$

$$\cos c = \cos a * \cos b + \text{sen } a * \text{sen } b * \cos \widehat{C}$$

**Teorema del coseno para los ángulos:** El coseno de cada ángulo es igual a menos el producto de los cosenos de los otros dos ángulos, más el producto de los senos de dichos ángulos por el coseno del lado comprendido en un triángulo esférico. De otra forma, ver figura 9:

$$\cos \widehat{A} = -\cos \widehat{B} * \cos \widehat{C} + \text{sen } \widehat{B} * \text{sen } \widehat{C} * \cos a$$

$$\cos \widehat{B} = -\cos \widehat{A} * \cos \widehat{C} + \text{sen } \widehat{A} * \text{sen } \widehat{C} * \cos b$$

$$\cos \widehat{C} = -\cos \widehat{A} * \cos \widehat{B} + \text{sen } \widehat{A} * \text{sen } \widehat{B} * \cos c$$

Considérese el triángulo polar  $A'B'C'$ , correspondiente al triángulo  $ABC$ , en el que  $a' = 180^\circ - \widehat{A}$ ,  $\widehat{A}' = 180^\circ - a$ , etc. Aplicando el segundo grupo de fórmulas al triángulo polar de  $ABC$ , se tiene,

$$\cos a' = \cos b' * \cos c' + \text{sen } b' * \text{sen } c' * \cos \widehat{A}'$$

Por lo tanto,

$$\cos(180^\circ - \widehat{A}) = \cos(180^\circ - \widehat{B}) * \cos(180^\circ - \widehat{C}) + \text{sen}(180^\circ - \widehat{B}) * \text{sen}(180^\circ - \widehat{C}) * \cos(180^\circ - a)$$

Y, puesto que  $\text{sen}(180^\circ - \theta) = \text{sen } \theta$  y  $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ , se obtiene

$$-\cos \widehat{A} = \cos \widehat{B} * \cos \widehat{C} + \text{sen } \widehat{B} * \text{sen } \widehat{C} * (-\cos a)$$

$$\cos \widehat{A} = -\cos \widehat{B} * \cos \widehat{C} + \text{sen } \widehat{B} * \text{sen } \widehat{C} * \cos a$$

Las otras fórmulas se obtienen mediante un intercambio cíclico de las letras al aplicar el *Teorema del coseno para los lados* en el triángulo complementario. Así, las fórmulas que relacionan tres ángulos y un lado son:

$$\cos \widehat{A} = -\cos \widehat{B} * \cos \widehat{C} + \text{sen } \widehat{B} * \text{sen } \widehat{C} * \cos a$$

$$\cos \widehat{B} = -\cos \widehat{A} * \cos \widehat{C} + \sin \widehat{A} * \sin \widehat{C} * \cos b$$

$$\cos \widehat{C} = -\cos \widehat{A} * \cos \widehat{B} + \sin \widehat{A} * \sin \widehat{B} * \cos c$$

## 2.4. Fórmulas fundamentales de la Trigonometría Hiperbólica

De la Trigonometría Esférica se tiene las fórmulas fundamentales expuestas en el apartado anterior, que en resumen, dado un triángulo esférico de lados  $a, b, c$  y ángulos opuestos  $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$  respectivamente, entonces, para todo ángulo y lado en un triángulo esférico:

$$\sin \widehat{B} * \sin a = \sin \widehat{A} * \sin b \quad (2.4)$$

$$\cos a = \cos b * \cos c + \sin b * \sin c * \cos \widehat{A} \quad (2.5)$$

$$\cos \widehat{A} = -\cos \widehat{B} * \cos \widehat{C} + \sin \widehat{B} * \sin \widehat{C} * \cos a \quad (2.6)$$

Como se mencionó en el segundo capítulo, es Taurinus quien se interesa y desarrolla la geometría de una esfera imaginaria, que en principio fue sugerida por Lambert, para trabajar la HAA.

Taurinus empieza con las fórmulas de Trigonometría Esférica y reemplaza los lados reales de un triángulo, por lados imaginarios, de lo que obtiene.

$$\sin \widehat{B} * \sin ia = \sin \widehat{A} * \sin ib \quad (2.7)$$

$$\cos ia = \cos ib * \cos ic + \sin ib * \sin ic * \cos \widehat{A} \quad (2.8)$$

$$\cos \widehat{A} = -\cos \widehat{B} * \cos \widehat{C} + \sin \widehat{B} * \sin \widehat{C} * \cos ia \quad (2.9)$$

De otro lado, téngase presente las siguientes series de Taylor

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x^n}{n!} \right) \quad (2.10)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (2.11)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (2.12)$$

Si en la serie 2.10 se sustituye  $x$  por  $ix$ , considerando que  $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1 \dots$  etc. y si se agrupa las potencias pares de  $x$  por un lado y las impares por otro, entonces:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \left( 1 + \frac{-x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{-x^6}{6!} \pm \dots \right) + \left( \frac{ix}{1!} + \frac{-ix^3}{3!} + \frac{ix^5}{5!} + \frac{-ix^7}{7!} \pm \dots \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Que es un número complejo, donde su parte real es  $\cos x$ ; la serie 2.11, y su parte imaginaria es  $\sin x$ ; la serie 2.12, así que

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Ahora, cambiando la variable  $x$  por  $ix$ , se tiene:

$$e^{-x} = \cos ix + i \operatorname{sen} ix \quad (2.13)$$

Cambiando ahora la variable  $-x$  por  $x$ , queda  $e^x = \cos(-ix) + i \operatorname{sen}(-ix)$ , pero como  $\cos x$  es una función par y  $\operatorname{sen} x$  es impar se tiene:

$$e^x = \cos ix - i \operatorname{sen} ix \quad (2.14)$$

Con el fin de despejar  $\cos ix$ , sumando 2.13 y 2.14, queda  $e^{-x} + e^x = 2 \cos ix$ ; ahora para despejar  $\operatorname{sen} ix$ , a 2.13 se resta 2.14, obteniendo  $e^{-x} - e^x = 2i \operatorname{sen} ix$  y por lo tanto,

$$\frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cos ix$$

$$\frac{e^{-x} - e^x}{2i} = \operatorname{sen} ix$$

Las expresiones,  $-i \operatorname{sen} ix$  que es llamada *seno hiperbólico de  $x$*  y  $\cos ix$  llamada *coseno hiperbólico de  $x$* , se pueden obtener de la parametrización de la hipérbola, y son reales. Ahora, para llegar a las fórmulas de la Trigonometría Hiperbólica, se utilizará la notación actual, seno hiperbólico de  $x$  se notará como  $\operatorname{senh} x$  y coseno hiperbólico de  $x$  se notará como  $\operatorname{cosh} x$ :

- De 2.7  $\operatorname{sen} \widehat{B} * \operatorname{sen} ia = \operatorname{sen} \widehat{A} * \operatorname{sen} ib$ , y dado que  $\operatorname{sen} ix = \frac{-i \operatorname{sen} ix}{-i} = -\frac{\operatorname{senh} x}{i}$ , se tiene que

$$\operatorname{sen} \widehat{A} * \frac{\operatorname{senh} b}{-i} = \operatorname{sen} \widehat{B} * \frac{\operatorname{senh} a}{-i}$$

Por lo tanto  $\operatorname{sen} \widehat{A} * \operatorname{senh} b = \operatorname{sen} \widehat{B} * \operatorname{senh} a$

- De 2.8  $\cos ia = \cos ib * \cos ic + \operatorname{sen} ib * \operatorname{sen} ic * \cos \widehat{A}$ , se tiene que

$$\operatorname{cosh} a = \operatorname{cosh} b * \operatorname{cosh} c + \operatorname{sen} ib * \operatorname{sen} ic * \cos \widehat{A}$$

pero  $\operatorname{sen} ix = \frac{\operatorname{senh} x}{-i}$ , así que

$$\operatorname{cosh} a = \operatorname{cosh} b * \operatorname{cosh} c + \frac{\operatorname{senh} b}{-i} * \frac{\operatorname{senh} c}{-i} * \cos \widehat{A}$$

Por lo tanto  $\operatorname{cosh} a = \operatorname{cosh} b * \operatorname{cosh} c - \operatorname{senh} b * \operatorname{senh} c * \cos \widehat{A}$

- De 2.9  $\cos \widehat{A} = -\cos \widehat{B} * \cos \widehat{C} + \operatorname{sen} \widehat{B} * \operatorname{sen} \widehat{C} * \cos ia$ , se tiene que

$$\cos \widehat{A} = -\cos \widehat{B} * \cos \widehat{C} + \operatorname{sen} \widehat{B} * \operatorname{sen} \widehat{C} * \operatorname{cosh} a$$

Así, las formulas fundamentales de la Trigonometría Hiperbólica son

$$\operatorname{sen} \widehat{A} * \operatorname{senh} b = \operatorname{sen} \widehat{B} * \operatorname{senh} a$$

$$\operatorname{cosh} a = \operatorname{cosh} b * \operatorname{cosh} c - \operatorname{senh} b * \operatorname{senh} c * \cos \widehat{A}$$

$$\cos \widehat{A} = -\cos \widehat{B} * \cos \widehat{C} + \operatorname{sen} \widehat{B} * \operatorname{sen} \widehat{C} * \operatorname{cosh} a$$

### 3. Comentario Final

En el proceso de obtención de las fórmulas de senos y cosenos de la Trigonometría Esférica (fórmulas de Bessel) y en el de obtención de las fórmulas de la Geometría Hiperbólica, se observa la utilización de rectas paralelas no coplanarias, es decir se ha recurrido al espacio tridimensional para presentar tanto la Geometría Riemanniana como la hiperbólica, cuestión que no es necesaria en la Geometría Euclidiana. A diferencia de la Geometría de Euclides, se define las paralelas en un mismo plano (Euclides llama paralelas a dos rectas coplanarias que, prolongadas cuanto se quiera no se encuentran. Def. XXIII), observando que para las GNEs se requiere de un espacio tridimensional, como en la Geometría Hiperbólica expuesta por Lobachevski que se menciona en seguida.

Lobachevski en su libro *Geometrical Researches on the Theory of Parallels*, desarrolla su *geometría imaginaria*, que corresponde con la Geometría Hiperbólica. como menciona [4, p. 4]: “las primeras quince proposiciones no son demostradas por él, de éstas, la primera, y desde la once hasta la quince, son enunciadas para el espacio tridimensional; lo que indica que la concepción de esta nueva geometría no es posible sin la idea del espacio tridimensional, al contrario de la geometría euclidiana”, además, en *Geometrical Researches on the Theory of Parallels*, la proposición 25 (Dos líneas rectas que son paralelas a una tercera son también paralelas entre sí), trata de la transitividad del paralelismo, “Se prueba la transitividad del paralelismo, donde Lobachevski al igual que Bolyai y Gauss demuestra esta propiedad primeramente para rectas coplanares, y luego para rectas no coplanares, lo que nos indica que la nueva geometría no se puede obtener sin usar la tridimensionalidad del espacio, hecho que no ocurre con la geometría euclidiana” [4, p. 34].

Ahora, aunque Lobachevski requirió de la tridimensionalidad del espacio para desarrollar la Geometría Hiperbólica, se puede observar que el *modelo del disco de Poincaré en el plano*, (en el que los elementos geométricos como puntos y rectas están en el disco, y las rectas son arcos de circunferencia ortogonales a la frontera del disco) [6, pp. 217-222], es un ejemplo de Geometría Hiperbólica sobre el plano y no requiere del espacio tridimensional. Esta observación es uno de tantos interrogantes para futuras investigaciones en lo que corresponde con Geometrías No Euclidianas y su historia.

### Referencias

- [1] Ayres, F. y Alonso, A. *Trigonometría plana y esférica: teoría y 680 problemas resueltos*. McGraw-Hill, (1974). 3
- [2] Barrero, R. M. *Trigonometría esférica: fundamentos*. Apuntes Escuela Técnica Superior de Ingenieros en Topografía, Geodesia y Cartografía. Universidad Politécnica de Madrid, Escuela Técnica Superior de Ingenieros en Topografía, Geodesia y Cartografía. (2008). 3
- [3] Bonola, R. *Geometrías No Euclidianas*, Calpe, 1923, Traducción del italiano al español por Luis Gutiérrez de Arroyo. 2
- [4] Chaves, B. A. *Versión crítica y comentada de la teoría de paralelas de Lobachevski en español*. Tesis de pregrado, Universidad del Valle, (2001). 2, 14
- [5] Dou, A. Orígenes de la Geometría No Euclidiana: Saccheri, Lambert y Taurinus. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, conferencia en la RACEFNM 26.2.1991, en *Historia de la Matemática en el siglo XIX* (primera parte), 1992, pp. 43-63. 2
- [6] Gray, J, *Ideas de Espacio*, Mondadori España, segunda edición, (1992). 14
- [7] Saccheri, G, *Euclides Vindicatus*, editado y traducido al inglés por G. B. Halsted, New York: Chelsea Publishing Company, primera edición (1920), (1733). 2

- [8] Suarez, M. F. *De la Trigonometría Esférica a la Trigonometría Hiperbólica: Aspectos del surgimiento de las Geometrías No Euclidianas*. Tesis de pregrado, Universidad de Nariño, (2017).  
[2](#)

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA  
UNIVERSIDAD DE NARIÑO  
*e-mail:* marcosuarez2@gmail.com  
*e-mail:* ancbel@yahoo.es  
*e-mail:* email: edy454@yahoo.es