EL IMPULSOR CUALITATIVO EN PROBLEMAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL
THE QUALITATIVE IMPULSE IN DIFFERENTIAL CALCULUS PROBLEMS

NELSON CLAUDIO CÓRDOVA

Universidad Santa María, Campus Guayaquil. *ncordova@usm.edu.ec*

RESUMEN

Este documento presenta un recurso heurístico denominado Impulsor cualitativo que ayuda efectivamente en la resolución de problemas. Este elemento es introducido especialmente en la etapa de análisis del proceso de resolución de un problema. Este proceso requiere de una fuerte dosis de creatividad y desarrollo de operaciones cognitivas, lo que permite a un estudiante explorar su mente en búsqueda de soluciones y le permite organizar su pensamiento con el propósito de alcanzar un objetivo ulterior, que es encontrar la solución al problema. (Córdova, Sanchez y Urrutia, 2016) En este artículo mostramos la utilización de este concepto para resolver problemas que se enseñan en el Cálculo Diferencial y que el común de los estudiantes tiene dificultades al tratar de resolver. Con esto se pretende mostrar una nueva alternativa para enfrentar y resolver problemas. Con la inserción de este nuevo concepto, esperamos contribuir al proceso enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial, y de la Matemática en general, de tal manera que al aplicar el Impulsor cualitativo como una herramienta, esta sea útil para el desarrollo integral del estudiante, y además como apoyo complementario a los docentes dentro en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

PALABRAS CLAVE: impulsor cualitativo, recurso heurístico, habilidades.

ABSTRACT

This article presents a heuristic resource called: Qualitative Impulse that effectively helps solving problems. This resource is useful in the analysis stage of the problem solving process. It requires a strong dose of creativity and development of cognitive operations, which allow a student to open up his mind in search of solutions. In addition, at the same time, it helps organize his thinking in the long search of the final goal, which is to find the solution to the problem. (Córdova, Sanchez y Urrutia, 2016) In this article, we show the use of this resource to solve problems that are taught in Differential Calculus; which the common student has difficulty to solve. This document pretends to show a new alternative to solve said problems. With the insertion of this new concept, we hope to contribute to the teaching and learning process of Differential Calculus and Mathematics in general, so that when applying the Qualitative Impulse as a tool, it will be useful for the integral development of the student and a complementary support to teachers within the process of teaching and learning Mathematics.

KEYWORDS: qualitative impulse, heuristic resource, mathematical skills

RECIBIDO: 29/3/2017
ACEPTADO: 10/6/2017

INTRODUCCIÓN

A través de diversos análisis y definiciones estudiadas, hemos detectado que existe un carácter relativo de los problemas, es decir, que existen situaciones que mientras para algunos son grandes problemas, para otros no lo son. Esta idea no es la que ha primado durante años anteriores, sino que, un problema es una situación de un nivel superior y nunca un ejercicio podría calificar como problema, sin embargo, mirando hacia el concepto pedagógico formativo del estudiante, es posible que hasta un ejercicio pudiera ser considerado un problema, dependiendo principalmente del individuo que está al frente, por lo que la definición de problema que proponemos es la siguiente.

Definición: un problema es una situación que se le presenta a un individuo, que le produce un conflicto interno, que lo lleva a movilizarse respecto a esa situación para resolverlo (Covarrubias, 2007).

Según esta definición, un problema es cualquier situación que se le presenta a un individuo y le provoca un conflicto, en el sentido de que, hay algo en esa situación, que no concuerda con su realidad habitual y siente que carece de "algo" para poder solucionar dicho conflicto.

Nuestro objetivo es proponer la resolución de problemas como eje facilitador para el aprendizaje. En este aspecto, consideraremos un problema a cualquier situación planteada al alumno, la cual represente un conflicto para él y que pueda producir un cambio positivo en el. Esto enmarcado en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos.

"El énfasis en la resolución de problemas como contenido transversal, se apoya en una visión de las matemáticas centrada en segundo aspecto, anteriormente nombrado que busca favorecer la construcción del conocimiento a partir de situaciones de aprendizaje significativas y facilitadoras. En otras palabras, una visión de las matemáticas, que se encuentra estrechamente relacionada con su epistemología y pedagogía"(Villalobos, 2008, p.39).

Entonces, nuestra definición de problema amplía el espectro en Matemáticas, porque podemos llamar problema a cierto tipo de ejercicios, que quizás, el "experto" en el área puede resolver, pero el común de las personas no (Córdova,Villena y Oliveros, 2013).

En la enseñanza de la Matemática, es importante no idealizar, ni elevar, el concepto de problema a planteamientos muy sofisticados, porque ya en el proceso de formación, hemos evidenciado que en nuestros bachilleres, existen muchos "problemas" que experimentan a la hora de resolver problemas, y también algunos los docentes. (Contreras, 1987).

Según G. Polya (1954) el proceso para resolverlos consiste en cuatro fases: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y la visión retrospectiva, cada una de ellas necesaria para la formación de la habilidad para resolver problemas (Córdova y Oliveros, 2014). Nuestro Impulsor cualitativo es introducido en la fase de concebir un plan, es allí donde este concepto vierte su utilidad, en búsqueda de un elemento dentro o fuera del problema, que pueda brindar la idea de alguna estrategia, o dar luces de un camino para la solución.

Según sus autores el Impulsor cualitativo es por definición:

> “Cualquier símbolo, elemento, componente, cualidad o característica perteneciente a la estructura de un problema o a su contexto, que permite dar un salto cualitativo en la resolución del problema, siendo capaz de proyectar una o más vías de solución efectiva y clara.” (Córdova, Sanchez y Urrutia, 2016, p.5)

En la enseñanza del Cálculo Diferencial de una variable, existen ejercicios (problemas, para muchos) cuya resolución necesita procedimientos algorítmicos ya conocidos, por ejemplo, para el proceso de optimización, el procedimiento es claro, sin embargo, siempre existe una componente de conflicto que no pueden dilucidar los estudiantes, porque en la mayoría de los problemas aparece más de una variable y no pueden aplicar dicho algoritmo directamente, entonces tienen "un problema". En este caso, el Impulsor puede ser la ecuación misma y sus variables a eliminar, también alguien puede determinar como impulsor la relación faltante entre las variables. Es decir que, el ***Impulsor cualitativo*** es definido por el solucionador del conflicto y será el elemento clave que le permitirá encontrar alguna vía de solución (Córdova, 2016).

Existen dos elementos que siempre será conveniente considerar en la resolución de problemas: el primero es la práctica continua de resolver problemas, esto es, para el desarrollo de las habilidades; y, el segundo, los heurísticos, como ayuda en el proceso de resolución de problemas. Según Martínez (2008) existen grupos que han desarrollado estas perspectivas en las cuales se privilegia la relevancia de las estrategias y las acciones y operaciones básicas se perfeccionan a través de la práctica de la matemática. Shoenfeld (1987) sugiere: "Un objetivo esencial en la instrucción matemática es ayudar a que los estudiantes desarrollen habilidades y estrategias que usen en su estudio de las matemáticas independiente de la presencia del maestro. Shoenfeld indica que la instrucción matemática debe incorporar estrategias para que el estudiante aprenda a leer, a conceptualizar y a escribir argumentos matemáticos" (Santos,1996, p.64).

Entre estos heurísticos tenemos:

- Estrategias heurísticas: Trabajo hacia adelante, Trabajo hacia atrás, Ensayo y error
- Principios heurísticos: Generalización, Analogía, Reducción, Inducción, aplicación de casos especiales (Blanco, 1996).
- Recursos heurísticos: Separar lo dado de lo buscado, confeccionar una figura de análisis, reformular el problema (Sigarreta, Locia y Bernmudo, 2011).

UN PROBLEMA DE LÍMITES

Problema: Analizar el siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{10}y^{10}}{x^3+y^3}$$

utilizando curvas para determinar su existencia.

ETAPA 1. COMPRENDER EL PROBLEMA

1.- Este tipo de límites de la forma $\frac{0}{0}$ tiene diferentes casos:

i) Cambio de variable a un límite unidimensional, en cuyo caso se aplican los métodos unidimensionales, ii) Demostración de límite si se intuye cual es el valor de ese límite, iii) Sospechar que el límite no existe y buscar curvas para las cuales el límite no existe o tiene diferente valor.

En este caso ocure algo inusual, si tomamos las curvas habituales que se usan de la forma $y = mx^a$ el resultado siempre cera cero.

ETAPA 2.ANÁLISIS DEL PROBLEMA

1.-Si verificamos usando el tipo de curvas tradicional $y = mx^{\alpha}$, donde $m \in \mathbb{R}-\{-1\} \wedge \alpha \in \mathbb{N}$ el límite resulta igual a cero.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{10}\left(mx^{\alpha}\right)^{10}}{x^3+\left(mx^{\alpha}\right)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{m^{10}x^{10\alpha+10}}{x^3+m^3x^{3\alpha}} = \lim_{x\to 0} \frac{m^{10}x^{10\alpha+10}}{x^3\left(1+m^3x^{3(\alpha-1)}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{m^{10}x^{10\alpha+7}}{\left(1+m^3x^{3(\alpha-1)}\right)} = 0 \quad , \alpha-1>0$$

Esto podría inducir falsamente a pensar que el límite es cero.

2.-Esto que ocurre y generalmente es así, sucede porque las potencias del numerador son "muy grandes" respecto a las del denominador, pero veremos que en este caso ese concepto no aplica.

En este caso, observamos que el uso de curvas tradicionales nos lleva siempre al mismo resultado, por lo tanto, cabe la pregunta: ¿existirá alguna otra curva que lleve a otro resultado que no sea cero?

En este ejercicio, como ***impulsor cualitativo*** usaremos: la recta $y=-x$, que es justamente el complemento del dominio de la función en cuestión. Este impulsor es muy importante porque cualquier punto en esta recta hace que el límite sea infinito, por lo tanto, si un punto es muy cercano a esta recta, el límite tendrá un valor muy grande. Esto nos sugiere la idea "genial" de concebir un tipo de curvas especiales con dirección al origen pero antes de llegar estarán mas cerca del Impulsor cualitativo que del origen mismo y para las cuales el límite evaluado en esas curvas sería infinito y así probaríamos que el límite no existe.

3.- Un gráfico de la recta y del tipo de curva a utilizar es el siguiente:

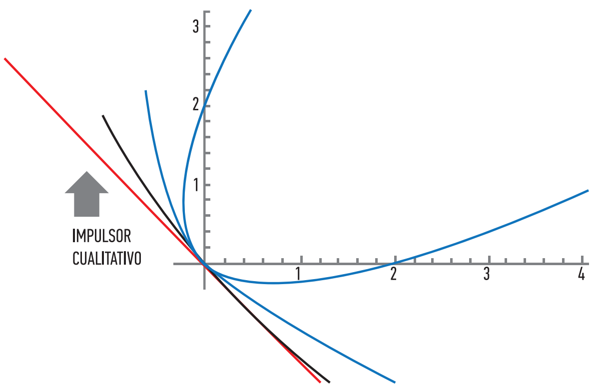


Figura 1. Impulsor cualitativo y curvas tipo flat.

La idea es: a) Encontrar una curva que pertenezca al dominio y que tienda a cero, b) que cada punto de esa curva se acerque más rápidamente a la recta $y=-x$ que al origen, para que el denominador tienda a cero más rápidamente que el numerador, para eso necesitamos una curva tipo "flat".

4.-Para hallar dicho tipo de curva tomamos las curvas tradicionales $y = mx^{\alpha}$ con $m = 1$ para facilitar el cálculo, pero estas deben tener como eje de referencia la curva $y = mx^{\alpha}$ entonces debemos rotar este tipo de curvas en 45 grados, para esto elegimos una rotación del tipo:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

con ángulo $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Las curvas serán del tipo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t^{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + t^{\alpha} \\ -t + t^{\alpha} \end{pmatrix} \rightarrow \psi(t) = \left(t + t^{\alpha}, -t + t^{\alpha} \right),$$

para mejor elección de las curvas haremos $\alpha = 2n$

ETAPA 3: EJECUCIÓN DEL PLAN

Calcularemos el límite sobre estas curvas:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\left(t + t^{2n}\right)^{10} \left(-t + t^{2n}\right)^{10}}{\left(t + t^{2n}\right)^{3} + \left(-t + t^{2n}\right)^{3}} = \lim_{t \to 0} \frac{t^{20} \left[\left(1 + t^{2n-1}\right)\left(-1 + t^{2n-1}\right) \right]^{10}}{t^{3} \left[\left(1 + t^{2n-1}\right)^{3} + \left(-1 + t^{2n-1}\right)^{3} \right]} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^{17} \left[\left(t^{2n-1}\right)^{2} - 1 \right]^{10}}{1 + 3t^{2n-1} + 3\left(t^{2n-1}\right)^{2} + \left(t^{2n-1}\right)^{3} + \left(t^{2n-1}\right)^{3} - 3\left(t^{2n-1}\right)^{2} + 3t^{2n-1} - 1} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^{17} \left[\left(t^{2n-1}\right)^{2} - 1 \right]^{10}}{2\left(t^{2n-1}\right)^{2} + 6t^{2n-1}} = \lim_{t \to 0} \frac{t^{17} \left[\left(t^{2n-1}\right)^{2} - 1 \right]^{10}}{2t^{2n-1} \left[\left(t^{2n-1}\right)^{2} + 3 \right]} =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\left[\left(t^{2n-1}\right)^{2} - 1 \right]^{10}}{2t^{2n-18} \left[\left(t^{2n-1}\right)^{2} + 3 \right]} \quad \begin{cases} -\frac{1}{6} & , n = 9 \\ & , n \quad 9 \\ 0 & , n < 9 \end{cases}$$

Esto prueba que para este tipo de curvas el límite no es cero, por lo tanto existen por lo menos dos curvas, tal que el límite calculado a través de ellas es distinto, entonces el límite no existe.

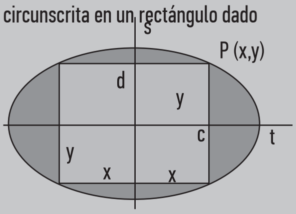
ETAPA 3: VISIÓN RETROSPECTIVA

Es interesante ver como un elemento que no es parte del dominio pasa a ser el elemento más importante de la resolución del problema, como lo es, en este caso, la recta, que no pertenece al domino de la función en cuestión; pasa a ser determinante en la definición de Impulsor cualitativo, para la construcción de un tipo de curvas especiales que permitieron dilucidar los diferentes estados del problema.

En la docencia del Cálculo en varias variables se presenta esta idea, la cual expresa: "Que en la demostración de no existencia de un limite de dos o mas variables, es posible que existan infinitas curvas para las cuales el límite es un mismo valor , sin embargo, el límite no existe", por lo que también resulta interesante, pues de estos problemas hay muy pocos o casi ninguno en los textos.

EJEMPLOS DE IMPULSORES CUALITATIVOS Y SUS ESTRATEGIAS

TABLA 1. PROBLEMAS, IMPULSORES Y ESTRATEGIAS

TIPO DE PROBLEMA	PROBLEMA O EJERCICIO	IMPULSOR CUALITATIVO	ESTRATEGIA/ PLAN	BOSQUEJO DE SOLUCIÓN
1.-Geométrico	Determinar la diagonal de un paralelepípedo rectangular dados su longitud, su ancho y su altura	1.Trazo diagonal (opción 1) 2.Triángulo Rectángulo (opción 2)	Usar doblemente el teorema de Pitágoras	1.- Hacer un gráfico 2.- 1ra fórmula 3. 2da fórmula 4.- Remplazo y despeje
2.-De relojes	Un reloj marca las 3 en punto. ¿A qué hora entre las 3 y las 4 se superponen las agujas por primera vez?	Relación Minutero- Horario $y \leftrightarrow \frac{y}{12}$ o Horario-Minutero $x \leftrightarrow 12x$	Igualar movimientos con la misma variable	1.- El horario avanza x (12x en minutos) $15+\frac{x}{12}$ 2.- El minutero avanza $15+\frac{x}{12}= 12x \rightarrow x=16,36$
3.- Optimización (Geometría analítica)	Calcular el área de la elipse de mínima área circunscrita en un rectángulo dado  	Relación entre s y t	Aplicar proceso para máximos a la fórmula del área con una sola variable.	1.-Reemplazar (c,d) en la ecuación de la Elipse 2.- Despejar s 3.- Reemplazar en la fórmula del área 4.-derivar =0 5.- $t=2c$ 6. $t=2c$ es un mínimo.
4. Optimización (Máximo)	Una agencia de viajes ofrece el siguiente plan para un tour sobre las siguientes bases: Para un grupo de 50 personas (grupo mínimo) el costo es de $200 por persona. Por cada persona adicional y hasta llegar a 80 (grupo máximo) la tarifa de todas las personas se reduce en $2. Si el costo fijo de la agencia es de $6000 y de $32 por cada viajero, determina el tamaño del grupo que maximiza la utilidad y cuál es esta	El Exceso entre x y 50	Formular correctamente	1.-Aplicar fórmula normal de utilidad. 2.- Definir x como exceso de 50 3.-Rescribir la fórmula con los cambios. U=(200-2x)(50+x)-6000-32x 4. Derivar =0 5. Despejar x 6. Derivar por segunda vez 7. Evaluar la derivada 8.-Dar la respuesta.
5. Optimización (mínimo)	Un hombre se encuentra en un punto A de la orilla de un río rectilíneo de 2 km de ancho. Sea C el punto en frente de A en la otra orilla. El hombre desea llegar a un punto B situado a 8km a la derecha y en la misma orilla de C. El hombre puede remar en su bote cruzando el río hasta el punto D entre B y C. Si rema a 6km/h y correa 8km/h, ¿a qué distancia debe estar D del punto C, para llegar al punto B lo más pronto posible.	El gráfico de la situación con la asignación de la variable	Definir correctamente la función tiempo y aplicar proceso para Mínimos.	1. Graficar situación 2.-Asignar variable 3.-Obtener hipotenusa en términos de la variable (x). 4.-Expresar el camino recorrido usando $t=\frac{s}{v}$ Por rio y por tierra. En términos de x 5.-Deriva =0 y despeja 6. Deriva 2da vez y comprueba que es positivo. 7.- Entrega la respuesta.
6.-Demostracion	Demuestre que si $x=p+\sqrt{q}$, P y q racionales ,entonces cualquier potencia natural de x es de la forma $a+b\sqrt{q}$, con a y b racionales	Potencia natural	Inducción matemática	1.-Demostración para n=2 $a=\left(p^2+q^2\right)$ y $b=(2p)$ $x^2=\left(p+\sqrt{q}\right)^2=$ $=\left(p^2+q^2\right)+(2p)\sqrt{q}$ 2.-suponer que se cumple para n: $x^{n+1}=xx^n=\left(p+\sqrt{q}\right)\left(p+\sqrt{q}\right)^n$ $=\left(p+\sqrt{q}\right)\left(a+b\sqrt{q}\right)$ $x^{n+1}=(pa+bq)+(a+pb)\sqrt{q}$ donde $a`=(pa+bq)$ y b`$=(a+pb)$

Fuente: Càlculo una variable (Thomas, 2010)

CONCLUSIONES

Es importante para la resolución de problemas asimilar el concepto de Impulsor cualitativo, el cual hemos visto que facilita la búsqueda de estrategias de solución y permite orientar el trabajo hacia los resultados y desarrollar al estudiante como mejor solucionador de problemas, al poseer una herramienta adicional en su repertorio. El solucionador debe tener o incorporar algunas características, entre ellas:

"conocimiento teórico, habilidades cognitivas, creatividad, actitud, ansiedad, edad, sexo, etc." (Perales Palacios, 1993).

Además, podemos observar que la búsqueda y determinación de este impulsor, resulta interesante y le da un carácter más lúdico y de espectación en la etapa de análisis de los problemas, esto contribuye al crecimiento de la motivación del estudiante dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas en Matemática, y también se puede utilizar como estrategia en el trabajo colaborativo para la resolución de problemas, puesto que "el aprendizaje pasa a contemplarse como una actividad abierta y creativa, debidamente orientada por el docente como investigador experto (Vilches y Gil, 2012).

Consideramos muy necesario dar a conocer este nuevo concepto, útil para la resolución de problemas, no tan sólo en Matemáticas sino en otras áreas del saber , tales como la planificación estratégica o la optimización deoperaciones. De todas maneras consideramos que con la contribución del Impulsor cualitativo se vizlumbra un aporte en la capacidad de resolver problemas, principalmente en dos vías: la primera, en mejorar la capacidad de análisis en la resolución de problemas; y, la segunda, en la mejora sustancial de la motivación del estudiante que aprende y el docente que enseña. Este concepto se está implementando actualmente en la enseñanza de la resolución de problemas en Matemática (nace el año 2016), por lo que animamos a los lectores a experimentar con problemas de todo tipo y a considerar en su resolución, como uno de los elementos que le ayudará en su trabajo , al definido por sus autores como **Impulsor cualitativo** (Córdova, Sanchez y Urrutia, 2016).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Blanco, J. L. (1996). *La resolución de problemas. Una revisión teórica.* Suma, 21, 11-20.

Contreras, L. (1987). *La resolución de problemas, ¿una panacea metodológica?*. Enseñanza de las ciencias, 49-52.

Córdova, N. (2016). *La resolución de problemas matemáticos: George Polya vigente hasta hoy.* Gaceta Sansana (Vol 1, nro 7), 21-27.

Córdova, N., y Oliveros, E. (2014). *La Matemática Superior y las Competencias.* Gaceta Sansana(Vol 1), 55-66.

Córdova, N., Sánchez, R., y Urrutia, I. (2016). *Elementos de innovación docente en la mejora del aprendizaje: el impulsor cualitativo y su aplicación en la resolución de problemas en matemáticas*. Ciencias Matemáticas.

Córdova, N., Villena, M., y Oliveros, E. (2013). *La matemática superior y la creatividad Como desarrollar la creatividad en las Matemáticas*. gaceta Sansana, 33-42.

Covarrubias, F. (2007). Covarrubias, F. (2007). *El carácter relativo de la objetividad científica. Cinta de Moebio*. Revista de Epistemología de Ciencias Sociales, (28). Revista de Epistemología de Ciencias Sociales, (28)., 44-72.

Martínez, E. (2008). *Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. In Investigación en educación matemática XII* (p. 6). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Perales Palacios, F. J. (1993). *La resolución de problemas*. Enseñanza de las Ciencias, 11(2), 170-178.

Santos Trigo, L. (1996). *Principios y Métodos de Ia Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamericano., 57-71.

Sigarreta, J. M., Locia, E., & Bermudo, S. (2011). *Metodología para el tratamiento de los problemas matemáticos*. Revista Premisa, 28-40.

Thomas, G. (2010). *Calculo una variable*. México: Pearson Educación.

Vilches, A., & Gil, D. (2012). *El trabajo cooperativo en el aula: una estrategia considerada imprescindible pero infrautilizada*. Aula de Innovación educativa, 20(208), 41-48.

Villalobos Fuentes, X. (2008). *Resolución de problemas matemáticos: un cambio epistemológico con resultados metodológicos*. REICE.Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación., 36-58.