

Lo que no suele ser contado en los problemas de planos inclinados con rozamiento



Adrián H. Buep^{1,2}, Fernando S. Fernandez^{3,4}

¹Facultad de Ingeniería, Universidad de Palermo, Mario Bravo 1050 C. P. C1175ABT, Buenos Aires, Argentina.

²Escuela Superior Técnica, Gral. Div. Manuel N. Savio, Av. Cabildo 15 C.P. C1426AAA, Buenos Aires, Argentina.

³Departamento de Física, Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González, Ayacucho 632, C.P. C1026AAF, Buenos Aires, Argentina.

⁴Departamento de Física, Colegio Nacional de Buenos Aires, Universidad de Buenos Aires, Bolívar 263, CP. C1066AAE, Buenos Aires, Argentina.

E-mail: adrian.buep@gmail.com

(Recibido el 12 de enero de 2018, aceptado el 14 de febrero de 2018)

Resumen

En este paper se estudió el trabajo efectuado por la fuerza de rozamiento cuando un bloque desliza por un plano inclinado manteniendo constante a una de las tres variables: la altura, la base o la hipotenusa. También se analizó detalladamente lo que ocurre con el trabajo de la fuerza de rozamiento entre el bloque y el piso en la unión de dos planos inclinados. De dicho análisis se llegó a la conclusión que el trabajo de la fuerza de roce en la unión tiene un valor que no puede ser despreciado frente al trabajo efectuado en cada uno de los planos.

Palabras clave: Plano inclinado, Fuerza de rozamiento, Trabajo y energía, Poligonales.

Abstract

In this paper, we study the work done by the friction force when a block slides on an inclined plane keeping constant the opposite side, the adjacent side or the hypotenuse. We also analyzed in detail what happens with the work of frictional force between the block and the floor at the junction of two inclined planes. From this analysis, it was concluded that the work of the friction force in the union has a value that cannot be neglected when compared to the one carried out in each plane.

Keywords: Inclined plane, friction force, work and energy, polygonal.

PACS: 01.40.gb, 45.20.D, 45.20.dg, 45.20.dh

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

El plano inclinado es uno de los temas más vistos desde que Galileo (1564-1642) lo utilizó para investigar el movimiento de los cuerpos y generó múltiples trabajos de investigación en docencia [1, 2, 3, 4]. Aquí se lo utilizará para estudiar el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento a lo largo de un plano inclinado y de una trayectoria poligonal.

En los textos de física [5, 6, 7, 8] se calcula el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento en planos inclinados cuando se conoce el ángulo de inclinación y la longitud de la trayectoria. En este trabajo veremos que no es necesario conocer ni el ángulo ni la longitud del plano inclinado. Para tal fin se realiza el estudio del movimiento de un bloque por un plano inclinado que presenta una superficie con rozamiento empleándose el método de control de variables. Con este método analizaremos como se ve afectado el trabajo de la fuerza de rozamiento cuando se mantiene

constante la altura, la distancia total horizontal recorrida o la longitud del plano inclinado.

También se analizan situaciones que frecuentemente no son tenidas en cuenta al tratar con problemas de bloques que deslizan por planos inclinados que se conectan entre sí formando una trayectoria que resulta en una poligonal. Se bloque que desliza pasa por uno de los vértices de esta trayectoria poligonal.

II. DESARROLLO

Consideramos a un bloque de masa m deslizando por la superficie de un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal (Fig.1) y que presenta rozamiento de coeficiente cinético μ . El trabajo W de la fuerza de rozamiento a lo largo del trayecto de longitud L es:

$$W = -\mu m g L \cos(\theta) = -\mu m g D, \quad (1)$$

$$D = L \cos(\theta). \quad (2)$$

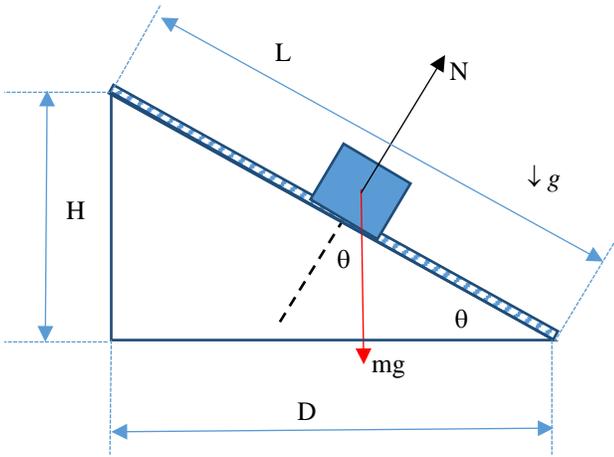


FIGURA 1. Bloque de masa m cayendo por un plano inclinado de longitud L que ofrece rozamiento con coeficiente cinético μ .

Si se analiza la dependencia del trabajo efectuado por la fuerza de rozamiento resulta interesante contrastar su valor de acuerdo a la variable que se controla (la longitud L del plano recorrida, la altura descendida H o la distancia total horizontal D recorrida).

Si se mantiene D inalterable y modificamos el ángulo θ entre el plano inclinado y el piso horizontal tanto la altura H como la longitud L se modifican, pero el trabajo de la fuerza de rozamiento se mantiene constante valiendo $-\mu m g D$.

Contrariamente si se mantienen inalterables H o L y modificamos el ángulo θ entre el plano inclinado y el piso horizontal el trabajo de la fuerza de rozamiento seguirá manteniendo la expresión de la ecuación (1) pero su valor no será constante porque D toma valores distintos para diferentes ángulos θ .

La figura 2 muestra como resulta afectado el trabajo de la fuerza de rozamiento entre el bloque y el plano inclinado al controlar una de estas tres variables: L , H ó D .

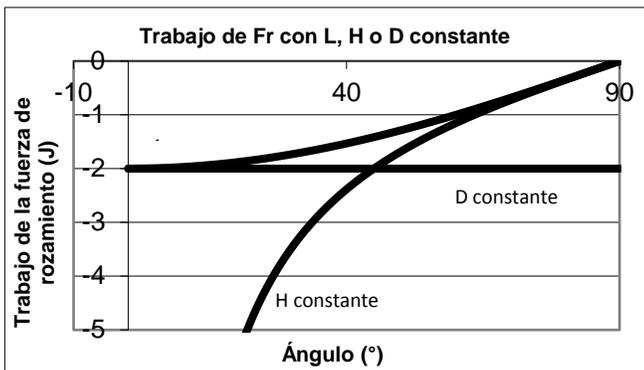


FIGURA 2. Trabajo de la fuerza de rozamiento cuando se mantiene constante a L , H ó D .

En la figura 2 se aprecia que cuando L se mantiene constante, el trabajo de la fuerza de rozamiento resulta ser siempre mayor que en los casos en donde se mantiene constante D ó H . Además, para valores del ángulo θ próximos a cero, se observa que el trabajo de la fuerza de rozamiento (con D constante y con L constante) tiende asintóticamente al valor del trabajo cuando D es constante debido a que L se aproxima a D . Mientras que para valores del ángulo θ que se hacen cada vez más próximos a 90° , el trabajo de la fuerza de rozamiento (con H constante y con L constante) tiende asintóticamente a cero dado que D tiende a cero.

A continuación, se tratará un caso más general, tal como lo describe la figura 3.

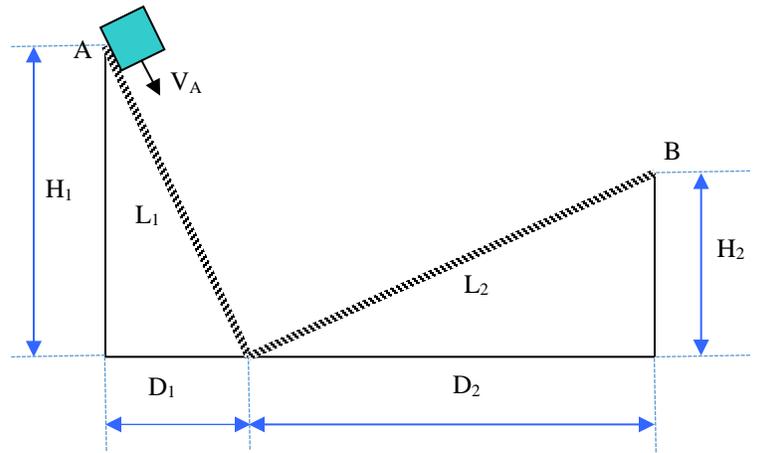


FIGURA 3. El bloque de masa m desciende una altura H_1 desde el punto A con velocidad inicial V_A y luego asciende por otro plano inclinado a una altura H_2 hasta alcanzar el punto B con una velocidad V_B . En todo el trayecto existe rozamiento con un único coeficiente cinético μ .

El bloque de masa m cae desde A con velocidad inicial V_A para moverse por dos diferentes planos inclinados interconectados hasta llegar al punto B con velocidad V_B . Un análisis energético de la situación nos permite afirmar que hay variaciones en las energías potencial gravitatoria, cinética y mecánica.

Ahora nos podemos preguntar si el trabajo de la fuerza de rozamiento puede en este caso escribirse como:

$$W = -\mu m g (D_1 + D_2). \quad (3)$$

Si es correcta la expresión anterior la variación de energía mecánica queda expresada como:

$$\Delta E_M = \Delta E_C + \Delta E_P = -\mu m g (D_1 + D_2). \quad (4)$$

Reemplazando las variaciones de energías cinética y potencial por sus expresiones la ecuación [4] queda:

$$\frac{1}{2} m (V_B^2 - V_A^2) + m g (H_2 - H_1) = -\mu m g (D_1 + D_2). \quad (5)$$

Despejando la velocidad final V_B :

$$V_B = \sqrt{V_A^2 - 2 g \mu (D_1 + D_2) - 2 g (H_2 - H_1)} \quad (6)$$

Surgen aquí dos aspectos interesantes a remarcar. Uno es que se pueden elegir diferentes trayectorias para el bloque, modificando los ángulos de inclinación de ambos planos y con ello las distancias D_1 y D_2 sin modificar las alturas H_1 y H_2 . Como resultado de ello la velocidad final es independiente de la trayectoria dado que $(D_1 + D_2)$ y $(H_2 - H_1)$ son constantes. El otro aspecto a resaltar es que por todas esas trayectorias diferentes el trabajo de la fuerza de rozamiento será el mismo.

El problema planteado en la figura 3 es un típico problema de pizarra planteado en las clases de física. Las preguntas que nos surgen y a las que trataremos de dar respuesta son las siguientes: ¿Qué sucede con la fuerza normal en el punto donde se unen los planos? ¿El trabajo de la fuerza de rozamiento es nulo en el vértice? Veamos, si consideramos a ese vértice (unión de ambas bases de los planos inclinados) como formado por un arco de curvatura muy cerrado (Fig. 4). La fuerza normal deja de valer $m g \cos(\theta)$ porque hay una aceleración centrípeta y por lo tanto la fuerza de rozamiento deja de ser $\mu m g \cos(\theta)$.

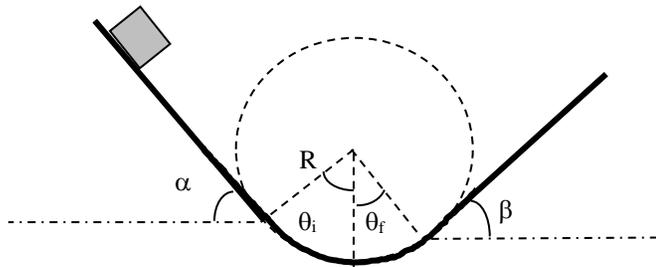


FIGURA 4. Un bloque de masa m que desliza sobre el plano inclinado pasa por un vértice considerado como un pequeño trayecto curvilíneo de radio R . Los planos inclinados tienen ángulos $\alpha = \theta_i$ y $\beta = \theta_f$ siendo θ_i y θ_f los ángulos para los que se enmarca el recorrido del bloque (considerado puntual) en ese trayecto circular.

Entonces cuando el cuerpo de masa m desliza por la curva circular de radio R las fuerzas que actúan sobre la masa son el Peso, la Normal y la Fuerza de rozamiento tal como se muestra en la figura 5. Si se toma un sistema de ejes perpendiculares (t, n) el peso P puede descomponerse en las componentes normal P_n y tangencial P_t . La componente tangencial del peso y la fuerza de rozamiento son las fuerzas responsables de que la masa tenga una aceleración tangencial variable dado que dichas fuerzas varían con el ángulo.

Si tomamos el ángulo negativo hacia la izquierda de la línea vertical ($\theta_i \leq \theta < 0$) y positivo hacia la derecha ($0 \leq \theta \leq$

Lo que no suele ser contado en los problemas de planos inclinados con rozamiento θ_f) en la figura 5 la componente tangencial del peso es positiva.

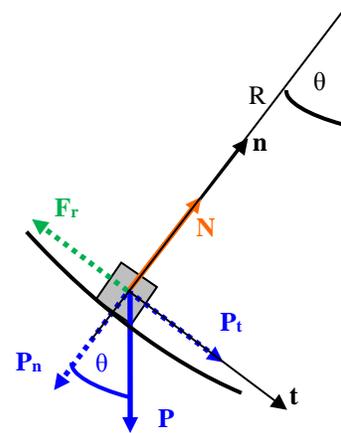


FIGURA 5. Bloque de masa m que desliza sobre el pequeño arco de curvatura con presencia de rozamiento y el conjunto de fuerzas a las que está sometido.

Para un ángulo θ cualquiera, las ecuaciones de movimiento en los ejes t y n son las siguientes:

$$-F_r - P_t = m a_t, \quad (7)$$

$$N - P_n = m a_n \quad (8)$$

donde $P_t = P \sin(\theta)$, $P_n = P \cos(\theta)$ y $F_r = \mu N$.

Por lo tanto, las ecuaciones (7) y (8) quedan expresadas como:

$$-\mu N - m g \sin(\theta) = m a_t, \quad (9)$$

$$N - m g \cos(\theta) = m a_n. \quad (10)$$

Por otra parte, vamos a suponer una sucesión de movimientos circulares uniformemente variados (MCUV) durante un $\Delta t \rightarrow 0$. Esto nos lleva a que para cada Δt se tiene que:

$$\omega = \dot{\theta}, \quad (11)$$

$$\alpha = \ddot{\theta}, \quad (12)$$

$$a_n = R \dot{\theta}^2, \quad (13)$$

$$a_t = R \ddot{\theta}. \quad (14)$$

Por lo tanto, las ecuaciones (9) y (10) se escriben:

$$-\mu N - m g \sin(\theta) = m R \ddot{\theta}, \quad (15)$$

$$N - m g \cos(\theta) = m R \dot{\theta}^2. \quad (16)$$

Despejando N de la ecuación (16) y reemplazándola en la ecuación (15) obtenemos:

$$-\mu (g \cos(\theta) + R \ddot{\theta}^2) - g \sin(\theta) = R \ddot{\theta}. \quad (17)$$

La ecuación (17) es una ecuación diferencial que no tiene solución analítica, es decir, no puede encontrarse una expresión del ángulo en función del tiempo. Sólo es posible solucionarla por métodos numéricos.

Partiendo de una velocidad inicial V_0 y un ángulo inicial θ_0 vamos a solucionar esta ecuación empleando un método iterativo. Es decir, vamos a encontrar como varía el ángulo a medida que transcurre el tiempo y con ello la velocidad, la normal y la fuerza de rozamiento para cada ángulo. Las ecuaciones a utilizar son:

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \dot{\theta}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_i \Delta t^2, \quad (18)$$

$$\dot{\theta}_{i+1} = \dot{\theta}_i + \ddot{\theta}_i \Delta t, \quad (19)$$

$$\ddot{\theta}_{i+1} = \frac{-g \sin(\theta_i) - \mu g \cos(\theta_i)}{R} - \mu \dot{\theta}_i^2, \quad (20)$$

$$N_{i+1} = m g \cos(\theta_{i+1}) + m R \dot{\theta}_{i+1}^2, \quad (21)$$

$$V_{i+1} = R \dot{\theta}_{i+1}, \quad (22)$$

$$W_{i+1} = \mu N_{i+1} R \theta_{i+1} \cos(180^\circ). \quad (23)$$

Las condiciones iniciales vienen dadas por:

$$\theta_0 = \text{ángulo inicial} \quad (24)$$

$$\dot{\theta}_0 = \frac{V_0}{R} \quad (25)$$

$$\ddot{\theta}_0 = \frac{-g \sin(\theta_0) - \mu g \cos(\theta_0)}{R} - \mu \dot{\theta}_0^2. \quad (26)$$

Los resultados que se obtuvieron mediante la simulación para el modelo de trayectoria presentado en la figura 4 luego de ensayar con diferentes radios de curvatura (0,01m; 0,001m) se muestran en las figuras 6 y 7 siguientes. Los valores de la normal y de la fuerza de rozamiento se determinaron para una velocidad del bloque en el punto A de la trayectoria $V_A = 0,3 \text{ m/s}$; $D_1 = 0,40 \text{ m}$ $\mu = 0,2$; un bloque de masa igual a $0,1\text{kg}$, un ángulo de inclinación del primer plano inclinado $\alpha = 45$ y en consecuencia una altura $H_1 = 0,40\text{m}$; con la aceleración de la gravedad $g = 10 \text{ m/s}^2$. El ángulo de inclinación del segundo plano es $\beta = 30$. Se calculó que el valor de velocidad del bloque al llegar al pie del plano es $2,55\text{m/s}$ y en consecuencia se consideró para el programa un ángulo inicial de -45 y un ángulo final de $+30$. Ángulos con los que entra y sale al trayecto circular de la figura 4.

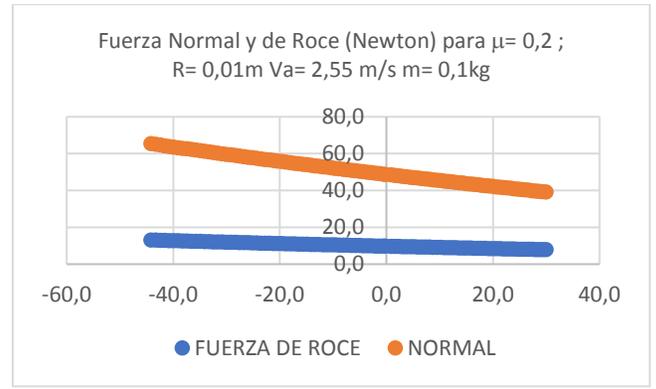


FIGURA 6. Fuerza normal y de rozamiento para un radio de curvatura de 0,01m.

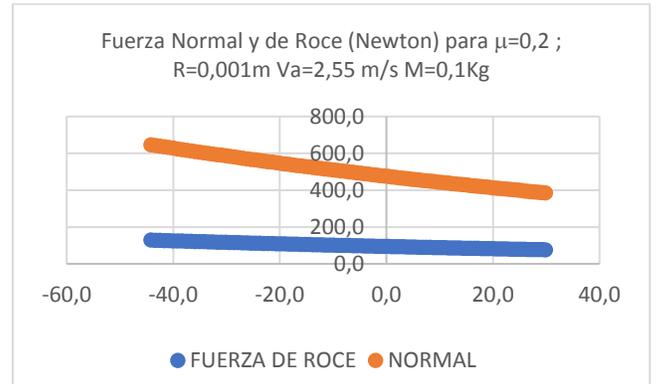


FIGURA 7. Fuerza normal y de rozamiento para un radio de curvatura de 0,001m.

De los gráficos obtenidos apreciamos cómo cambia sustancialmente el módulo de la fuerza normal en el trayecto indicado en la figura 4, cuando el radio de curvatura pasa de $0,01\text{m}$ a $0,001 \text{ m}$. Para un radio de curvatura de $0,01\text{m}$ la normal en promedio llega a ser 50 veces el valor del peso del bloque, mientras que, para un radio de curvatura de $0,001\text{m}$ la normal en promedio alcanza a ser 500 veces el peso del bloque.

Por otro lado, puede apreciarse que a medida que el radio de curvatura se hace más pequeño la fuerza de roce en el trayecto indicado por la figura 4 crece y lo hace prácticamente con el inverso del radio de curvatura. Lo cual nos permite afirmar que el trabajo de la fuerza de roce en este trayecto para nada resulta despreciable. En consecuencia, según este modelo de unión entre bases de planos inclinados para el movimiento de un bloque de masa m , el trabajo de la fuerza de roce ya no verificará ser $W = -\mu m g (D_1 + D_2)$. En consecuencia, de las ecuaciones (21) y (23) se encuentra que el trabajo de la fuerza de roce puede descomponerse en dos términos: uno que llamamos tangencial y otro normal;

$$W = -\mu m g \cos(\theta) \Delta S - \mu m \dot{\theta}^2 R \Delta S, \quad (27)$$

donde $\Delta S = R \Delta\theta$ es el arco de circunferencia recorrido por la masa.

El término del trabajo de la fuerza de roce que designamos tangencial verifica que a medida que el radio del trayecto curvo se hace más pequeño tiende a cero pero no así el término del trabajo de la fuerza de roce que hemos designado como normal debido a que $\dot{\theta}$ crece mucho más de lo que decrece R .

Así encontramos que el trabajo de la fuerza de rozamiento en el vértice no es nulo y depende de los ángulos que forman los planos inclinados con el piso horizontal. Por lo tanto el trabajo de la fuerza de rozamiento no es invariante para distintas trayectorias que unen los puntos A y B tal como vemos en la figura 8.

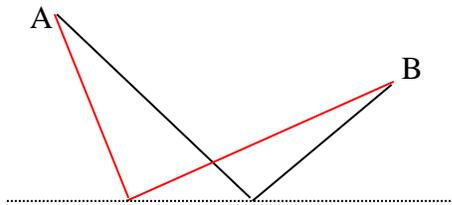


FIGURA 8. Dos trayectos diferentes que conservan el mismo valor de $(D_1 + D_2)$ y unen a los puntos A y B con dos planos inclinados. Si se obviara lo que sucede con el trabajo de la fuerza de roce en los vértices unión de los planos; el trabajo de la fuerza de roce sería un invariante: $W = -\mu m g (D_1 + D_2)$.

III. CONCLUSIONES

Se esbozaron ejemplos simples que requieren de los alumnos conocimientos de cinemática, dinámica y energía. En la presentación de uno de los ejemplos se realizó un análisis detallado de lo que ocurre con el trabajo de la fuerza de rozamiento entre el bloque y el piso al pasar por el vértice o unión de las bases de dos planos inclinados.

Análisis que entra en un detalle al cual los docentes pasamos por alto al tratar estos problemas en clase. De dicho análisis se llegó a la conclusión que, si el vértice se considera conformado por un pequeño arco de curvatura con un radio de curvatura suficientemente pequeño, el

Lo que no suele ser contado en los problemas de planos inclinados con rozamiento trabajo de la fuerza de roce en ese punto no puede considerarse despreciable.

Es importante destacar que pasar por alto lo que sucede en el vértice unión de los planos con respecto al trabajo de la fuerza de roce nos puede conducir a una contradicción. Pasar esto por alto puede inducir a considerar que el trabajo de la fuerza de roce sería un invariante para diferentes trayectos que unan dos puntos del espacio y en consecuencia nos llevaría a una contradicción con el concepto de fuerza no conservativa.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Licenciado Roberto Delellis del Instituto Tecnológico de Buenos Aires (ITBA) por sus detallados y útiles comentarios.

REFERENCIAS

- [1] Mc Call, R. P., *Variations on the Frictionless Inclined Plane Problem*, *The Physics Teacher* **42**, 212 (2004).
- [2] *A simple and surprising experiment is performed by physical science students*, *Phys. Educ.* **35**,130 (2000).
- [3] Nunes, A. M., Silva, J. P., *Tilted boxes on inclined planes*, *Am. J. Phys.* **68**, 1042 (2000).
- [4] Seaurberg Greenwood, M., *Inclined Plane on a frictionless Surface* *Phys., Teach.* **28**, 110 (1990).
- [5] Jerry, D., Wilson, A., Buffa, J., Lou, B., *College Physics*, Sexta edición, (Pearson Education, México, 2007).
- [6] Giambattista, A., Richardson, B., Richardson, R. C., Ratto, J. O., *Introducción a la dinámica newtoniana*, (Mc Graw-Hill Interamericana, Buenos Aires, 2010).
- [7] Tipler, P., Mosca, G., *Physics for Scientists and Engineers*, Sixth Edition, (Freeman and Company, New York, 2008).
- [8] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.; *Fundamentals of Physics*, 8th Edition, (John Wiley and Sons, New Jersey, 2008).
- [9] García, A. F., *Física con ordenador*, <<http://www.sc.edu.es/sbweb/fisica>>, Consultado el 21 de mayo de 2017.