Lecturas Matemáticas
Volumen **39** (1) (2018), páginas 29-48
ISSN 0120-1980

Invitación a la teoría de homotopía: Grupo fundamental y espacios recubridores

Invitation to homotopy theory: Fundamental group and covering spaces

Angélica M. Osorno

Reed College, United States

Resumen. Estas notas contienen una introducción breve al grupo fundamental y a la teoría de espacios recubridores. Fueron preparadas para la Escuela EMALCA-Ecuador 2017.

***Palabras clave*: grupo fundamental, espacios recubridores.**

Abstract. These notes contain a brief introduction to the fundamental group and the theory of covering spaces. They were prepared for the EMALCA-Ecuador 2017 Summer School.

***Key words*: Fundamental group, Covering spaces.**

AMS 2010 Mathematics Subject Classification: 55-01, 55A05, 55A10.

Índice

Introducción

El área de topología algebraica busca usar herramientas algebraicas para contestar preguntas en topología. La idea inicial es definir invariantes algebraicas de los espacios topológicos que nos permiten diferenciar espacios entre sí. ¿Qué es una invariante algebraica? Es un objeto que se asigna a cada espacio topológico, con la propiedad que las invariantes asignadas a espacios homeomorfos son isomorfas. Así, si tenemos dos espacios con diferentes invariantes, sabremos que los espacios son diferentes a su vez.

El ejemplo básico es el conjunto de componentes conexas por caminos, normalmente denotado como $\pi_0(X)$. Este conjunto se define como el conjunto de clases de equivalencia de puntos de X, donde la equivalencia se define usando caminos: x es equivalente a y si existe una función continua $f\colon [0,1] \to Y$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. No es difícil demostrar que si X e Y son homeomorfos, entonces hay una biyección $\pi_0(X) \cong \pi_0(Y)$. En este caso el invariante algebraico es simplemente un conjunto, no hay estructura algebraica adicional, de modo que *ser isomorfos* debe entenderse simplemente como que los conjuntos están en biyección.

En estas notas desarrollaremos la idea del grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$[1], el cual es una de las invariantes algebraicas más básicas. A su vez, estudiaremos la teoría de los espacios recubridores, los cuales están íntimamente relacionados con el grupo fundamental.

Las notas no contienen material original. El material está organizado acorde con el plan de presentación. Algunos textos básicos que incluyen parte de este material, y aún más (para el lector interesado) son [1], [2], [3] y [4]. Este texto fue escrito para la EMALCA-Ecuador 2017, que tuvo lugar en la Universidad San Francisco de Quito en agosto de 2017. La autora agradece a los organizadores y patrocinadores de la escuela, y también a los estudiantes participantes, cuyos comentarios contribuyeron a la versión final de estas notas.

1. El grupo fundamental

1.1. Homotopía

La noción de homotopía hace rigurosa la idea de cómo deformar una función en otra. En lo que sigue, denotamos por I al intervalo cerrado $[0,1]$.

[1] La similitud en la notación de π_0 con π_1 no es coincidencia, en general hay grupos de homotopía $\pi_n(X, x_0)$ para todo $n \geqslant 2$, los cuales generalizan estos dos.

1.1.1 Definición. Sean $f, g\colon X \to Y$ funciones continuas entre espacios topológicos. Una *homotopía* de f a g es una función continua $H\colon X \times I \to Y$, tal que para todo $x \in X$, $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$. En caso de que exista tal H, se dice que f es *homotópica* a g, y escribimos $f \simeq g$.

Notemos que si H es una homotopía, para cada $t \in I$, la función $h_t = H(-, t)\colon X \to Y$ es continua, de modo que H puede verse entonces como una familia de funciones continuas $X \to Y$ parametrizadas por t, las cuales interpolan entre f y g.

1.1.2 Ejemplo. Sea X un espacio topológico cualquiera, y $\mathbb{R}^n$ con su topología habitual. Cualesquiera dos funciones continuas $f, g\colon X \to \mathbb{R}^n$ son homotópicas, usando la homotopía

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x).$$

Notemos que este resultado se puede generalizar para dos funciones $f, g\colon X \to Y$, donde $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subespacio convexo (ver la definición 3.1). Esta homotopía se llama homotopía lineal.

La demostración de la siguiente proposición es un ejercicio para el lector.

1.1.3 Proposición. *La relación de homotopía es una relación de equivalencia sobre el conjunto de funciones continuas $X \to Y$.*

1.1.4 Definición. Una función continua $f\colon X \to Y$ es una *equivalencia homotópica* si existe una función continua $g\colon Y \to X$ tal que

$$f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y \qquad \text{y} \qquad g \circ f \simeq \mathrm{id}_X.$$

La función g es llamada un *inverso homotópico*.

Dados espacios topológicos X e Y, decimos que X es *homotópicamente equivalente* a Y si existe una equivalencia homotópica $f\colon X \to Y$.

1.1.5 Ejemplos. (a) Un homeomorfismo $f\colon X \to Y$ es una equivalencia homotópica, ya que existe un inverso $g\colon Y \to X$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ y $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Como la relación de homotopía entre funciones es una relación de equivalencia, en particular obtenemos entonces que $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ y $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$.

(b) Para todo $n \geqslant 0$, el espacio $\mathbb{R}^n$ es homotópicamente equivalente a $*$, el espacio con un punto. Para verificar esto, consideremos la función constante $f\colon \mathbb{R}^n \to *$, y la función $g\colon * \to \mathbb{R}^n$, la cual manda el único punto al origen. Por un lado, notemos que $f \circ g = \mathrm{id}_*$. Por otro lado, $g \circ f$ es homotópica a la identidad de $\mathbb{R}^n$, como lo indica el ejemplo 1.1.2. Más aún, este resultado es cierto para cualquier subespacio convexo de $\mathbb{R}^n$.

1.1.6 Definición. Un espacio topológico X es *contráctil* si es homotópicamente equivalente al espacio $*$.

El ejemplo anterior indica que $\mathbb{R}^n$ es contráctil. Así mismo, la bola cerrada unitaria de dimensión n,

$$D^n = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\overline{x}| \leqslant 1\}$$

es contráctil, ya que es un subespacio convexo de $\mathbb{R}^n$. En cambio, la n-esfera

$$S^n = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |\overline{x}| = 1\},$$

no es contráctil. Este resultado lo demostraremos para el caso $n = 1$ más adelante. El caso general no lo demostraremos en estas notas.

El siguiente resultado, aunque suene circular, indica que nuestra terminología es correcta.

1.1.7 Proposición. *La relación de equivalencia homotópica es una relación de equivalencia.*

Demostración. Recordemos que debemos demostrar que la relación es reflexiva, simétrica y transitiva.

- *(Reflexividad)* La función identidad $\mathrm{id}_X : X \to X$ es un homeomorfismo, y por lo tanto, una equivalencia homotópica.
- *(Simetría)* Supongamos que X es homotópicamente equivalente a Y. Sabemos entonces que existe una equivalencia homotópica $f\colon X \to Y$ con inverso homotópico $g\colon Y \to X$. Dada la definición, observamos que g es una equivalencia homotópica con inverso f, y concluimos que Y es homotópicamente equivalente a X.
- *(Transitividad)* Supongamos que X es homotópicamente equivalente a Y, y que Y es homotópicamente equivalente a Z. Tenemos entonces funciones $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$, $f'\colon Y \to Z$ y $g'\colon Z \to Y$, tales que

  $$f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y, \qquad g \circ f \simeq \mathrm{id}_X, \qquad f' \circ g' \simeq \mathrm{id}_Z, \qquad g' \circ f' \simeq \mathrm{id}_Y.$$

  Demostraremos que $f' \circ f\colon X \to Z$ es una equivalencia homotópica con inverso $g \circ g'\colon Z \to X$, lo cual implica que X es homotópicamente equivalente a Z. Notemos que

  $$(f' \circ f) \circ (g \circ g') = f' \circ (f \circ g) \circ g' \simeq f' \circ \mathrm{id}_Y \circ g' = f' \circ g' \simeq \mathrm{id}_Z,$$

  y así mismo,

  $$(g \circ g') \circ (f' \circ f) = g \circ (g' \circ f') \circ f \simeq g \circ \mathrm{id}_Y \circ f = g \circ f \simeq \mathrm{id}_X.$$

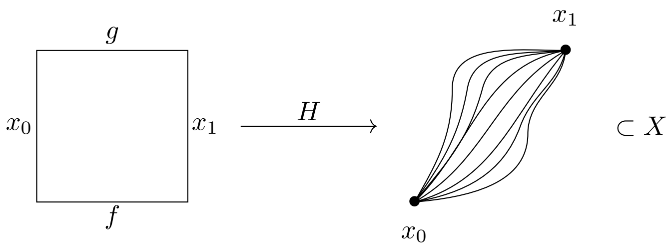
  Acá hemos utilizado la reflexividad y la transitividad de la relación $\simeq$, más el resultado del ejercicio 2.

$\square$

1.2. Definición del grupo fundamental

1.2.1 Definición. Sea X un espacio topológico, y sean x_0 y x_1 puntos de X. Un *camino* de x_0 a x_1 en X es una función continua $f\colon I \to X$ tal que $f(0) = x_0$ y $f(1) = x_1$. Si $x_0 = x_1$, decimos que f es un *lazo con base en* x_0. Dados caminos f y g de x_0 a x_1 en X, una *homotopía de caminos* de f a g es una homotopía $H\colon I \times I \to X$ de f a g tal que para todo $t \in I$,

$$H(0,t) = x_0 \qquad \text{y} \qquad H(1,t) = x_1.$$



Si existe una homotopía de caminos de f a g lo denotamos como $f \simeq_c g$.

Notemos que la condición de la definición nos da una familia de caminos $h_t = H(-,t)\colon I \to X$ de x_0 a x_1.

1.2.2 Proposición. *La relación $\simeq_c$ es una relación de equivalencia.*

La demostración es similar a la de la proposición 1.1.3. Denotaremos la clase de equivalencia del camino f como $[f]$.

1.2.3 Ejemplos. (a) Para cualesquiera dos caminos f y g de x_0 a x_1 en X un subespacio convexo de $\mathbb{R}^n$ tenemos que $[f] = [g]$, lo cual se puede demostrar usando la misma homotopía lineal del ejemplo 1.1.2, notando que ésta es también una homotopía de caminos.

(b) Dado un camino f en X, una reparametrización de f es una composición $f \circ \varphi$ donde $\varphi\colon I \to I$ es una función continua tal que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = 1$. Notemos que f y $f \circ \varphi$ trazan la misma curva en X, pero no necesariamente a la misma rapidez. Más aún, no es necesario que φ sea biyectiva, por lo tanto, es posible que $f \circ \varphi$ repita ciertos segmentos de la curva. Probaremos que $[f] = [f \circ \varphi]$. Ya que I es un subespacio convexo de $\mathbb{R}$, tenemos la homotopía lineal $H\colon I \times I \to I$ entre id_I y φ. Entonces $f \circ H\colon I \times I \to X$ es una homotopía de caminos entre f y $f \circ \varphi$.

1.2.4 Definición. Dados caminos f y g en X tales que $f(1) = g(0)$, definimos el *producto de caminos* $f \cdot g$ como

$$f \cdot g(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{si } 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ g(2s-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

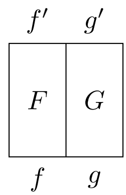
El camino $f \cdot g$ recorre f y g al doble de la velocidad, uno inmediatamente después del otro, usando en total una unidad de tiempo. La continuidad de $f \cdot g$ es dada por el teorema del pegamiento de funciones (ver el ejercicio 3).

1.2.5 Proposición. *Sean f, f', g, g' caminos en X tales que $f \simeq_c f'$, $g \simeq_c g'$ y $f(1) = g(0)$. Entonces $f \cdot g \simeq_c f' \cdot g'$.*

Demostración. Sean F y G homotopías de camino entre f y f', y entre g y g', respectivamente. Entonces para todo $t \in I$, tenemos que $F(1,t) = f(1) = g(0) = G(0,t)$. Por el teorema del pegamiento (ver el ejercicio 3), la función

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & \text{si } 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ G(2s-1,t) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

es continua, y forma una homotopía de caminos entre $f \cdot g$ y $f' \cdot g'$, como indica la figura.



□

1.2.6 Definición. Para clases de homotopía de caminos $[f]$ y $[g]$ en X, tales que $f(1) = g(0)$, definimos el *producto* como

$$[f] \cdot [g] = [f \cdot g].$$

Notemos que la proposición 1.2.5 implica que el producto está bien definido (i.e., no depende del representante de la clase de homotopía).

Dado un punto $x \in X$, denotamos como c_x el camino constante en x, es decir, $c_x(s) = x$ para todo $s \in I$. Dado un camino f en X, denotamos como $\overline{f}$ el camino en reversa, es decir, $\overline{f}(s) = f(1-s)$.

1.2.7 Proposición. *Sean f, g y h caminos en X tales que $f(1) = g(0)$ y $g(1) = h(0)$. Entonces*

(a) $[f] \cdot ([g] \cdot [h]) = ([f] \cdot [g]) \cdot [h]$,

(b) $[f] \cdot [c_{f(1)}] = [f] = [c_{f(0)}] \cdot [f]$,

(c) $[f] \cdot [\overline{f}] = [c_{f(0)}]$ y $[\overline{f}] \cdot [f] = [c_{f(1)}]$.

Demostración. Notemos que el camino $(f \cdot g) \cdot h$ es una reparametrización de $f \cdot (g \cdot h)$: ambos caminos recorren f, luego g y luego h, pero lo hacen con distinta rapidez en cada segmento. Para ser más específicos, tenemos que $(f \cdot g) \cdot h = (f \cdot (g \cdot h)) \circ \varphi$ donde

$$\varphi(s) = \begin{cases} 2s & \text{si } 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{4} + s & \text{si } \frac{1}{4} \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Siguiendo el ejemplo 1.2.3 (b), tenemos entonces que $f \cdot (g \cdot h) \simeq_c (f \cdot g) \cdot h$, lo cual prueba (a). Igualmente, $f \cdot c_{f(1)}$ y $c_{f(0)} \cdot f$ son reparametrizaciones de f, lo cual implica (b). Finalmente, para probar (c), notemos que $f \cdot \overline{f} = f \circ (\mathrm{id}_I \cdot \overline{\mathrm{id}_I})$. El camino $\mathrm{id}_I \cdot \overline{\mathrm{id}_I}$ en I, el cual es un lazo con base en 0, es homotópico al camino constante en 0, ya que $I \subset \mathbb{R}$ es convexo. Entonces tenemos que $f \circ (\mathrm{id}_I \cdot \overline{\mathrm{id}_I}) \simeq_c f \circ c_0 = c_{f(0)}$, como queríamos. La otra igualdad se demuestra de manera similar. □

1.2.8 Definición. Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$ un punto fijo. El *grupo fundamental* de X con punto base x_0, denotado como $\pi_1(X, x_0)$ consiste del conjunto de clases de homotopía de lazos con base en x_0, con el producto dado por $[f] \cdot [g]$.

El hecho de que eso es un grupo es una consecuencia directa de la proposición 1.2.7. Notemos que el elemento neutro es la clase de homotopía del camino constante en x_0.

1.2.9 Ejemplo. Si $X \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio convexo, para todo $x_0 \in X$, el grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo al grupo trivial, ya que todo lazo con base en x_0 es homotópico al lazo constante.

1.2.10 Definición. Un espacio X es *simplemente conexo* si es arcoconexo (ver la definición 3.2), y para todo $x_0 \in X$, el grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ es trivial.

1.3. Propiedades del grupo fundamental

¿Cómo depende el grupo fundamental del punto base? ¿Cómo se comporta con respecto a funciones continuas? En esta sección responderemos estas preguntas.

1.3.1 Proposición. *Sea α un camino en X de x_0 a x_1. Entonces la función*

$$\widehat{\alpha} \colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$$

definida como $\alpha([f]) = [\overline{\alpha}] \cdot [f] \cdot [\alpha]$ es un isomorfismo de grupos.

Demostración. La función está bien definida ya que el producto está bien definido (es independiente del representante de la clase de homotopía). Aún más, la función es un homomorfismo de grupos:

$$\widehat{\alpha}([f] \cdot [g]) = [\overline{\alpha}] \cdot [f] \cdot [g] \cdot [\alpha] = [\overline{\alpha}] \cdot [f] \cdot [\alpha] \cdot [\overline{\alpha}] \cdot [g] \cdot [\alpha] = \widehat{\alpha}([f]) \cdot \widehat{\alpha}([g]).$$

Finalmente, podemos verificar que el homomorfismo $\widehat{\overline{\alpha}}$ es el inverso de $\widehat{\alpha}$. □

1.3.2 Definición. Un *espacio puntuado* (X, x_0) consiste de un espacio topológico X y de un punto $x_0 \in X$. Una *función puntuada* $h\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ es una función continua $h\colon X \to Y$ tal que $h(x_0) = y_0$.

1.3.3 Definición. Sean (X, x_0) y (Y, y_0) espacios puntuados, y $h\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ una función puntuada. El *homomorfismo inducido por* h es la función

$$h_*\colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

definida como $h_*([f]) = [h \circ f]$.

Debemos chequear que la función está bien definida y que es un homomorfismo. Lo primero se deduce del Ejercicio 2. Lo segundo es consecuencia de la ecuación

$$h \circ (f \cdot g) = (h \circ f) \cdot (h \circ g), \tag{1}$$

la cual se chequea fácilmente usando la definición del producto y mirando los casos.

1.3.4 Proposición. *Si* $h\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *y* $k\colon (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ *son funciones continuas entre espacios puntuados, entonces* $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$. *La función identidad* $\mathrm{id}\colon (X, x_0) \to (X, x_0)$ *induce el homomorfismo identidad* $\mathrm{id}\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.

Demostración. Para probar el primer resultado, tenemos que para todo $[f] \in \pi_1(X, x_0)$,

$$(k \circ h)_*([f]) = [(k \circ h) \circ f] = [k \circ (h \circ f)] = k_*([h \circ f]) = k_*(h_*([f])) = (k_* \circ h_*)([f]).$$

La segunda parte es inmediata. □

El siguiente corolario indica que el grupo fundamental es una invariante topológica.

1.3.5 Corolario. *Si* $h\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *es un homeomorfismo, entonces* $h_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ *es un isomorfismo.*

Demostración. Sea h^{-1} el inverso de h. Entonces $(h^{-1})_*$ es el inverso de h_*:

$$(h^{-1})_* \circ h_* = (h^{-1} \circ h)_* = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X, x_0)}$$

$$h \circ (h^{-1})_* = (h \circ h^{-1})_* = (\mathrm{id}_Y)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(Y, y_0)}.$$

□

El siguiente resultado generaliza el anterior. Para la demostración, debemos tener cuidado con la diferencia entre homotopías en general y homotopías por caminos.

1.3.6 Teorema. *Sea* $h\colon X \to Y$ *una equivalencia homotópica. Entonces el homomorfismo inducido*

$$h_*\colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, h(x_0))$$

es un isomorfismo para todo $x_0 \in X$.

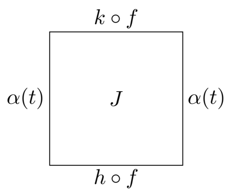
Para probar este teorema primero probaremos un lema auxiliar.

1.3.7 Lema. *Sean $h, k\colon X \to Y$ funciones continuas, y H una homotopía de h a k. Sea α el camino de $h(x_0)$ a $k(x_0)$ definido como $\alpha(t) = H(x_0, t)$. Entonces el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(X, x_0) \arrow[dl, "h_*"'] \arrow[dr, "k_*"] & \\
\pi_1(Y, h(x_0)) \arrow[rr, "\widehat{\alpha}"'] & & \pi_1(Y, k(x_0))
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, es decir, $\widehat{\alpha} \circ h_* = k_*$.

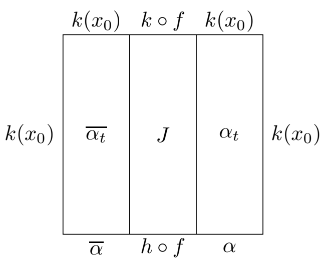
Demostración. Tenemos que demostrar que dado un lazo f en X con base en x_0, los lazos $k \circ f$ y $\overline{\alpha} \cdot (h \circ f) \cdot \alpha$ son equivalentes vía una homotopía de caminos. Por un lado, consideremos el camino $\alpha_t\colon I \to Y$ definido como $\alpha_t(s) = \alpha((1-t)s + t)$. Este es un camino que conecta $\alpha_t(0) = \alpha(t)$ con $\alpha_t(1) = \alpha(1) = k(x_0)$. Notemos que $\alpha_0 = \alpha$ y $\alpha_1 = c_{k(x_0)}$. Por otro lado, consideremos la homotopía $J\colon I \times I \to Y$ dada por $J(s,t) = H(f(s), t)$. Ésta no es una homotopía de caminos, lo que ocurre en la frontera del cuadrado está demarcado en la siguiente figura.



Finalmente, consideremos la homotopía $K\colon I \times I \to Y$ definida como

$$K(-, t) = \overline{\alpha_t} \cdot J(-, t) \cdot \alpha_t.$$

Ésta sí es una homotopía de lazos con base en $k(x_0)$, y conecta a $\overline{\alpha} \cdot (h \circ f) \cdot \alpha$ con $c_{k(x_0)} \cdot (k \circ f) \cdot c_{k(x_0)}$, el cual a su vez es homotópicamente equivalente a $k \circ f$.



□

Demostración del teorema 1.3.6. Sea $k\colon Y \to X$ un inverso homotópico de h, es decir $h \circ k \simeq \mathrm{id}_Y$ y $k \circ h \simeq \mathrm{id}_X$. Sea H una homotopía que conecta id_X con $k \circ h$, y α el camino correspondiente de x_0 a $kh(x_0)$. Por la proposición 1.3.4 y el lema 1.3.7,

$$\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha} \circ (\mathrm{id}_X)_* = (k \circ h)_* = k_* \circ h_*.$$

Como $\widehat{\alpha}$ es un isomorfismo, se sigue que h_* is inyectiva y k_* es sobreyectiva. Análogamente, usando la homotopía que conecta id_Y con $h \circ k$, podemos demostrar que h_* es sobreyectiva y k_* es inyectiva. □

1.4. Ejercicios

1. Demuestre que la relación de homotopía entre funciones continuas $X \to Y$ es una relación de equivalencia.
2. Sean $f, f'\colon X \to Y$ y $g, g'\colon Y \to Z$ funciones continuas. Demuestre que
   - si $f \simeq f'$, entonces $g \circ f \simeq g \circ f'$;
   - si $g \simeq g'$, entonces $g \circ f \simeq g' \circ f$.
3. Sea X un espacio topológico, y sean $A, B \subseteq X$ ambos abiertos o ambos cerrados, tales que $A \cup B = X$. Si $f\colon A \to Y$ y $g\colon B \to Y$ son funciones continuas que coinciden en $A \cap B$, la función $h\colon X \to Y$ definida como
$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$
   es continua.
4. Demuestre que para todo $n \geqslant 1$, los espacios $\mathbb{R}^n \setminus \{\overline{0}\}$ y S^{n-1} son homotópicamente equivalentes.
5. Sean α un camino en X de x_0 a x_1, β un camino en X de x_1 a x_2. Demuestre que $\widehat{\alpha \cdot \beta} = \widehat{\beta} \circ \widehat{\alpha}$.
6. Sea X un espacio arcoconexo, y x_0, x_1 puntos en X. Demuestre que $\pi_1(X, x_0)$ es abeliano si y sólo si para cualquier par de caminos α y β de x_0 a x_1, tenemos que $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$.
7. Dados espacios X e Y, denotamos como $[X, Y]$ el conjunto de clases de homotopía de funciones continuas $X \to Y$. Un lazo $f\colon I \to X$ con base en x_0 se puede considerar como una función continua $\widetilde{f}\colon S^1 \to X$ que manda $1 \in S^1 \subset \mathbb{C}$ a x_0. Esta identificación induce una función bien definida
$$\Phi\colon \pi_1(X, x_0) \to [S^1, X].$$
   (Notemos que en la definición de $\pi_1(X, x_0)$ usamos homotopías por caminos, y en la definición de $[S^1, X]$ usamos todas las homotopías.)
   a) Demuestre que si X es arcoconexo, entonces Φ es sobreyectiva.
   b) Demuestre que $\Phi([f]) = \Phi([g])$ si y sólo si $[f]$ y $[g]$ son conjugados en $\pi_1(X, x_0)$.
8. Sean X e Y espacios topológicos, y $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Demuestre que $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ es isomorfo al grupo $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

2. Espacios recubridores

2.1. Definición de espacio recubridor

En un curso de topología algebraica, es común primero calcular el grupo fundamental del círculo y luego hablar de espacios recubridores, teniendo en cuenta que la teoría de espacios recubridores generaliza los aspectos más distintivos del método usado para calcular el grupo fundamental del círculo, y así, da la motivación necesaria. Por cuestiones de espacio en estas notas vamos a desarrollar la teoría de espacios recubridores primero[2], y luego calcularemos el grupo fundamental del círculo.

2.1.1 Definición. Sea $p\colon E \to B$ una función continua y sobreyectiva. Decimos que un conjunto abierto U de B está *uniformemente cubierto* si la preimagen $p^{-1}(U)$ es una unión disjunta de conjuntos abiertos V_α, tales que para todo α la restricción de p a V_α es un homeomorfismo sobre U.

Una *función recubridora* es una función continua y sobreyectiva $p\colon E \to B$ tal que para todo $b \in B$ existe una vecindad U de b la cual es uniformemente cubierta. Decimos que el espacio E es un *espacio recubridor* de B. Los conjuntos V_α son llamados las *hojas* sobre U.

Si E es simplemente conexo, decimos que E es un espacio recubridor *universal*.

2.1.2 Observación. Notemos que si $p\colon E \to B$ es una función recubridora, para todo $b \in B$, el subespacio $p^{-1}(b)$ de E (llamado *fibra sobre* b) tiene la topología discreta, ya que cada V_α intersecta a $p^{-1}(b)$ en exactamente un punto.

2.1.3 Ejemplos.

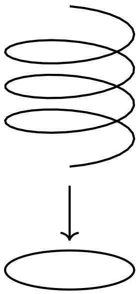
(a) Para todo espacio X, la función identidad $\mathrm{id}_X : X \to X$ es una función recubridora. Si D es un espacio discreto, la proyección $p\colon D\times X \to X$ es una función recubridora. En este caso, $D \times X$ es la unión disjunta de copias de X, indexada por los elementos de D. En este caso decimos que p es una función recubridora *trivial*.

(b) Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces es un espacio recubridor. En este caso el número de hojas es 1.

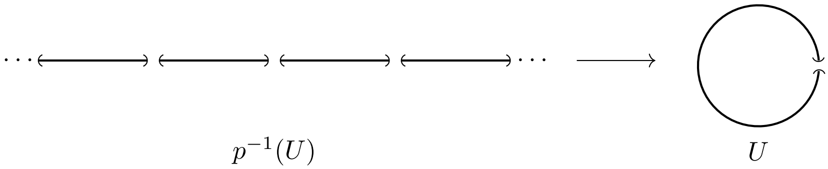
(c) Consideremos el círculo S^1 como el subespacio del plano complejo $\mathbb{C}$ dado por los elementos de magnitud 1. La función $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ definida por $p(s) = e^{2\pi i s}$ es una función recubridora. Esta función enrolla $\mathbb{R}$ como una hélice sobre S^1, de manera que cada intervalo $[n, n+1]$ da una vuelta completa.

---

[2] No se debe confundir la noción de *espacio recubridor* que se expone aquí (*covering space*, o *revêtement*), con la noción de cubrimiento asociada al *número de Lebesgue de un cubrimiento*, aunque la terminología sea muy parecida se trata de nociones muy diferentes.



Para demostrar que p es una función recubridora, tomemos los subconjuntos abiertos $U = S^1 \setminus \{1\}$ y $V = S^1 \setminus \{-1\}$. Estos conjuntos claramente cubren S^1, por lo tanto es suficiente demostrar que ambos son uniformemente cubiertos por p. La preimagen $p^{-1}(U)$ consiste de la unión disjunta de los intervalos abiertos $(n, n+1)$ para $n \in \mathbb{Z}$, los cuales son homeomorfos a U vía la restricción de p. Análogamente, $p^{-1}(V)$ es la unión disjunta de los intervalos $(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ para $n \in \mathbb{Z}$.



(d) La función $p\colon S^1 \to S^1$ dada por $p(z) = z^n$ para un entero positivo n es una función recubridora de n hojas.

Una de las propiedades más importantes de los espacios recubridores es el levantamiento de caminos, y aún más general, de homotopías.

2.1.4 Proposición. *Dados una función recubridora $p\colon E \to B$, una homotopía $H\colon X \times I \to B$ y un levantamiento $\widetilde{f}\colon X \to E$ de $H(-,0)$ (es decir, $p \circ \widetilde{f} = H(-,0)$), existe una única homotopía $\widetilde{H}$ que levanta H y restringe a $\widetilde{f}$.*

$$\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & B
\end{tikzcd}$$

Demostración. Fijemos un punto $(x,t) \in X \times I$. Entonces existe una vecindad U_t de $H(x,t) \in B$ la cual es uniformemente cubierta por p. Como H es una función continua, existe una vecindad $V_t \times (a_t, b_t)$ de (x,t) en $X \times I$ tal que $H(V_t \times (a_t, b_t)) \subseteq U_t$.[3]

[3] Si $t = 0$, el abierto en I es de la forma $[0, b_t)$, igualmente, si $t = 1$ el abierto en I es de la forma $(a_t, 1]$.

Como $\{x\} \times I$ es un espacio compacto, podemos tomar un número finito de valores de t de tal manera que los conjuntos $V_t \times (a_t, b_t)$ cubren $\{x\} \times I$. Sea V la intersección de tales V_t, y sean $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ puntos en las intersecciones de los intervalos abiertos (a_t, b_t) que cubren I. Entonces para todo $1 \leqslant i \leqslant m$, tenemos que $H(V \times [t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_i := U_t$, para algún t de ese conjunto finito. Como U_t es uniformemente cubierto para todo t, U_i lo es también.

Ahora procedemos por inducción en i. Supongamos que la función $\widetilde{H}$ ha sido definida en $V \times [0, t_i]$, notando que el caso base es dado for $\widetilde{f}$. Como U_{i+1} es uniformemente cubierto por p, existe una única hoja $\widetilde{U}_{i+1}$ del recubrimiento tal que $\widetilde{H}(x, t_i) \in \widetilde{U}_{i+1}$. Reemplazando V por una vecindad más pequeña de x en X, podemos suponer que $\widetilde{H}(V \times \{t_i\}) \subseteq \widetilde{U}_{i+1}$. Entonces podemos definir $\widetilde{H}$ sobre $V \times [t_i, t_{i+1}]$ usando la composición

$$V \times [t_i, t_{i+1}] \xrightarrow{H} U_{i+1} \xrightarrow{p^{-1}} \widetilde{U}_{i+1}.$$

Suponiendo unicidad, las funciones definidas para los diferentes vecindarios de los puntos de X podrán ser pegadas usando el teorema del pegamiento (Ejercicio 1.3.3).

Para demostrar unicidad, es suficiente hacerlo en el caso en que $X = \{*\}$. Supongamos que tenemos dos levantamientos $\widetilde{H}$ y $\widetilde{H}'$ de H. Al igual que en la parte anterior, podemos obtener una partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ de I tal que $H([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$ para un abierto U_i uniformemente cubierto por p. Una vez más usaremos inducción. Supongamos que $\widetilde{H}$ y $\widetilde{H}'$ coinciden sobre $[0, t_i]$. El hecho de que $\widetilde{H}(0) = \widetilde{f}(0) = \widetilde{H}'(0)$ da el caso base. Como $[t_i, t_{i+1}]$ es conexo, $\widetilde{H}([t_i, t_{i+1}])$ vive en una de las componentes conexas de $p^{-1}(U_{i+1})$, la cual tiene que ser la misma en la que vive $\widetilde{H}'([t_i, t_{i+1}])$, ya que las funciones coinciden en t_i. Como p es inyectiva sobre esta componente conexa y $p \circ \widetilde{H} = H = p \circ \widetilde{H}'$, obtenemos que $\widetilde{H} = \widetilde{H}'$ sobre $[t_i, t_{i+1}]$.

□

Usando $X = *$, el resultado dice que podemos levantar caminos, y usando $X = I$, podemos levantar homotopías de caminos. En particular, dados una función recubridora $p\colon E \to B$, un punto base $b_0 \in B$, un levantamiento $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ y un elemento $[f] \in \pi_1(B, b_0)$ existe un levantamiento $\widetilde{f}$, el cual es un camino en E que comienza en e_0. Así podemos definir una función

$$\varphi\colon \pi_1(B, b_0) \longrightarrow p^{-1}(b_0),$$

dada como $\varphi([f]) = \widetilde{f}(1)$. Esta función está bien definida (ver el ejercicio 13). Esta función se llama la *correspondencia por levantamiento*.

2.1.5 Teorema. *Sean $p\colon E \to B$ una función recubridora, $b_0 \in B$ un punto base, y $e_0 \in p^{-1}(b_0)$.*

(a) *El homomorfismo $p_*\colon \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$ es inyectivo.*

(b) *Si* $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$*, la correspondencia por levantamiento induce una función inyectiva*

$$\varphi : H\backslash\pi_1(B, b_0) \longrightarrow p^{-1}(b_0),$$

donde el dominio es el conjunto de coclases por la derecha. Si E *es arcoconexo la función es también sobreyectiva.*

(c) *Los elementos de* H *son exactamente aquellas clases de homotopía de lazos en* B *con base en* b_0 *cuyos levantamientos que empiezan en* e_0 *son lazos.*

(d) *El número de hojas de un espacio recubridor* E *arcoconexo es igual al índice de* H *en* $\pi_1(B, b_0)$.

Demostración.

(a) Sea $\widetilde{f}: I \to E$ un lazo con base en e_0 tal que $p_*[\widetilde{f}] = [p \circ \widetilde{f}] = [c_{b_0}]$. Entonces existe una homotopía de caminos $H: I \times I \to B$ de $p \circ \widetilde{f}$ a c_{b_0}. Por la proposición 2.1.4, existe una homotopía $\widetilde{H}: I \times I \to E$ tal que $p \circ \widetilde{H} = H$ y $\widetilde{H}(-, 0) = \widetilde{f}$. Notemos que el camino $\widetilde{H}(0, -)$ levanta el camino constante en b_0 que empieza en e_0, entonces por unicidad tenemos que $\widetilde{H}(0, -) = c_{e_0}$. Lo anterior también es cierto para $\widetilde{H}(1, -)$ y $\widetilde{H}(-, 1)$, de lo que se sigue que $\widetilde{H}$ es una homotopía de caminos entre $\widetilde{f}$ y c_{e_0}, lo cual demuestra que p_* es un homomorfismo inyectivo.

(b) Primero debemos demostrar que la función está bien definida. Sea $[f] \in \pi_1(B, b_0)$ y $h = p \circ \widetilde{h}$, con $\widetilde{h}$ un lazo E con base en e_0. Sea $\widetilde{f}$ el levantamiento de f que comienza en e_0. Entonces el camino $\widetilde{h} \cdot \widetilde{f}$ existe, y aún más, es el levantamiento de $h \cdot f$ que comienza en e_0. Entonces $\varphi([f]) = \widetilde{f}(1) = \widetilde{h} \cdot \widetilde{f}(1) = \varphi([h \cdot f])$, lo cual demuestra que φ es independiente de la coclase por la derecha con respecto a H.

   Para demostrar inyectividad, supongamos que $\varphi([f]) = \varphi([g])$. Entonces los levantamientos $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ terminan en el mismo punto, y por lo tanto, podemos definir $\widetilde{h}$ como el lazo con base en e_0 dado por $\widetilde{f} \cdot \overline{\widetilde{g}}$. Entonces $[f \cdot \overline{g}] = [(p \circ \widetilde{f}) \cdot (p \circ \overline{\widetilde{g}})] = [p \circ \widetilde{h}] \in H$, lo cual indica que $[f]$ y $[g]$ están en la misma coclase.

   Finalmente, supongamos que E es arcoconexo. Entonces para todo $e_1 \in p^{-1}(b_0)$ existe un camino $\widetilde{f}$ de e_0 a e_1. Entonces $f = p \circ \widetilde{f}$ es un lazo con base en b_0 cuyo levantamiento es precisamente $\widetilde{f}$, así que $\varphi([f]) = e_1$.

(c) Como $\varphi([c_{b_0}]) = e_0$, la inyectividad de la parte anterior implica que $\varphi([f]) = e_0$ si y sólo si $[f] \in H$.

(d) Se deduce directamente de (b).

□

2.2. Entremés: el grupo fundamental del círculo

Con las bases de la teoría de espacios recubridores podemos ahora calcular el grupo fundamental del círculo. Recordemos el ejemplo 2.1.3 (c), el cual dice que $\mathbb{R}$ es un espacio recubridor de S^1, vía la función $p: \mathbb{R} \to S^1$ definida como $p(s) = e^{2\pi is}$. Tomaremos

$1 \in S^1 \subset \mathbb{C}$ y $0 \in \mathbb{R}$ como los puntos base. Tenemos que $\pi_1(\mathbb{R}, 0)$ es el grupo trivial (ver el ejemplo 1.2.9). Entonces, por el teorema 2.1.5

$$\varphi\colon \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow p^{-1}(1)$$

es una función biyectiva. Notemos además que $p^{-1}(1) = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, el conjunto de enteros. Para terminar el cálculo del grupo fundamental, basta demostrar el siguiente teorema.

2.2.1 Teorema. *La función $\varphi\colon \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$ es un isomorfismo de grupos.*

Demostración. Sean f y g lazos en S^1 con base en 1, con $m = \varphi([f])$ y $n = \varphi([g])$, y tomamos levantamientos $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$, respectivamente, en $\mathbb{R}$ que comienzan en 0. El camino $\widetilde{g}_m$ definido como $\widetilde{g}_m(s) = m + \widetilde{g}(s)$ es un camino en $\mathbb{R}$ que empieza en m y termina en $m + n$. Más aún, tenemos que

$$p \circ \widetilde{g}_m(s) = p(m + \widetilde{g}(s)) = p(\widetilde{g}(s)) = g(s),$$

lo cual dice que $\widetilde{g}_m$ es el levantamiento de g que empieza en m. Así que podemos tomar el producto $\widetilde{f} \cdot \widetilde{g}_m$, el cual es un camino que empieza en 0 y termina en $m + n$. Además,

$$p \circ (\widetilde{f} \cdot \widetilde{g}_m) = (p \circ \widetilde{f}) \cdot (p \circ \widetilde{g}_m) = f \cdot g,$$

lo cual implica que $\widetilde{f} \cdot \widetilde{g}_m$ es el levantamiento de $f \cdot g$ que empieza en 0, así que

$$\varphi([f] \cdot [g]) = m + n = \varphi([f]) + \varphi([g]).$$

$\square$

2.2.2 Observación. Dado $n \in \mathbb{Z}$, consideremos el lazo $\omega_n\colon I \to S^1$ definido como $\omega_n(s) = e^{2\pi i n s}$. Este camino enrolla el intervalo $|n|$ veces alrededor del círculo, en el sentido contrario a las manecillas del reloj si n es positivo. El levantamiento de ω_n a $\mathbb{R}$ que comienza en 0 es la función $\widetilde{\omega}_n(s) = ns$, por lo tanto, $\varphi([\omega_n]) = n$. El hecho de que φ es una biyección implica que todos los lazos en S^1 con base en 1 son homotópicos a ω_n para un único n, y podemos pensar en $\varphi([f])$ como el número de "vueltas" que da f alrededor de S^1.

Aunque no presentaremos la demostración del siguiente resultado, lo señalamos para contrastar el anterior.

2.2.3 Teorema. *Para todo $n \geqslant 2$, el grupo fundamental $\pi_1(S^n, x_0)$ es trivial.*

Ahora presentamos un par de resultados que son consecuencia directa del cálculo del grupo fundamental del círculo. En general hay una larga lista de resultados muy bellos. Ver por ejemplo [4, §§55-56] y [1, §1.1].

2.2.4 Proposición. *Los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ no son homeomorfos.*

Demostración. Supongamos que existe un homeomorfismo $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f(0,0) = (0,0,0)$ (si no es así, podemos componer con una translación). Entonces tenemos un homeomorfismo

$$f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}.$$

Por el resultado del ejercicio 4, $\mathbb{R}^n \setminus \{\overline{0}\}$ es homotópicamente equivalente a S^{n-1}, y por lo tanto, usando el teorema 1.3.6 tenemos que $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ y $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}) \cong \pi_1(S^2)$ es trivial, por lo tanto, el homeomorfismo no puede existir. $\square$

2.2.5 Teorema (Teorema del punto fijo de Brouwer)**.** *Si $f\colon D^2 \to D^2$ es una función continua, entonces existe un punto $x \in D^2$ tal que $f(x) = x$.*

Demostración. Procederemos por contradicción, así que supongamos que para todo $x \in D^2$, $f(x) \neq x$. Definamos una función $r\colon D^2 \to S^1$ donde $r(x)$ es el punto sobre S^1 que está sobre el rayo que conecta $f(x)$ con x. Sea $i\colon S^1 \to D^2$ la inclusión estándar, y notemos que para todo $x \in S^1$, $r(x) = x$, lo cual quiere decir que $r \circ i = \mathrm{id}_{S^1}$. Entonces tenemos que el compuesto

$$\pi_1(S^1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(D^2) \xrightarrow{r_*} \pi_1(S^1)$$

es la identidad, pero esto no puede pasar porque $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ y $\pi_1(D^2)$ es trivial. $\square$

2.2.6 Observación. El teorema del punto fijo de Brouwer se puede generalizar para todo D^n con $n \geqslant 1$. La demostración que presentamos también se puede generalizar, usando el grupo de homotopía π_n. Por un lado, tenemos que $\pi_n(D^n)$ es trivial, ya que D^n es contráctil. Por otro lado, $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$. La estrategia es la misma, definiendo la función r tal que $r \circ i = \mathrm{id}_{S^n}$.

2.3. Clasificación de espacios recubridores

En esta sección probaremos que los espacios recubridores de un espacio B están relacionados con los subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$. En adelante supondremos que B es arcoconexo y localmente arcoconexo (ver la definición 3.3).

2.3.1 Proposición. *Sean $p\colon E \to B$ una función recubridora y $e_0 \in E$, $b_0 = p(e_0) \in B$ puntos base. Sean Y un espacio arcoconexo y localmente arcoconexo, y $f\colon (Y, y_0) \to (B, b_0)$ una función continua de espacios puntuados. Entonces existe un levantamiento $\widetilde{f}\colon (Y, y_0) \to (E, e_0)$*

$$\begin{tikzcd} & (E, e_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y, y_0) \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & (B, b_0) \end{tikzcd}$$

si y sólo si

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

Más aún, si tal $\widetilde{f}$ existe, es único.

Bosquejo de la demostración. Si f existe, entonces $f_* = p_* \circ \widetilde{f}_*$, y se sigue inmediatamente que la imagen de f_* está contenida en la imagen de p_*. Para demostrar la dirección contraria, debemos construir $\widetilde{f}$. Dado un punto y en Y, tomamos un camino α en Y de y_0 a y. El camino $f \circ \alpha$ es un camino en B de b_0 a $f(y)$, así que podemos tomar su levantamiento $\widetilde{f \circ \alpha}$ en E que comienza en e_0. Definiremos $\widetilde{f}(y)$ como $\widetilde{f \circ \alpha}(1)$. Es claro que $p \circ \widetilde{f} = f$. El contenimiento de subgrupos se usa para demostrar que está función es independiente del camino que se tome. La continuidad de $\widetilde{f}$ usa este hecho y que Y es localmente arcoconexo. □

Para ver más detalles de esta demostración, el lector puede consultar [1, Prop. 1.33].

2.3.2 Definición. Sean $p_1 \colon E_1 \to B$ y $p_2 \colon E_2 \to B$ funciones recubridoras sobre B. Un *morfismo de espacios recubridores* es una función continua $f \colon E_1 \to E_2$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Decimos que f es un *isomorfismo de espacios recubridores* si f es un homeomorfismo.

2.3.3 Teorema. *Sean $p_1 \colon E_1 \to B$ y $p_2 \colon E_2 \to B$ espacios recubridores con E_1 y E_2 arcoconexos, con puntos base $e_1 \in E_1$ y $e_2 = E_2$ tales que $p_1(e_1) = b_0 = p_2(e_2)$.*

(a) *Existe un morfismo de espacios recubridores $f \colon E_1 \to E_2$ tal que $f(e_1) = e_2$ si y sólo si*

$$p_{1*}(\pi_1(E_1, e_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(E_2, e_2)).$$

Más aún, si tal f existe, es único.

(b) *Existe un isomorfismo $f \colon E_1 \to E_2$ tal que $f(e_1) = e_2$ si y sólo si*

$$p_{1*}(\pi_1(E_1, e_1)) = p_{2*}(\pi_1(E_2, e_2)).$$

Más aún, si tal f existe, es único.

(c) *Los espacios recubridores E_1 y E_2 son isomorfos si y sólo si los subgrupos $p_{1*}(\pi_1(E_1, e_1))$ y $p_{2*}(\pi_1(E_2, e_2))$ de $\pi_1(B, b_0)$ son conjugados.*

2.3.4 Observación. Nótese que en la parte (b), el isomorfismo f es una función puntuada, mientras que en la parte (c), no lo es necesariamente.

Demostración.

(a) Es consecuencia directa de la proposición 2.3.1.

(b) Si existe f con inverso f^{-1}, la primera dirección de (a) implica la igualdad de los subgrupos. La segunda dirección de (a) implica que si los subgrupos son iguales, existen morfismos $f\colon E_1 \to E_2$ y $g\colon E_2 \to E_1$, tales que $f(e_1) = e_2$ y $g(e_2) = e_1$. La composición $g \circ f\colon E_1 \to E_1$ es un morfismo de espacios recubridores, y por la unicidad de (a), debe ser igual a la identidad id_{E_1}. Igualmente obtenemos que $f \circ g = \mathrm{id}_{E_2}$, lo cual implica que f es un homeomorfismo.

(c) La parte (b) implica que si $f\colon E_1 \to E_2$ un isomorfismo, entonces

$$p_{1*}(\pi_1(E_1, e_1)) = p_{2*}(\pi_1(E_2, f(e_1))).$$

Sea α un camino de e_2 a $f(e_1)$ en E_2, y $\beta = p_2 \circ \alpha$. Notemos que β es un lazo en B con base en b_0. Entonces, usando el ejercicio 14,

$$[\overline{\beta}] \cdot \big(p_{2*}(\pi_1(E_2, e_2))\big) \cdot [\beta] = p_{2*}(\pi_1(E_2, f(e_1))).$$

Para probar la otra dirección, supongamos que

$$[\overline{g}] \cdot \big(p_{2*}(\pi_1(E_2, e_2))\big) \cdot [g] = p_{1*}(\pi_1(E_1, e_1)),$$

donde g es un lazo en B con base en b_0. Sea $\widetilde{g}$ el levantamiento de g a E_2 que comienza en e_2. Entonces, usando el ejercicio 14, tenemos que

$$[\overline{g}] \cdot \big(p_{2*}(\pi_1(E_2, e_2))\big) \cdot [g] = p_{2*}(\pi_1(E_2, \widetilde{g}(1)).$$

y el resultado se sigue de (b).

$\square$

Este teorema dice que dado un espacio arcoconexo y localmente arcoconexo B, el conjunto de clases de isomorfismo de espacios recubridores de B (arcoconexos) tiene a lo más un elemento por cada clase de conjugación de subgrupos de $\pi_1(B, b_0)$. Por cuestiones de espacio no presentaremos la demostración del siguiente teorema, el cual implica la existencia de todos los espacios recubridores posibles, dadas ciertas condiciones sobre B. Para más detalles, el lector puede consultar [1, Prop. 1.36].

2.3.5 Teorema. *Si B es conexo, arcoconexo y semilocalmente simplemente conexo (ver la definición 3.4), entonces B tiene un espacio recubridor universal. Más aún, si H es un subgrupo de $\pi_1(B, b_0)$, existe un espacio recubridor $p_H\colon E_H \to B$ y un punto base e_0 tales que $p_{H*}(\pi_1(E_H, e_0)) = H$.*

El espacio recubridor universal se construye dando una topología al conjunto de clases de homotopía de caminos en B que empiezan en b_0. El espacio E_H se construye como un cociente del universal.

2.4. Ejercicios

10. Sea $p\colon E \to B$ una función recubridora. Demuestre (sin usar el teorema 2.1.5) que si B es conexo, todas las fibras de p tienen la misma cardinalidad.
11. Demuestre que para todo $n > 0$, la función $p(z) = z^n$ del ejemplo 2.1.3 (d) es una función recubridora $p\colon S^1 \to S^1$.
12. Demuestre que si $p_1\colon E_1 \to B_1$ y $p_2\colon E_2 \to B_2$ son funciones recubridoras, entonces $p_1 \times p_2\colon E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2$ también lo es.
13. Sean $p\colon E \to B$ una función recubridora y $b_0 \in B$, $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ puntos base. Dado un lazo f con base en b_0, sea $\widetilde{f}$ el levantamiento que empieza en e_0. Demuestre que la función
$$\varphi\colon \pi_1(B, b_0) \longrightarrow p^{-1}(b_0)$$
dada por $\varphi([f]) = \widetilde{f}(1)$ está bien definida (i.e., es independiente de el representante de la clase de homotopía).
14. Sean $p\colon E \to B$ una función recubridora, b_0 un punto base en B y $e_0, e_0' \in p^{-1}(b_0)$. Sean α un camino en E de e_0 a e_0' y $\beta = p \circ \alpha$. Demuestre que
$$[\overline{\beta}] \cdot \big(p_*(\pi_1(E, e_0))\big) \cdot [\beta] = p_*(\pi_1(E, e_0')).$$
15. Sea G un grupo topológico con elemento neutro e. Sea $p\colon H \to G$ una función recubridora con H arcoconexo y localmente arcoconexo. Tomemos $\widetilde{e} \in p^{-1}(e)$. Demuestre que existe una única multiplicación asociativa y continua $\mu\colon H \times H \to H$ con elemento neutro $\widetilde{e}$ que levanta la multiplicación de G.

3. Apéndice: definiciones de topología

3.1 Definición. *Un subespacio X de $\mathbb{R}^n$ es* convexo *si para todo par de puntos en X, el segmento que los conecta está contenido en X.*

3.2 Definición. *Un espacio X es* arcoconexo *si para todo par de puntos (x, y) en X, existe un camino en X de x a y.*

3.3 Definición. *Un espacio X es* localmente arcoconexo *si para todo $x \in X$ y U una vecindad de x, existe una vecindad V de x tal que $V \subseteq U$ y V es arcoconexo.*

3.4 Definición. *Un espacio X es* semilocalmente simplemente conexo *si para todo punto x existe una vecindad U tal que todo lazo en U con base en x es homotópico (en X) al lazo constante.*

Referencias

[1] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[2] W. S. Massey, *Algebraic topology: an introduction*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977, Reprint of the 1967 edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 56.

[3] J. P. May, , Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999.

[4] J. R. Munkres, *Topology: a first course*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

Recibido en agosto de 2017. Aceptado para publicación en febrero de 2018.

Angélica M. Osorno
Department of Mathematics
Reed College
Portland, Oregon
e-mail: aosorno@reed.edu