

**Conducción de Calor en Placas Metálicas Perforadas.
Parte I: Modelo y Solución Débil en un Paso de Tiempo**

Wilfredo Angulo +

Eligio Colmenares*

RESUMEN

Proponemos una formulación débil de un modelo de conducción de calor para la detección de perforaciones en placas metálicas. Una discretización implícita en tiempo produce un sistema lineal acoplado de ecuaciones diferenciales parciales. En cada paso de tiempo, el sistema se reduce a un problema de Helmholtz con condiciones de frontera tipo Robin y demostramos que su formulación débil equivalente es un problema bien planteado.

Palabras clave: Formulación débil, modelo de conducción de calor, problema bien planteado.

ABSTRACT

We propose a weak formulation of a heat conduction model for the detection of holes in metallic plates. An implicit discretization in time leads to a coupled, linear system of partial differential equations. At each time step, the system reduces to a Helmholtz problem with Robin boundary conditions and we show that its equivalent weak formulation is a well-posedness problem.

Key words: Weak formulation, heat conduction model, well-posedness problem.

I. INTRODUCCIÓN

A. Chaves *et al.* en [4] y J. J. Gil *et al.* en [6] han planteado un modelo de *conducción de calor* como método no destructivo para detectar daños en placas de metal. En ambos trabajos se empleó un programa comercial de elementos finitos para llevar a cabo las simulaciones de detección termográfica correspondiente a perfiles de enfriamiento, pero en ninguno de los casos se realizó y analizó la discretización de elementos finitos; aún más, no se especificó el tipo de elemento finito usado para llevar a cabo la aproximación numérica. En éste sentido, un estudio de la discretización y la escogencia del elemento finito es importante [2]. Como paso previo, es necesario saber qué regularidad posee la data, el dominio de validez del modelo y cuál es la formulación débil adecuada o variacional equivalente al problema de conducción exigido por el método de los elementos finitos.

En éste artículo, proponemos una formulación débil equivalente al problema de conducción planteado en [4] y [6] asociada a una semi-discretización implícita en un paso de tiempo, que genera un sistema de ecuaciones en derivadas parciales para todo punto de la placa. En cada paso del tiempo el sistema se reduce a un problema de Helmholtz con condiciones de frontera tipo Robin, y como primer paso a una posterior discretización usando el método de los elementos finitos para aproximar la solución del problema de conducción, probamos que tal formulación débil es un problema bien planteado para todo el dominio espacial de validez (la placa de metal dañada).

El artículo está organizado de la manera siguiente. Iniciamos la Sección II con la notación y algunas desigualdades básicas que emplearemos. En la Sección III, presentamos desde el punto de vista matemático formal el modelo planteado en [4, 6] y la semi-discretización que hemos propuesto con respecto a la evolución temporal del fenómeno. Finalmente en la Sección IV planteamos la formulación débil (o variacional) equivalente al problema espacial asociado con el operador tipo Helmholtz que resulta de la semi-discretización temporal del modelo de conducción en un paso de tiempo, y su buen planteamiento en términos de: existencia, unicidad y estabilidad de la solución débil.

II. NOTACIÓN Y DESIGUALDADES BÁSICAS

Denotaremos por Ω a todo abierto de \mathbb{R}^d , $d = 2$ o $d = 3$, y su respectiva frontera por $\partial\Omega$. Usaremos, particularmente para $d = 2$ en ésta etapa, el espacio estándar de Sobolev (ver [1] o [8])

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \partial^k v \in L^2(\Omega), \forall |k| \leq m\},$$

donde $|k| = k_1 + k_2$ con (k_1, k_2) un par de enteros no negativos (en dimensión dos) y

Tal espacio está dotado con la seminorma

+Departamento de Matemática, Decanato de Ciencia y Tecnología, Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", Barquisimeto-Venezuela, (wilfredoangulo@ucla.edu.ve).

*Programa de la LCM, Decanato de Ciencias y Tecnología, Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", Barquisimeto-Venezuela.

es un espacio de Hilbert para la norma

$$\|v\|_{H^m(\Omega)} = \left[\sum_{0 \leq k \leq m} |v|_{H^k(\Omega)}^2 \right]^{1/2}$$

y su dual topológico se denota por $(H^m)'$. El producto escalar de $L^2(\Omega)$ es denotado por (\cdot, \cdot) . Las definiciones de éstos espacios se extienden de manera directa a vectores, con la misma notación.

Por otro lado $\mathcal{D}(\Omega)$ denota el espacio de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en Ω , $\mathcal{D}'(\Omega)$ denota el espacio dual de $\mathcal{D}(\Omega)$ y $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$ coincide con $C^\infty(\bar{\Omega})$; el producto dual entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ y $\mathcal{D}(\Omega)$ será denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}$. Referimos al lector a Lions y Magenes [7] para la definición de espacios de orden fraccional tales como $H^s(\Omega)$ donde s es un número real. En particular, se denota por $H^{1/2}(\partial\Omega)$ al espacio de trazas correspondiente a funciones de $H^1(\Omega)$ restringidas a la frontera $\partial\Omega$ y por $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ su espacio dual: denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ al producto dual entre $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ y $H^{1/2}(\partial\Omega)$. La traza ϱ es una aplicación continua de $H^1(\Omega)$ sobre $H^{1/2}(\partial\Omega)$ y existe una constante C tal que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \|\varrho v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Finalmente, recordaremos la Segunda Desigualdad de Poincaré-Friedrichs: sea Γ una parte de $\partial\Omega$ con medida positiva, $|\Gamma| > 0$. Entonces existe una constante $\rho > 0$ tal que

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Gamma)}^2 \geq \rho \|v\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

III. MODELO COMPLETO

Consideremos un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a frontera lipschitziana $\partial\Omega$, en el cual está inmerso un subdominio regular denotado por B tal como se ilustra en la siguiente figura

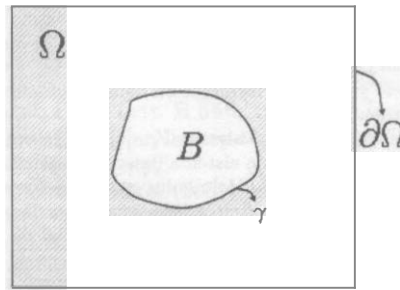


Figura 1: Esquema representativo de un dominio perforado.

Entonces, la placa metálica con el daño puede abstraerse como el dominio perforado $\Omega \setminus \bar{B}$ de frontera $\partial\Omega \cup \gamma$, en donde γ denota la frontera interna. Para éste dominio perforado se propone el siguiente problema de frontera para la ecuación de conducción de calor:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u : \Omega \setminus \bar{B} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ tal que} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - k \Delta u(x, t) = f(x, t) \quad \text{en } \Omega \setminus \bar{B} \times (0, T), \\ hu(x, t) + k \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = g(x, t) \quad \text{sobre } \partial\Omega \cup \gamma \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{en } \Omega \setminus \bar{B}. \end{array} \right. \quad (1)$$

En éste modelo, u es el campo escalar de temperatura, $k \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ es el coeficiente de conductividad térmica, $h \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ viene expresado por

$$h = \chi_{\partial\Omega} h_{\partial\Omega} + \chi_{\gamma} h_{\gamma}$$

con $h_{\partial\Omega}$ y h_{γ} los coeficientes de transferencia de calor por convección dados constantes respectivamente sobre las fronteras $\partial\Omega$ y γ , f es un término fuente dado y g es una función dada sobre la frontera $\partial\Omega \cup \gamma$. Por otro lado, u_0 representa la temperatura inicial en el dominio perforado $\Omega \setminus \bar{B}$, considerada también una función conocida.

A. Semidiscretización

Para obtener la semi-discretización, proponemos una aproximación en diferencias finitas a primer orden para el operador $\frac{\partial u}{\partial t}$ basada en el método implícito de Euler, tipo backward-time (ver [9]). En efecto, sea el problema tipo Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Para toda } x \in \Omega \setminus \bar{B}, \text{ encontrar una función } t \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = F(u(x, t); x, t) \quad \forall t \in (t_0, t_0 + T), \\ u(x, t_0) = u_0(x), \end{array} \right. \quad (2)$$

con $F(u(x, t); x, t) = k\Delta u(x, t) + f(x, t)$ y $T \in (0, +\infty)$. Suponiendo que u tiene la regularidad necesaria para que el problema de Cauchy este bien planteado y sea estable con respecto a la condición inicial u_0 , entonces para un paso de discretización $\delta t > 0$ sea $t_n = t_0 + n\delta t$, con $n = 0, 1, 2, \dots, N_{\delta t}$, una sucesión de nodos de discretización del intervalo $[t_0, t_0 + T]$ en subintervalos $I_n = [t_n, t_{n+1}]$. Aquí, $N_{\delta t}$ es el máximo entero tal que

$$t_{N_{\delta t}} \leq t_0 + T.$$

Ahora, denotaremos por $u^j(x)$, para toda $x \in \Omega \setminus \bar{B}$, a la aproximación en el nodo t_j de la solución exacta $u(x, t_j)$. De manera similar, para todo $x \in \Omega \setminus \bar{B}$, $F^j(u^j(x), x)$ es el valor correspondiente de F en el nodo t_j . Entonces, en cada paso de tiempo se tiene que

$$\frac{u(x, t_{n+1}) - u(x, t_n)}{\delta t} = F(u(x, t_{n+1}); x, t_{n+1}) + \mathcal{O}(\delta t),$$

de donde, si despreciamos el infinitesimal $\mathcal{O}(\delta t)$, obtenemos que

$$\alpha u^{n+1}(x) = \alpha u^n(x) + F^{n+1}(u^{n+1}(x), x), \quad \forall n \geq 0,$$

con $u^0(x) = u(x, t_0) = u_0(x)$ la condición inicial dada por el problema y $\alpha = \frac{1}{\delta t}$. De manera específica, obtenemos el siguiente problema de frontera elíptico para el tiempo t_{n+1}

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dada } u^0(x), \quad \forall x \in \Omega \setminus \bar{B}, \text{ y } \forall n \geq 0, \text{ encontrar } u^{n+1} : \overline{\Omega \setminus \bar{B}} \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ tal que} \\ \alpha u^{n+1}(x) - k\Delta u^{n+1}(x) = f^{n+1}(x) + \alpha u^n(x) \quad \text{en } \Omega \setminus \bar{B}, \\ hu^{n+1}(x) + k \frac{\partial u^{n+1}}{\partial n}(x) = g^{n+1}(x) \quad \text{sobre } \partial\Omega \cup \gamma. \end{array} \right. \quad (3)$$

En lo sucesivo consideramos fijo $n \geq 0$ y suprimimos la dependencia de éste para reducir el sistema (3) al siguiente problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dadas } f(x), w(x) \text{ y } g(x) \quad \forall x \in \Omega \setminus \bar{B}, \text{ encontrar } u : \overline{\Omega \setminus \bar{B}} \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ tal que} \\ \alpha u(x) - k\Delta u(x) = f(x) + w(x) \quad \text{en } \Omega \setminus \bar{B}, \\ hu(x) + k \frac{\partial u}{\partial n}(x) = g(x) \quad \text{sobre } \partial\Omega \cup \gamma, \end{array} \right. \quad (4)$$

donde w se utiliza para denotar la aproximación αu^n dada. Este es un problema de Helmholtz a parámetro α , coeficiente térmico k y condiciones de frontera tipo Robin.

IV. FORMULACIÓN DÉBIL Y BUEN PLANTEAMIENTO

En ésta sección se plantea una *formulación débil equivalente* al problema de Helmholtz (3) y en tal sentido establecemos la existencia, unicidad y estabilidad de la solución al problema de conducción de calor. Al respecto tenemos los siguientes resultados.

4.1 proposition [Formulación débil equivalente] Sea $\Omega \setminus \bar{B}$ el dominio perforado dado anteriormente a frontera $\partial\Omega \cup \gamma$ continua Lipschitz, $f, w \in L^2(\Omega \setminus \bar{B})$, $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega \cup \gamma)$, $k \in L^\infty(\Omega \setminus \bar{B})$, $h \in L^\infty(\partial\Omega \cup \gamma)$ y la constante $\alpha > 0$. Una formulación débil equivalente al problema (4) viene dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in H^1(\Omega \setminus \bar{B}) \text{ tal que} \\ a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega \setminus \bar{B}), \end{array} \right. \quad (5)$$

en donde

$$a : H^1(\Omega \setminus \bar{B}) \times H^1(\Omega \setminus \bar{B}) \rightarrow \mathbb{R}$$

es la forma bilineal dada por

$$a(u, v) = \alpha \int_{\Omega \setminus \bar{B}} uv \, dx + \int_{\Omega \setminus \bar{B}} k \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega \cup \gamma} huv \, ds$$

y

$$\ell : H^1(\Omega \setminus \bar{B}) \rightarrow \mathbb{R}$$

es el funcional lineal definido por

$$\ell(v) = \int_{\Omega \setminus \bar{B}} f v \, dx + \int_{\Omega \setminus \bar{B}} w v \, dx + (g, v).$$

Demostración. Para plantear la formulación variacional del problema (4) consideramos que u es una solución de tal problema con $k\Delta u \in L^2(\Omega \setminus \bar{B})$. Ahora, multiplicamos ambos lados de la EDP por una función $v \in H^1(\Omega \setminus \bar{B})$ e integramos sobre $\Omega \setminus \bar{B}$ para obtener

$$\alpha \int_{\Omega \setminus \bar{B}} u(x)v(x) dx - \int_{\Omega \setminus \bar{B}} k\Delta u(x)v(x) dx = \int_{\Omega \setminus \bar{B}} f(x)v(x) dx + \int_{\Omega \setminus \bar{B}} w(x)v(x) dx.$$

Gracias a que el dominio $\Omega \setminus \bar{B}$ es acotado con frontera continua Lipschitz y u se ha considerado de manera tal que $k\Delta u \in L^2(\Omega \setminus \bar{B})$, entonces para toda $v \in H^1(\Omega \setminus \bar{B})$ una fórmula de Green (ver [8]) es válida para integrar por partes el segundo término de la expresión anterior y obtener

$$\int_{\Omega \setminus \bar{B}} k\Delta u(x)v(x) dx = - \int_{\Omega \setminus \bar{B}} k\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega \cup \gamma} k \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x) ds.$$

Por otro lado, usando la condición de frontera del problema (4) se obtiene que

$$\int_{\partial\Omega \cup \gamma} k \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x) ds = \int_{\partial\Omega \cup \gamma} g(x)v(x) ds - \int_{\partial\Omega \cup \gamma} hu(x)v(x) ds,$$

pero como $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega \cup \gamma)$ entonces

$$\int_{\partial\Omega \cup \gamma} g(x)v(x) ds = (g, v), \quad \forall v \in H^1(\Omega \setminus \bar{B})$$

y finalmente se tiene la formulación variacional (5) con

$$a(u, v) = \int_{\Omega \setminus \bar{B}} \alpha u(x)v(x) dx + \int_{\Omega \setminus \bar{B}} k\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega \cup \gamma} hu(x)v(x) ds$$

y

$$\ell(v) = \int_{\Omega \setminus \bar{B}} f(x)v(x) dx + \int_{\Omega \setminus \bar{B}} w(x)v(x) dx + (g, v),$$

respectiva y evidentemente una forma bilineal y un función lineal.

Inversamente, sea $u \in H^1(\Omega \setminus \bar{B})$ una solución del problema variacional (5). Gracias a que $\mathcal{D}(\Omega \setminus \bar{B})$ es denso [7] en $H^1(\Omega \setminus \bar{B})$ se toma $v \in \mathcal{D}(\Omega \setminus \bar{B})$ como una función de prueba en (5) y entonces en el sentido de las distribuciones tenemos que

$$\langle \alpha u, v \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} + \langle k\nabla u, \nabla v \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} - \langle (f+w), v \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = 0.$$

Pero, la derivada en el sentido de distribuciones implica que

$$\langle -k\Delta u, v \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle k\nabla u, \nabla v \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega \setminus \bar{B}),$$

así

$$\langle \alpha u - k\Delta u - (f+w), v \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = 0,$$

y ya que $v \in \mathcal{D}(\Omega \setminus \bar{B})$ es arbitraria tenemos entonces que

$$\alpha u - k\Delta u = (f+w) \quad \text{en} \quad \mathcal{D}'(\Omega \setminus \bar{B}).$$

Ahora, como $(f+w) \in L^2(\Omega \setminus \bar{B})$ tenemos que $k\Delta u \in L^2(\Omega \setminus \bar{B})$ y entonces la EDP asociada al operador de Helmholtz se satisface al menos en casi todas partes sobre el dominio $\Omega \setminus \bar{B}$.

Para recuperar la condición en la frontera, multiplicamos la ecuación que la representa por $v \in H^1(\Omega \setminus \bar{B})$, integramos sobre $\Omega \setminus \bar{B}$ y usamos una fórmula de Green para integrar por partes. Siendo $hu|_{\partial\Omega \cup \gamma} \in L^2(\partial\Omega \cup \gamma) \subset H^{-1/2}(\partial\Omega \cup \gamma)$, tenemos entonces que

$$a(u, v) = \int_{\Omega \setminus \bar{B}} (f+w)(x)v(x) dx + (hu + k \frac{\partial u}{\partial n}, v)_{\partial\Omega \cup \gamma},$$

en donde hemos usado $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\Omega \cup \gamma}$ para denotar la distribución asociada al término de integración sobre la frontera para $(hu + k \frac{\partial u}{\partial n})$.

Restando ahora la expresión anterior a la formulación variacional obtenemos

$$\forall v \in H^1(\Omega \setminus \bar{B}), \quad (hu + k \frac{\partial u}{\partial n}, v)_{\partial\Omega \cup \gamma} = 0,$$

con lo cual se tiene que

$$hu + k \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{en} \quad H^{-1/2}(\partial\Omega \cup \gamma)$$

y concluimos la demostración. \square

4.2 proposition[Existencia, unicidad y estabilidad de la solución débil] Para la formulación débil dada en la Proposición (IV), existe una única solución $u \in H^1(\Omega \setminus \bar{B})$. Además, existe una constante $M_\Omega = M(\Omega)$ tal que

$$\|u\|_{H^1(\Omega \setminus \bar{B})} \leq M_\Omega (\|f\|_{L^2(\Omega \setminus \bar{B})} + \|w\|_{L^2(\Omega \setminus \bar{B})} + \|g\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega \cup \gamma)}).$$

Demostración. La existencia y la unicidad de la solución débil del problema (5) se tiene de manera inmediata verificando las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram [2, 5]: que la forma bilineal a sea $H^1(\Omega \setminus \bar{B})$ -elíptica, continua sobre $H^1(\Omega \setminus \bar{B}) \times H^1(\Omega \setminus \bar{B})$ y que el funcional lineal ℓ sea continuo sobre $H^1(\Omega \setminus \bar{B})$.

$H^1(\Omega \setminus \bar{B})$ -elíptica de la forma a :

Lo que queremos probar es la existencia de una constante $\hat{\alpha} > 0$ tal que

$$a(v, v) \geq \hat{\alpha} \|v\|_{H^1(\Omega \setminus \bar{B})}^2, \quad \forall v \in H^1(\Omega \setminus \bar{B}).$$

En efecto, por la definición de $a(\cdot, \cdot)$ y la segunda desigualdad de Poincaré-Friedrichs para toda $v \in H^1(\Omega \setminus \bar{B})$ tenemos que

$$a(v, v) \geq \hat{\alpha} \left(\|v\|_{L^2(\Omega \setminus \bar{B})}^2 + \|v\|_{H^1(\Omega \setminus \bar{B})}^2 \right)$$

con $\hat{\alpha} = \min(\beta, \beta\rho)$ para $\beta = \min(\alpha, k, h)$ y $\rho > 0$ la constante de Poincaré-Friedrichs. Ahora, como $\|v\|_{L^2(\Omega \setminus \bar{B})}^2 \geq 0$ se tiene entonces que

$$a(v, v) \geq \hat{\alpha} \|v\|_{H^1(\Omega \setminus \bar{B})}^2.$$

Continuidad de la forma a sobre $H^1(\Omega \setminus \bar{B}) \times H^1(\Omega \setminus \bar{B})$:

Queremos probar que $a(\cdot, \cdot)$ es acotada: la existencia de una constante $C > 0$ tal que

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_{H^1(\Omega \setminus \bar{B})} \|v\|_{H^1(\Omega \setminus \bar{B})}, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega \setminus \bar{B}).$$

En efecto, por la definición de $a(\cdot, \cdot)$ y la desigualdad de Cauchy-Schwarz (ver [3]) se tiene que

$$|a(u, v)| \leq \eta \left(\|u\|_{L^2(\Omega \setminus \bar{B})} \|v\|_{L^2(\Omega \setminus \bar{B})} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega \setminus \bar{B})} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega \setminus \bar{B})} + \|u\|_{L^2(\partial\Omega \cup \gamma)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega \cup \gamma)} \right),$$

en donde $\eta = \max(\alpha, \|k\|_{L^\infty(\Omega \setminus \bar{B})}, \|h\|_{L^\infty(\partial\Omega \cup \gamma)})$. Ahora, por la teoría de trazas se asegura la existencia de constantes C_1 y C_2 tales que $\|u\|_{L^2(\partial\Omega \cup \gamma)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega \cup \gamma)} \leq C_1 C_2 \|u\|_{H^1(\Omega \setminus \bar{B})} \|v\|_{H^1(\Omega \setminus \bar{B})}$, y al hacer uso de la desigualdad de Young (ver [3]) y la de norma en $H^1(\Omega \setminus \bar{B})$ se obtiene que

$$a(u, v) \leq C \|u\|_{H^1(\Omega \setminus \bar{B})} \|v\|_{H^1(\Omega \setminus \bar{B})}$$

con $C = \eta \mu \|u\|_{H^1(\Omega \setminus \bar{B})} \|v\|_{H^1(\Omega \setminus \bar{B})}$ y $\mu = \max(1, C_1 C_2)$.

Continuidad del funcional ℓ sobre $H^1(\Omega \setminus \bar{B})$:

Aquí además de verificar que el funcional lineal $\ell \in (H^1(\Omega \setminus \bar{B}))'$, ganaremos también la estabilidad de la solución débil. En efecto, gracias a la definición de ℓ , la definición de norma en el espacio dual $H^{-1/2}(\partial\Omega \cup \gamma)$ y los resultados de trazas (ver [7]) tenemos:

$$|\ell(v)| \leq \int_{\Omega \setminus \bar{B}} |fv| dx + \int_{\Omega \setminus \bar{B}} |wv| dx + C_3 \|g\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega \cup \gamma)} \|v\|_{H^1(\Omega \setminus \bar{B})},$$

siendo $C_3 = C_3(\Omega)$ la constante para la cota de la traza. Ahora, usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz sobre los términos integrales de la expresión anterior y el hecho de que $\|v\|_{L^2(\Omega \setminus \bar{B})} \leq \|v\|_{H^1(\Omega \setminus \bar{B})}$, entonces

$$\frac{|\ell(v)|}{\|v\|_{H^1(\Omega \setminus \bar{B})}} \leq \|f\|_{L^2(\Omega \setminus \bar{B})} + \|w\|_{L^2(\Omega \setminus \bar{B})} + C_3 \|g\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega \cup \gamma)}$$

y por definición de norma dual

$$\|\ell\|_{(H^1(\Omega \setminus \bar{B}))'} \leq \|f\|_{L^2(\Omega \setminus \bar{B})} + \|w\|_{L^2(\Omega \setminus \bar{B})} + \|g\|_{L^2(\Omega \setminus \bar{B})} + C_3 \|g\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega \cup \gamma)}.$$

Esto prueba que $\ell \in (H^1(\Omega \setminus \bar{B}))' = \mathcal{L}(H^1(\Omega), \mathbb{R})$. En conclusión, por los resultados anteriores, el Teorema de Lax-Milgram garantiza la existencia de una única solución débil $u \in H^1(\Omega \setminus \bar{B})$.

Ahora, con el resultado de cota para el funcional ℓ y la propiedad de $H^1(\Omega \setminus \bar{B})$ -elíptica de la forma bilineal a tenemos directamente la estabilidad de la solución débil. En efecto, haciendo $v = u$ en la formulación débil tenemos

$$|\ell(u)| = |a(u, u)| \geq \hat{\alpha} \|u\|_{H^1(\Omega \setminus \bar{B})}^2,$$

luego

$$\hat{\alpha} \|u\|_{H^1(\Omega \setminus \bar{B})} \leq \frac{\ell(u)}{\|u\|_{H^1(\Omega \setminus \bar{B})}} \leq \max(1, C_3(\Omega)) \left(\|f\|_{L^2(\Omega \setminus \bar{B})} + \|w\|_{L^2(\Omega \setminus \bar{B})} + \|g\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega \cup \gamma)} \right),$$

con ésto se tiene que la solución débil $u \in H^1(\Omega \setminus \bar{B})$ depende continuamente de la data (o es estable) tomando $M_\Omega = \frac{\max(1, C_3(\Omega))}{\hat{\alpha}}$. \square

REFERENCIAS

-
- [1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, New York: Academic Press, (1975).
 - [2] O. Axelsson and V. A. Barker, *Finite Element Solution of Boundary Value Problems. Theory and Computation*, Orlando: Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press, (1984).
 - [3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle: Théorie et applications*, Collection "Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise", Paris: Masson,(1983).
 - [4] A. Chaves, S. Coutin y F. Just, Simulación numérica y estudio paramétrico de un método térmico para la detección de daños en metales y materiales compuestos tipo carbono-carbono, *Rev. Int. de Desastres Naturales, Accidentes e Infraestructura Civil*, 4(2), 2002, 141-152.
 - [5] R. Dautray et J.-L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Vol. I, Paris: Masson, (1987).
 - [6] J.J. Gil, F. A. Just-Agosto, D. Serrano y B. Shañq, Detección de daños usando transferencia de calor por conducción, *Rev. Int. de Desastres Naturales, Accidentes e Infraestructura Civil*, 3(2), 2004, 129-141.
 - [7] J. L. Lions ans E. Magenes, *Problemes aux Limites non Homogènes et Applications, I*, Paris: Dunod, (1968).
 - [8] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Paris: Masson, (1967).
 - [9] A. Quarteroni, R. Sacco ans F. Saleri, *Numerical Mathematics*, New York: Springer, (2000).