Educação e Formação

Reflexão acerca do ensino do algoritmo da divisão inteira: proposta didática

Diana R. G. Fernandes

Aluna do Mestrado de EPE e E1ºCEB, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Coimbra

drfernandes@esec.pt

Fernando M. L. Martins

Instituto de Telecomunicações (Covilhã); RoboCorp; Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Coimbra

fmlmartins@esec.pt

Resumo

A divisão é uma das operações que os alunos têm mais dificuldades e professores/as mais mnemónicas dão aos alunos. A compreensão global, procedimental e conceptual, é fundamental para o sucesso do seu processo de ensino e de aprendizagem. Nesse sentido, com este artigo pretende-se apresentar uma proposta didática para as fases de ensino do algoritmo da divisão inteira. Inicialmente será feita uma breve contextualização onde se expõem as ideias e teorias que lhe servem de base e, de seguida, apresenta-se uma proposta exemplificada e ilustrada.

Palavras-chave: Algoritmo da divisão; sentidos da divisão; sistema de numeração decimal

Abstract

The most difficult arithmetic operation for students is division and teachers often use mnemonics for it. Global, procedural and conceptual understanding are the key for a successful teaching/learning process. For that, this paper intends to present a proposal for didactics phases of the integer division algorithm teaching. First it will be made a short contextualization to explain the ideas and theories that support this propose and afterwards it will be explained, exemplified and illustrated.

Keywords: Division algorithm; meanings of division; decimal number system

Introdução

Numa perspetiva geral o ensino que leva à compreensão é mais eficaz do que o ensino que apela apenas à memorização. Numa perspetiva mais restrita, e focando apenas o tema deste artigo, esta ideia é reforçada e torna-se mais fácil de perceber como é verdadeira. O ensino com e para a compreensão é um princípio constante e orientador deste artigo. Ensino com compreensão refere-se ao/à professor/a, àquilo que ele/a sabe, o seu conhecimento didático, pedagógico e científico (Ball, Thames & Phelps, 2008). Para isso os/as professores/as devem tentar, de modo contínuo, perceber aquilo que as crianças pensam e sabem (Carpenter, Fennema, Franke, Levi, & Empson, 1999) e devem investir na sua formação tanto no âmbito da prática educativa como no âmbito científico do conhecimento aprofundado dos conteúdos que lecionam (Ma, 1999). O ensino para a compreensão refere-se sobretudo ao/à aluno/a. O ensino deve ser feito tendo em conta a individualidade de cada aluno/a e deve ser adaptado às suas capacidades e competências individuais e pessoais (Carpenter et al., 1999).

Segundo a Teoria do Desenvolvimento Cognitivo de Piaget as crianças entre 7-8 e 11-12 anos estão em plena fase das operações concretas (Piaget & Inhelder, 1973) portanto sabemos que à partida tudo o que dissermos e fizermos tem de ter um suporte concreto físico ou virtual. Isto é, o/a professor/a deve usar material manipulável, virtual ou concreto, ou exemplos que os/as alunos/as consigam imaginar ou visualizar (i.e., que estejam dentro do seu universo quotidiano ou visual). A escolha de um ou outro método terá de ser feita pelo/a próprio/a professor/a dependendo de variados fatores como por exemplo, o tipo de turma que tem, o número de alunos, a sua capacidade de raciocínio, entre outros. No entanto existem dois fatores que desde logo restringem esta escolha. Primeiro, se a turma estiver num 1º ou 2º ano o/a professor/a deve sempre começar com os materiais manipuláveis seja qual for a matéria que estão a estudar para que os/as alunos/as se familiarizem com os materiais e ganhem destreza na sua manipulação. E o segundo, em qualquer um dos quatro anos do 1º ciclo, é que quando se inicia um novo conteúdo é essencial o uso de material manipulável para que a primeira abordagem a um conteúdo seja feita com base num conhecimento anteriormente adquirido. Este material pode ser estruturado ou não estruturado, não existindo qualquer preferência por um ou por outro desde que o seu uso seja feito de forma sequencial e adequada ao progresso das aprendizagens das crianças.

A Matemática Realista vem acentuar a necessidade do uso de materiais manipuláveis ou o recurso ao contexto visual ou quotidiano. Esta corrente mostra-nos que o uso de metodologias que façam uso do meio envolvente do/a aluno/a são as mais produtivas (Heuvel-Panhuizen, 1996). Em primeiro lugar porque são situações que o/a aluno/a pode manipular ou que pode facilmente imaginar. Em segundo lugar porque torna a matemática útil, ou seja, o/a aluno/a percebe o objetivo daquilo que está a fazer, entende que o processo tem uma finalidade real e que pode ser utilizado em situações semelhantes. E em terceiro lugar, numa combinação das duas primeiras, torna as aprendizagens significativas. Isto é fulcral no processo de ensino/aprendizagem de qualquer conteúdo e de qualquer área. Se os/as alunos/as conseguirem visualizar ou imaginar o problema, se estiverem motivadas a resolver o problema por perceberem que chegarão à solução para uma situação real, as aprendizagens serão efetivamente significativas (Freuddenthal Institute, 1991). Esta ideia vai ao encontro do que diz Heuvel-Panhuizen (1996) quando refere que "quando as crianças aprendem matemática de forma isolada, separada da realidade, vai ser rapidamente esquecida e elas não vão ser capazes de a aplicar" (p. 12).

O Construtivismo diz-nos que os indivíduos não são agentes passivos, são antes atores ativos na construção do seu próprio conhecimento, e só assim será realmente conhecimento. Segundo Fosnot (1996), ensinar matemática deve traduzir-se na realização de atividades cujo objetivo é encorajar e facilitar o processo construtivo. Ou seja, se o/a professor/a tiver uma postura de transmissor de conhecimento os/as alunos/as poderão até perceber aquilo que ele/a diz mas não tardarão a esquecer. Pelo contrário, se o/a professor/a for apenas um/a facilitador/a de aprendizagens e proporcionar o contexto favorável para que os seus/suas alunos/as construam o seu próprio conhecimento esses conhecimentos formarão uma base sólida para a construção de novos e mais especializados conhecimentos. Ainda segundo a mesma autora a aula de matemática deve ser recriada e encarada como uma comunidade de investigação, num clima de questionamento e resposta, e onde se dá mais relevância ao pensamento e raciocínio matemático do que à memorização.

Numa perspetiva mais específica e no que diz respeito ao ensino da divisão inteira no ensino básico, esta operação é abordada informalmente até ao 2º ano, onde são introduzidos os sentidos da operação, os termos dividendo, divisor e quociente e a relação entre divisão e multiplicação. Entre o 2º e 3º anos fazem-se alguns procedimentos intercalares com utilização de representações de algoritmos para que no 4º ano os alunos consigam aprender a resolução da divisão inteira através do algoritmo padrão. Segundo o Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC,

2013) o ensino da divisão inteira deve ser feito primeiro a nível informal, com exemplos concretos e reais em que as crianças têm que partilhar equitativamente ou agrupar em conjuntos equipotentes e mais tarde, no 4º ano, os/as alunos/as começam a aprender a usar o algoritmo como meio de resolução da divisão. Esta operação aritmética e o seu algoritmo são muito difíceis de compreender e aprender. Alguns professores/as consideram até o ensino do algoritmo desnecessário, defendendo que deve ser calculado na máquina como fazemos com a raiz quadrada (Aharoni, 2012). Não é esta a perspetiva defendida neste artigo. A compreensão do algoritmo da divisão traz várias vantagens às crianças no estudo da matemática.

De forma genérica um algoritmo é um conjunto de procedimentos que se usam sempre pela mesma ordem na resolução de problemas semelhantes (Brocardo & Serrazina, 2008; Loureiro, 2004). Segundo Thompson (1999, cit. Brocardo & Serrazina,2008), podemos identificar três tipos de algoritmos: standard formal; não-standard formal e não-standard informal. O primeiro refere-se àquele que nós chamamos algoritmo padrão, o segundo refere-se a representações verticais da operação usando a decomposição de números e o terceiro são todas as outras representações que os/as alunos/as podem utilizar para representarem e resolverem os problemas que lhes são propostos.

Este texto surgiu de um trabalho proposto na aula de Didática da Matemática da licenciatura de Educação Básica na Escola Superior de Educação de Coimbra. Esse trabalho pretendia apenas que fosse feita uma reflexão e uma proposta acerca do ensino da divisão no 4º ano do 1º ciclo do ensino básico. No entanto depois de alguma pesquisa foi fácil perceber que a informação acerca desse assunto, e da divisão em geral, era escassa. Sendo esta uma matéria de interesse quer para professores/as quer para alunos/as, e dada a dificuldade em encontrar informação o desafio foi lançado e aceite. Porque não tentar dar um contributo nesta área e construir um documento dedicado à divisão? No entanto, a divisão é uma área muito vasta o que levou à necessidade de tornar o tema um pouco mais restrito. Assim, este artigo focar-se-á apenas no ensino do algoritmo da divisão inteira, deixando de lado todos os outros aspetos ligados à operação. Mas não devemos esquecer que só tendo uma visão e compreensão global é que podemos dizer que aprendemos efetivamente a divisão.

Tendo como guia aquilo que foi referido nesta secção de seguida será apresentada uma proposta de ensino do algoritmo da divisão inteira composta por 4 fases e que tem como objetivo dar um contributo para a melhoria do seu ensino/aprendizagem. As fases não dizem respeito a nenhum ano de escolaridade específico ficando a cargo de quem aplica esta proposta a identificação do momento adequado para passar à fase seguinte.

Algoritmo da divisão: uma proposta didática

Esta secção será estruturada por fases que coincidem com as fases de ensino do algoritmo da divisão. A 1ª fase é dividida em 3 subfases: a) uso de números apenas com um algarismo, uso de material manipulável, de esquemas e desenhos se necessário; b) semelhante à anterior mas em vez de usarmos desenhos e esquemas vamos usar a tabuada do divisor explicitando a ideia inerente ao uso da tabuada, isto é, usando das subtrações e adições sucessivas; c) os dividendos passam a ser números até 20 e têm de ser menores do que 10 vezes o divisor, os divisores têm apenas um algarismo e podem ser usados esquemas e desenhos além do material manipulável. A 2ª fase diz respeito às divisões de um só passo com dividendos de três algarismos e divisores de dois algarismos e divide-se em a) utilização de material manipulável concreto e representação do algoritmo, b) resolução com algoritmo das subtrações sucessivas, c) resolução com algoritmo das subtrações repetidas e d) resolução usando a representação em algoritmo padrão com foco na compreensão do uso da plica e na estimação. A 3ª fase corresponde às divisões com mais do que um passo em que o divisor tem um algarismo e o dividendo tem dois algarismos. É usado o material manipulável e a representação do algoritmo padrão com auxílio da grelha dos números. A 4ª e última fase corresponde à resolução das divisões com mais do que um passo usando algoritmo padrão e dando significado à sequência de procedimentos. É importante ainda salientar que toda a terminologia usada é intencionalmente explicativa para que a compreensão seja mais facilmente atingida. Deixaremos, portanto, de lado expressões como "e vai um" ou "baixar o seguinte" que na realidade não têm qualquer utilidade nem contribuem para uma melhor compreensão dos conteúdos. A terminologia adotada aqui tem em consideração, além do que foi dito, a importância da compreensão do nosso sistema de numeração. A compreensão do sistema decimal é fundamental na aprendizagem de qualquer operação aritmética assim como de outros conteúdos da matemática. Se o/a aluno/a entende que pode, ela própria, juntar e agrupar dez unidades numa dezena, entende, por lógica, que pode ela própria decompor essa dezena em dez unidades (Aharoni, 2012). Esta compreensão das regras básicas do sistema decimal é uma das bases fundamentais para aprendizagens mais especializadas na matemática. Vamos ainda partir do pressuposto que a turma está familiarizada com o material multibásico e que é usado com frequência na sala para resolver problemas matemáticos. Isto implica que as crianças já sabem reconhecer que um cubo pequeno representa a unidade, uma barra representa a dezena, uma placa representa a centena e um cubo grande representa o milhar. A representação pode ser feita com qualquer outro material que consiga reproduzir os elementos do problema mas é importante referir que a operação deve ser resolvida sempre tendo em atenção o seu significado. Não podemos deixar que uma divisão com significado de agrupamento seja resolvida como se se tratasse de uma divisão com significado de partilha ou vice-versa.

A representação deve ser feita em simultâneo com o material multibásico e com o algoritmo tendo em conta que os/as alunos/as já conhecem os sentidos da divisão e vão aprender a representação $D = q \times d + r$ em simultâneo com as primeiras fases. Os exemplos apresentados são apenas uma maneira de ilustrar cada situação e tentando chegar o mais perto possível de uma situação real.

1ªFASE

a) Divisor e quociente inferiores a 10 e recurso a material manipulável, desenhos e esquemas

Questão-problema:

A Elisa tem 6 carimbos e quer partilhar com uma colega de forma a que as duas fiquem com o mesmo número de carimbos. Com quantos carimbos fica cada uma?

$6 \div 2 = ?$

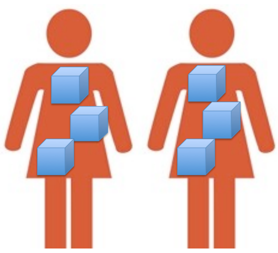
Vamos representar o dividendo:

6

Depois representamos o divisor:

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Agora vamos distribuir os seis carimbos pelas duas meninas:



$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array}$$

Se cada menina fica com 3 carimbos podemos ainda concluir que não sobra nenhum carimbo, portanto podemos chamar a esta divisão uma divisão exata e representá-la com o respetivo resto.

O uso dos termos dividendo, divisor, quociente e resto deve ser feito nesta primeira fase com alguma frequência e sempre que se escreva o respetivo número.

b) Divisões inteiras com divisor e quociente inferiores a 10 utilizando a tabuada do divisor e apresentar o resultado com a disposição usual do algoritmo.

Questão-problema:

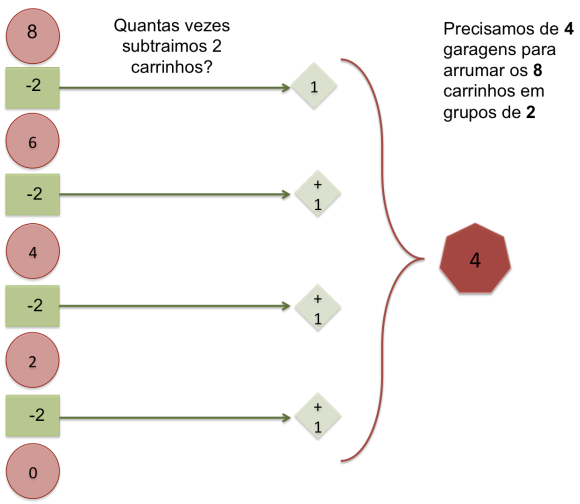
O João tem 8 carrinhos. Quer estacionar os carrinhos aos pares. De quantas garagens precisa?

$$8 \div 2 = ?$$

Podemos começar por fazer um esquema que ilustre aquilo que pretendemos fazer. Então se o João tem 8 carrinhos e pretende agrupá-los aos pares podemos começar com 8 e ir sucessivamente subtraindo 2.

Concluímos ainda, através das adições sucessivas, que 2+2+2+2=6.

Este tipo de esquema para resolver divisões com sentido de medida deve levar à resolução através da tabuada do divisor uma vez que a ideia por trás das adições sucessivas é a tabuada. Construindo a tabuada do divisor desta operação obtemos:



Observando a tabuada do divisor, 2, ficamos a saber que, se o João tiver uma garagem pode arrumar dois carros, se tiver duas pode arrumar quatro carros, se tiver três pode arrumar seis carrinhos e se tiver quatro garagens pode arrumar oito carrinhos.

Então descobrimos que 8 carrinhos agrupados aos pares precisam de 4 garagens.

Também podemos concluir que não sobra nenhum carrinho e portanto o resto desta operação é igual a zero.

$$4 \times 2 = 8 \qquad \begin{array}{l|l} 8 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 4 \end{array}$$

Assim, pode-se dizer que a estimativa do quociente através da tabuada do divisor é aquela cujo produto mais se aproxima ou é igual ao dividendo, nunca o excedendo.

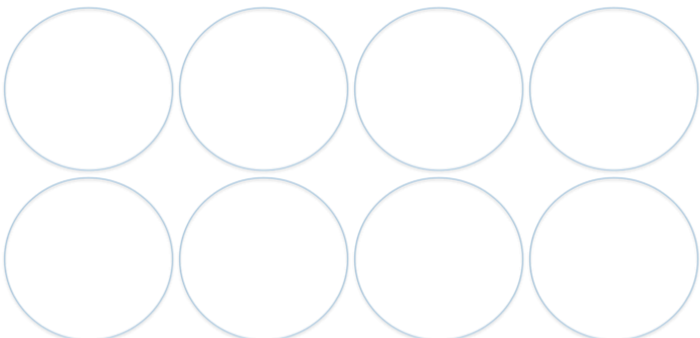
c) Divisores até 10 e dividendos até 20 com manipulação de objetos ou recorrendo a desenhos ou esquemas.

Questão-Problema:

> *O Francisco levou para a escola uma caixa com 8 caracóis. A professora aproveitou o interesse das crianças e desenvolveu algumas tarefas relacionadas com os pequenos bichos.*
>
> *Sabendo que os caracóis comem folhas os alunos saíram para o recreio à procura de comida para lhes dar. Cada criança deve trazer uma folha. Já na sala a professora pergunta: Se nós somos 16, temos 16 folhas, então quantas folhas pode comer cada caracol?*

$16 \div 8 = ?$

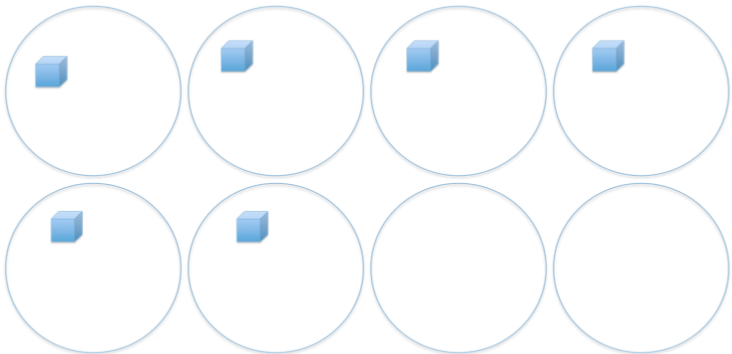
Vamos então representar o divisor, ou seja, os caracóis:



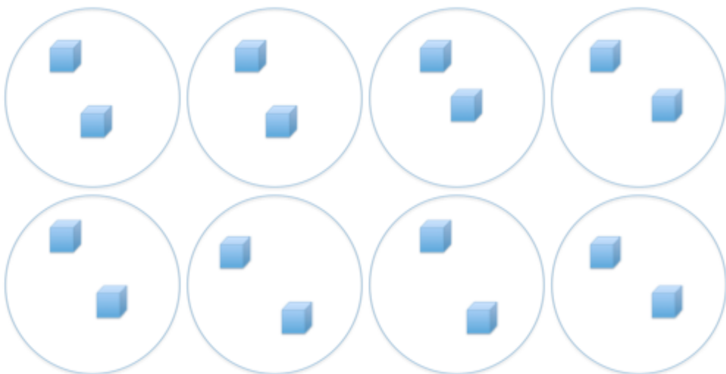
Agora representamos o dividendo, ou seja, as 16 folhas:

16 | 8

Então partilhamos as 16 unidades (folhas) pelos 8 conjuntos (caracóis):



Como não temos mais unidades vamos decompor a dezena em 10 unidades e continuar a divisão:



16 | 8
0   2

Como já foi referido, é importante não esquecer de usar os termos dividendo, divisor, quociente e resto quando fazemos a representação do algoritmo. E não devemos esquecer que aqui queremos apenas uma representação do algoritmo, não é pedido aos alunos que resolvam a divisão usando o algoritmo. Estas representações servem apenas, por enquanto, para que as crianças se familiarizem com esta forma de representação

2ª FASE

a) Divisão inteira com dividendos de 3 algarismos e divisores de 2 algarismos nos casos em que o dividendo é menor que 10 vezes o divisor, isto é, o quociente terá apenas um algarismo e a divisão será efetuada apenas num passo.

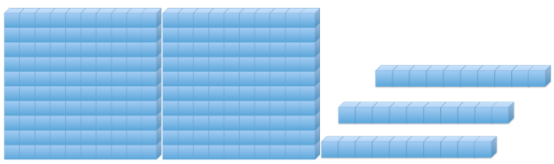
Nesta fase deve ser usado em primeiro lugar o material manipulável e depois a tabuada do divisor. Os passos seguintes, subtrações sucessivas e subtrações repetidas, serão a introdução à resolução, e não apenas representação, da operação com o algoritmo formal.

Os alunos fizeram bolachas na escola e decidiram que querem oferecê-las aos pais. Um pacote para o pai e um para a mãe. As crianças contam as bolachas e têm 230. Sabem que na turma há 19 alunos. Fazem as contas e há 38 pais (19 mães e 19 pais). Então quantas bolachas devem colocar em cada pacote?

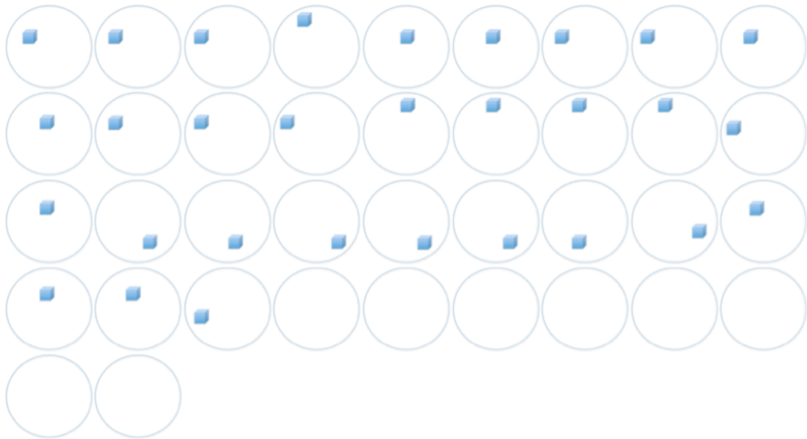
$$230 \div 38 = ?$$

Começando com o material multibásico, representamos primeiro o divisor:

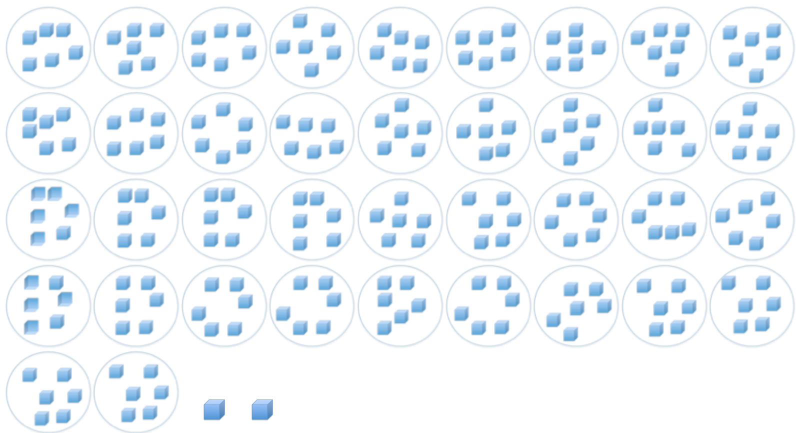
Depois o dividendo:



Agora temos de decompor as 3 dezenas em 30 unidades para podermos começar a distribuir as bolachas pelos pacotes:



Como já não temos mais unidades temos de decompor as 2 centenas em 20 dezenas e depois em 200 unidades para podermos continuar a dividir, assim ficaríamos com:



Então concluímos que cada pacote fica com 6 bolachas e há 2 bolachas que sobram.

Também podemos construir a tabuada do 38 e depois verificar qual o produto que se aproxima mais de 230 sem o exceder. Depois encontrava-se a diferença entre esse número e 230 para saber quantas bolachas sobram.

A passagem para a resolução com o algoritmo padrão deve ser feita por etapas que passam primeiro pelas subtrações sucessivas (em que o mesmo número é subtraído sucessivamente ao dividendo) e depois pelas subtrações repetidas (em que vão sendo subtraídos números diferentes ao dividendo).

b) Usando um exemplo que já foi resolvido o(a) professor(a) deve sugerir uma nova alternativa para a resolução de operações de divisão. Assim podemos representar a divisão anterior com o algoritmo das subtrações sucessivas.

$$\begin{array}{r|l}
\mathbf{230} & \mathbf{38} \\ \cline{2-2}
-76 & 2+2+2=\mathbf{6} \\ \cline{1-1}
154 & \\
-76 & \\ \cline{1-1}
78 & \\
-76 & \\ \cline{1-1}
\mathbf{2} &
\end{array}$$

Durante esta resolução devem ser os alunos a propor os números que serão utilizados. Neste caso seriam os alunos a concluir que pelo menos duas bolachas os pacotes podiam ter. Então colocaram 2 no sítio do quociente e verificam quantas unidades das 230 acabaram de distribuir. Fazem isto multiplicando 2 por 38. Descobrem que distribuíram apenas 76 unidades, subtraem essas 76 unidades às 230 e concluem que podem voltar a fazer o mesmo processo. E repetem-no tantas vezes quantas conseguirem até não conseguirem dividir mais. Então adicionam todas as parcelas que estão no sítio do quociente para encontrarem o resultado da sua divisão.

c) Passar agora para o algoritmo das subtrações repetidas é muito simples. Observando o algoritmo das subtrações sucessivas os alunos concluem que podiam ter sido mais rápidos nesta resolução se, em vez de distribuírem apenas 2 bolachas, distribuíssem logo 4 bolachas por cada pacote. Assim:

d) Daqui deve passar-se à resolução usando a representação em algoritmo padrão com foco na compreensão do uso da plica e na estimação. Usando o mesmo exemplo, por já ser familiar aos alunos, o(a) professor(a) deve passar à resolução usando a forma do algoritmo.

$$\begin{array}{r|l}
\mathbf{230} & \mathbf{38} \\ \cline{2-2}
-152 & 4+2=\mathbf{6} \\ \cline{1-1}
78 & \\
-76 & \\ \cline{1-1}
\mathbf{2} &
\end{array}$$

A estimação da grandeza do quociente é um passo muito importante na compreensão do algoritmo da divisão. Serve não só para os/as alunos/as perceberem se a resolução é aceitável ou não como também para compreenderem a manipulação dos números que é feita durante a resolução. Para se estimar a grandeza do quociente deve-se multiplicar o divisor por potências de 10. Quando o resultado for maior do que o dividendo significa que o quociente terá grandeza imediatamente inferior à potência pela qual o divisor foi multiplicado.

Neste caso multiplicamos 38 por 10, o produto é 380 que é maior do que 230, logo podemos concluir que o quociente só terá um algarismo.

$$10 \times 38 = 380,\ 380 > 230 \text{ logo quociente} < 10$$

O uso da plica permite-lhes compreenderem em que ordem estão a trabalhar e como podem usar as propriedades do sistema de numeração para manipularem números. Depois da estimação podemos assinalar no algoritmo os espaços para irmos escrevendo o quociente. Este pormenor facilita a compreensão dos/as alunos/as e serve como guia orientador na resolução da operação.

2'30 | 38

Neste caso, como o dividendo tem 3 algarismos, devemos começar por ver se temos centenas suficientes para dividir pelo divisor. Neste caso é fácil perceber que não uma vez que o divisor tem 2 algarismo.

Como só temos 2 centenas e não as podemos distribuir equitativamente por 38 conjuntos temos de decompor essas 2 centenas em 20 dezenas e agrupá-las com as dezenas já existentes, 3. Ficamos com 23 dezenas. Agora voltamos a verificar se podemos distribuir equitativamente 23 dezenas por 38 conjuntos. Continuamos a não conseguir uma vez que 23 é menor que 38.

Vamos novamente decompor as 23 dezenas em unidades e agrupá-las com as unidades existentes, neste caso são zero. Ficamos com 230 unidades. Agora podemos distribuir equitativamente as unidades pelos conjuntos porque 230 é maior ou igual do que 38. Vamos então verificar quantos elementos terá cada conjunto. Concluímos que cada pacote deve conter 6 bolachas.

23'0 | 38

230 | 38
6

Multiplicamos 6 por 38 que dá 228 e encontramos a diferença entre 230 e 228 que é 2. Assim, o quociente é 6, e o resto 2.

230 | 38
2 6

3ªFASE

Divisão inteira com dividendos de 2 algarismos e divisores de 1 algarismo nos casos em que o dividendo é maior que 10 vezes o divisor, isto é, a operação tem mais do que um passo.

Nesta fase, como é a primeira vez que os alunos estão a resolver divisão com mais do que um passo, o/a professor/a pode colocar ao seu dispor todo o material que eles necessitem, podem usar a tabuada, as subtrações repetidas e outros auxiliares.

Agora vamos resolver uma divisão através do algoritmo formal mas esta será um pouco diferente porque é feita em mais do que um passo.

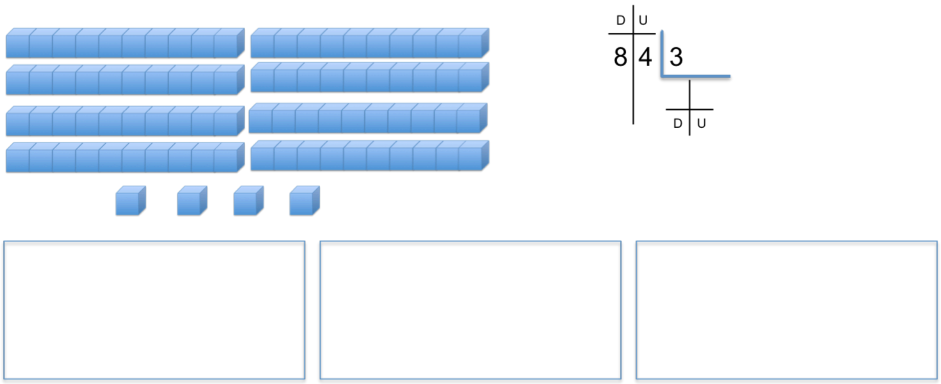
Imaginemos que em contexto de sala de aula surge um problema em que é necessário encontrar a solução para a seguinte operação: 84÷3.

Sendo a primeira vez que os alunos fazem uma divisão com mais do que um passo podemos usar o material multibásico e a grelha dos números como auxiliares.

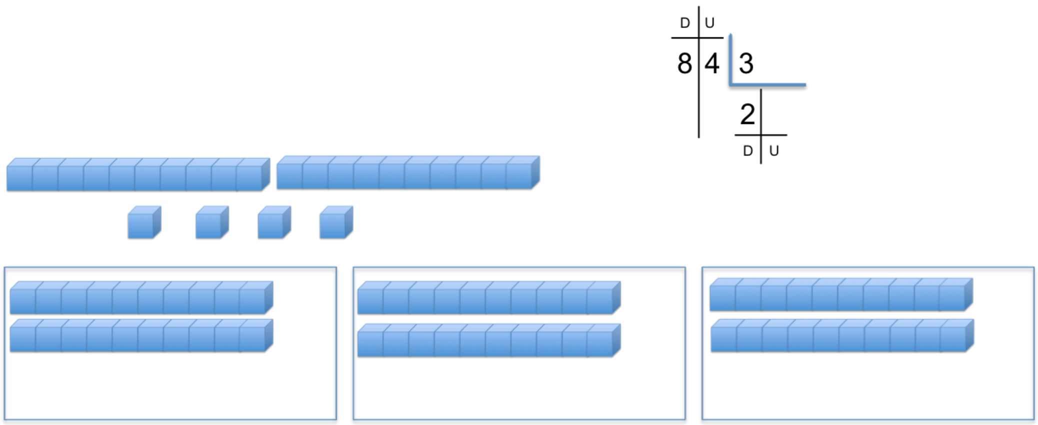
Começamos por fazer a estimação da grandeza do quociente.

$$10 \times 3 = 30,\ \ 30 < 84,\ \ \text{logo quociente} > 10$$
$$100 \times 3 = 300,\ 300 > 84,\ \text{logo quociente} < 100$$

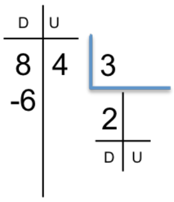
Sabendo que o quociente será um número com dois algarismo podemos representar a nossa operação em forma de algoritmo usando a grelha dos números e o material multibásico.



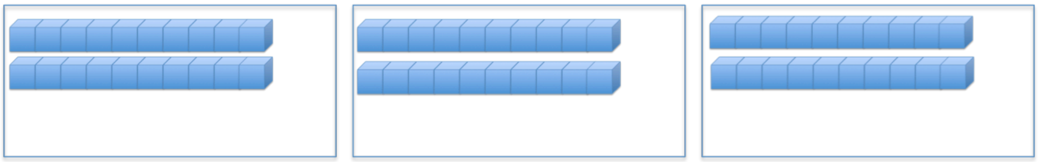
Agora vamos ver se conseguimos distribuir equitativamente as 8 dezenas pelos 3 conjuntos. Quantas dezenas conseguimos colocar em cada conjunto?



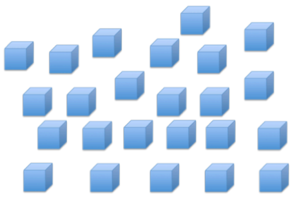
Se cada conjunto tem 2 dezenas, conseguimos distribuir equitativamente 6 dezenas. Por outro lado, também podemos referir, tendo em conta a tabuada do divisor, 2 conjuntos de 3 dezenas (2×3),

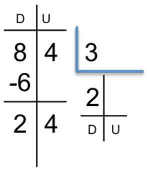


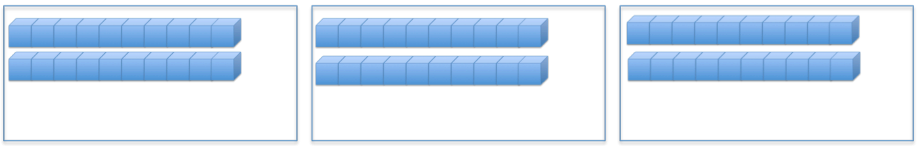
pois para repartir de forma equitativa temos de determinar quantos grupos de 3 dezenas podemos formar.



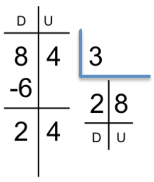
Em seguida, temos de decompor as 2 dezenas que restaram em 20 unidades e agrupá-las às unidades que já tínhamos.

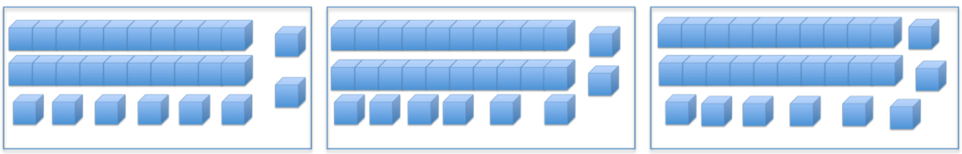






Podemos agora distribuir equitativamente as 24 unidades pelos 3 conjuntos.





Cada conjunto ficou com 8 das 24 unidades que existiam. Sendo 3 conjuntos, significa que conseguimos distribuir todas as unidades existentes. Esta operação é uma divisão exata, ou seja, é uma divisão com resto 0.

$$
\begin{array}{r|l|l}
D & U & \\
\hline
8 & 4 & 3 \\
-6 & & \\
\hline
2 & 4 & 2\,|\,8 \\
-2 & 4 & D\,|\,U \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

Por outro lado, também podemos referir, tendo em conta a tabuada do divisor, 8 conjuntos de 3 unidades (8×3), pois para repartir de forma equitativa temos determinar quantos grupos de 3 unidades podemos formar.

Assim, podemos referir que o valor posicional dos elementos (neste caso, unidades e dezenas) dos conjuntos formados está diretamente relacionado com ordem que se está a trabalhar no dividendo.

4ªFASE

a) Resolução com o algoritmo padrão dando significado à sequência de procedimentos, com divisor de um algarismo e quociente de dois algarismos.

Usamos primeiro um exemplo já conhecido dos/as alunos/as, neste caso vamos usar a operação anterior: $84 \div 3 = ?$

Vamos começar por estimar a grandeza do quociente.

$$10 \times 3 = 30,\ \ 30 < 84,\ \ \text{logo quociente} > 10$$
$$100 \times 3 = 300,\ 300 > 84,\ \text{logo quociente} < 100$$

Assim, o quociente variará entre 10 e 100, pelo que terá no máximo dois algarismos.

De seguida vamos proceder à colocação da plica para determinar a ordem pela qual podemos começar a repartir equitativamente pelo número de conjuntos, sendo este número o dividendo.

Como é possível repartir equitativamente 8 dezenas por 3 conjuntos (o número de dezenas é maior ou igual ao número de conjuntos), a plica será colocada entre a ordem das dezenas e das unidades.

A questão que se coloca agora é a seguinte:

Quantos conjuntos de 3 dezenas podemos formar?

$?\times3\ dezenas = 8\ dezenas$

Então, $1\times3=3$, como 3 dezenas é inferior a 8 dezenas podemos continuar; $2\times3=6$, como 6 dezenas é inferior a 8 dezenas podemos continuar; $3\times3=9$, como 9 dezenas é superior a 8 dezenas, a melhor estimativa para algarismo das dezenas do quociente é 2.

$$\begin{array}{r|l} 8'4 & 3 \\ \cline{2-2} & \underline{2}\ \underline{\ } \end{array}$$

Multiplicamos 2 por 3 e subtraímos o produto às dezenas do dividendo. Ficámos apenas com 2 dezenas das 8 que tínhamos inicialmente. De seguida temos de decompor essas 2 dezenas em 20 unidades e agrupá-las com as 4 unidades existentes.

Dividimos agora as 24 unidades por 3. A questão que se coloca agora é a seguinte:

Quantos conjuntos de 3 unidades podemos formar?

$?\times3\ unidades=24\ unidades$

Então, $4\times3=12$, como 12 unidades é inferior a 24 unidades podemos continuar; $7\times3=21$, como 21 unidades é inferior a 24 unidades podemos continuar; $8\times3=24$, como obtivemos 24 unidades, a melhor estimativa para algarismo das unidades do quociente é 8.

Efetuando a subtração das 24 unidades obtemos resto 0.

$$\begin{array}{r|l} 8'4 & 3 \\ \cline{2-2} 2\ 4 & \underline{28} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 8'4 & 3 \\ \cline{2-2} 2\ 4 & \underline{28} \\ 0 & \end{array}$$

b) Resolução com algoritmo padrão dando significado à sequência de procedimentos, com divisor de dois algarismos e quociente de um algarismo.

Vamos usar também um exemplo já conhecido dos/as alunos/as: $230 \div 38 = ?$

Vamos começar por estimar a grandeza do quociente.

$$10 \times 38 = 380,\ \ 380>38\ ,\ \ \text{logo quociente} < 10$$

Assim, o quociente variará entre 1 e 10, pelo que terá no máximo um algarismo.

De seguida vamos proceder à colocação da plica para determinar a ordem pela qual podemos começar a repartir equitativamente pelo número de conjuntos, sendo este número o dividendo.

Como já averiguámos anteriormente, apenas podemos distribuir equitativamente as 230 unidades pelos 38 conjuntos, porque 230 é maior ou igual do que 38.

A questão que se coloca agora é a seguinte:

Quantos conjuntos de 38 unidades podemos formar?

$$?\times 38\ unidades = 230\ unidades$$

A estimativa do quociente desta forma não é imediata. Pelo que iremos recorrer aos produtos parciais que se obtêm da multiplicação do algarismo do quociente pelo divisor.

Deste modo é como se a questão anterior fosse colocada da seguinte forma:

Quantos conjuntos de 8 unidades e 30 unidades (3 dezenas) podemos formar?

$$?\times 38\ unidades = ?\times(30+8)\ unidades = 230\ unidades$$

$$\begin{array}{r|l} 230 & 38 \\ \cline{2-2} & \underline{6} \end{array}$$

Começamos por multiplicar o algarismo do quociente pelas unidades do divisor: $6\times 8\ unidades = 48\ unidades$.

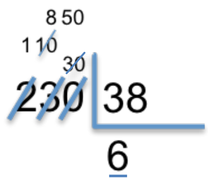
Temos de subtrair 48 às unidades da ordem das unidades do dividendo. O nosso dividendo tem 0 unidades. Vamos decompor as dezenas em unidades até se poder ter unidades na ordem das unidades para se poder separar as 48 unidades.

Observamos que ainda não temos unidades suficientes para subtrair 48. Temos de decompor uma centena do divisor em 10 dezenas

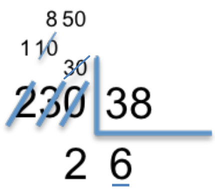
$$\begin{array}{r|l} \overset{1}{\cancel{2}}\overset{10}{\cancel{3}}\overset{30}{\cancel{0}} & 38 \\ \cline{2-2} & \underline{6} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2\cancel{3}\overset{30}{\cancel{0}} & 38 \\ \cline{2-2} & \underline{6} \end{array}$$

e depois decompor 2 dessas dezenas em 20 unidades para agrupá-las com as 30 existentes.

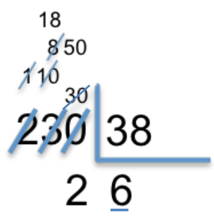


Agora já podemos separar as 48 unidades das 50 que temos.



Passamos para as dezenas do divisor: $6 \times 3 \ dezenas = 18$ dezenas.

Vamos subtrair 18 às dezenas do dividendo. Temos apenas 8 dezenas e por isso vamos decompor a centena em 10 dezenas e agrupá-las com as 8 existentes.



Efetuando, $18 - 18 = 0$, o resto desta divisão inteira é 2.

Assim, podemos referir que quando o divisor tem dois ou mais algarismos obtêm-se produtos parciais resultantes da multiplicação do algarismo do quociente e o valor posicional dos algarismos do divisor, tendo subjacente a ideia do algoritmo da multiplicação. E posteriormente estes produtos parciais serão separados na respetiva ordem.

c) Divisão inteira com dividendo de 3 algarismos e divisor de 2 algarismos nos casos em que o quociente terá mais do que um algarismo usando uma resolução que dá significado à sequência de procedimentos.

Vamos então resolver, usando o algoritmo, um exemplo que faz parte dos Cadernos de Apoio do 1° Ciclo com a diferença que esta proposta fará uma explicação detalhada dos passos a seguir.

$$34567 \div 89 =$$

Começamos por escrever a operação sob a forma de algoritmo e fazer a estimação da grandeza do quociente.

$10 \times 89 = 890, \; 890 < 34567$, logo quociente > 10
$100 \times 89 = 8900, \; 8900 < 34567$ logo quociente > 100
$1000 \times 89 = 89000, \; 89000 > 34567$ logo quociente < 1000

Assim, o quociente variará entre 100 e 1000, pelo que terá 3 algarismos no máximo.

3 4 5 6 7 | 8 9

_ _ _

A colocação da plica é essencial para se dar início ao algoritmo, ou seja, pretendemos saber quais são unidades que podem ser repartidas de forma equitativa pelos 89 conjuntos. Assim, não podemos repartir equitativamente 3 dezenas de milhar por 89, nem 34 milhares por 89, mas podemos repartir equitativamente 345 centenas por 89, sendo a plica colocada entre a ordem das centenas e das dezenas.

3 4 5' 6 7 | 8 9

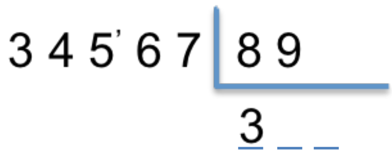
_ _ _

Estimamos o resultado, sabendo que cada aluno/a usará estratégias diferentes para fazer essa estimação. Pode acontecer que a estimação não seja a melhor, ou seja poderá colocar um algarismo no quociente inferior ao melhor e isso é detetado pelo aluno quando o resto é igual ou superior ao divisor, o que significa que tem de aumentar a estimativa do algarismo do quociente; outra situação que pode ocorrer é a colocação de um algarismo superior ao melhor e isso será detetado pelo aluno pois a dada altura já não tem mais unidades para continuar a separar, o que significa que tem de baixar a estimativa do algarismo do quociente. Estas situações também contribuem para a compreensão da operação.

Deste modo, a questão que se coloca é a seguinte:

Quantos conjuntos de 9 centenas e 80 centenas (8 milhares) podemos formar?

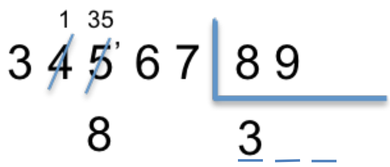
$$? \times 89 \; centenas = ? \times (80 + 9) \; centenas = 345 \; centenas$$



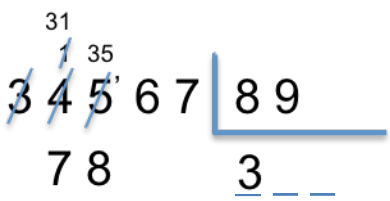
Começamos por multiplicar o algarismo do quociente pelas 9 centenas: $3 \times 9\ centenas = 27\ centenas$.

Temos de subtrair 27 às unidades da ordem das centenas do dividendo.

Como não temos unidades suficientes, na ordem das centenas do dividendo, vamos decompor 3 dos 4 milhares e agrupá-las às centenas existentes. Ficamos com 35 unidades, na ordem das centenas, às quais podemos separar 27.

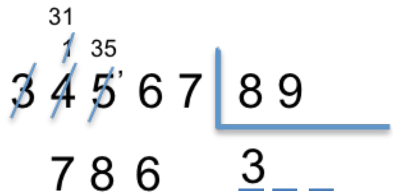


Passamos agora a saber quantos milhares foram agrupados em 3 conjuntos: $3 \times 8\ milhares = 24\ milhares$. Vamos à ordem dos milhares do dividendo e separamos 24. Não tendo unidades suficientes nessa ordem, efetuamos a decomposição das 3 dezenas de milhar em 30 milhares e agrupamos com os milhares que já existiam. Podemos então subtrair 24 a 31.



Restaram 78 centenas das 345 que tínhamos. Como o resto é inferior a 89, 3 é a melhor estimativa para o algarismo das centenas do quociente.

Para continuarmos temos de decompor estas 78 centenas em dezenas e agrupá-las com as existentes. Ficamos com 786 dezenas para dividir por 89.



Deste modo, a questão que se coloca é a seguinte:

Quantos conjuntos de 9 dezenas e 80 dezenas (8 centenas) podemos formar?

$$7\times 89\ dezenas = 7\times(80+9)\ dezenas = 786\ dezenas$$

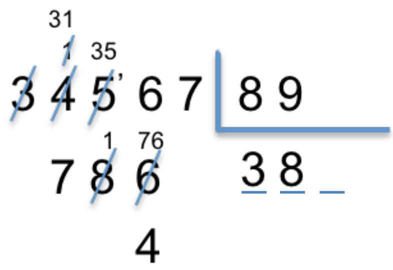
Após várias tentativas, a melhor estimativa para o algarismo das dezenas do quociente é 8.

Começamos por multiplicar a estimativa 8 do quociente pelas 9 dezenas:

$8\times 9\ dezenas = 72\ dezenas$

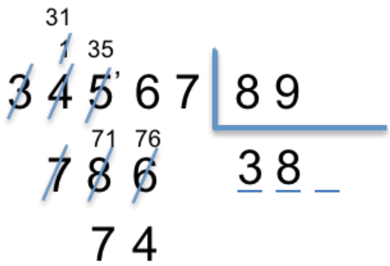
Temos de subtrair 72 dezenas às unidades da ordem das dezenas do dividendo.

Não tendo unidades suficientes na ordem das dezenas do dividendo para separar as 72 dezenas, vamos decompor 7 centenas em 70 dezenas, agrupá-las com as que já existem e então separar 72 dezenas de 76 dezenas, restando 4 dezenas.



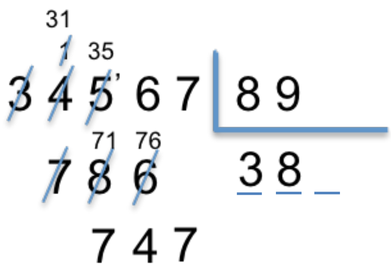
Passamos agora a saber quantas centenas foram agrupados em 8 conjuntos: $8\times 8\ centenas = 64\ centenas$.

Temos novamente de decompor milhares em centenas, para separar-mos 64 de 71 centenas, restando 7 centenas.



Assim, restaram 74 dezenas.

Para continuarmos temos de decompor as 74 dezenas em unidades e agrupar com as 7 unidades que existem, tendo assim 747 unidades.



Deste modo, a questão que se coloca é a seguinte:

Quantos conjuntos de 9 unidades e 80 unidades (8 dezenas) podemos formar?

$7\times 89 \; unidades = 7\times(80+9) \; unidades = 747 \; unidades$

Após várias tentativas, a melhor estimativa para o algarismo das unidades do quociente é 8.

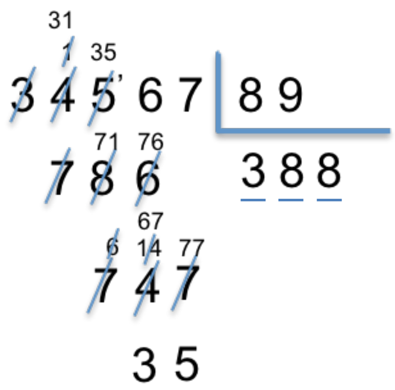
Começamos por multiplicar a estimativa 8 do quociente pelas 9 unidades: $8\times 9 \; unidades = 72 \; unidades$

Temos de subtrair 72 unidades à ordem das unidades do dividendo.

Não tendo unidades suficientes na ordem das unidades do dividendo para separar as 72 unidades, vamos decompor 1 centena em 10 dezenas, agrupá-las com as que já existem e decompor 7 dezenas em 70 unidades, ficando com 77 unidades e assim separar as 72, restando 5 unidades.

Vamos agora determinar quantas dezenas foram agrupadas em 8 conjuntos: $8\times 8 \; dezenas = 64 \; dezenas$.

Temos apenas 7 dezenas, no dividendo, por isso vamos decompor as 6 centenas em 60 dezenas ficando com 67 dezenas. Subtraindo 64 a 67 dezenas ficamos com 3 dezenas. Assim, o resto é 35 unidades da nossa divisão inteira.



A partir desta fase espera-se que os alunos ao compreenderem o significado dos procedimentos do algoritmo da divisão diminuam as dificuldades relacionadas com esta operação.

Notas Finais

Esta proposta didática tem como principal objetivo ser um contributo para o ensino com compreensão do algoritmo da divisão inteira e deste modo seja desmistificado e passe a ser entendido como parte essencial da aprendizagem matemática dos/as alunos/as. Espera-se que esta proposta didática seja uma ajuda no ensino com e para compreensão da algoritmo desta operação e na estruturação do seu ensino. Com esta forma de ensinar o algoritmo da divisão inteira os alunos conseguirão ter uma compreensão global e não uma aprendizagem segmentada e sem conexões. A operação pode ser dividida em duas áreas de compreensão: os procedimentos ou “saber como” e os aspetos conceptuais ou “saber porquê” (Ma, 1999). A compreensão apenas dos procedimentos leva os alunos/as a resolverem a operação segundo o que lhes foi ensinado mas sem compreenderem o que estão a fazer. Será resolver só por resolver, não percebendo o que está a acontecer aos números que estão a usar. A compreensão apenas dos aspetos conceptuais leva os alunos a saberem os termos corretos e o seu papel na divisão, sabem aquilo que deve acontecer e porquê mas depois não são capazes de resolver a operação. Se juntarmos os dois, como é esperado aqui, os alunos terão muito mais facilidade em compreender a divisão de uma forma global e de a usarem no seu dia-a-dia com destreza e facilidade.

Assim, os aspeto fundamentais e determinantes para a compreensão dos procedimentos efetuados durante o algoritmo da divisão estão relacionados com características do sistema de numeração decimal (Aharoni, 2012), sentido de número e de operação. Deste modo espera-se que tais aspets sejam lecionados também eles com compreensão, para que desta forma se ponham fim às mnemónicas dadas (como por exemplo em Bivar et al., 2012) para os ditos algoritmos “usais” que, em geral, fará com que os alunos não sintam confiança nos seus raciocínios levando-os a desistir dos seus próprios raciocínios (Kamii & Dominick, 1998).

Mas para que o ensino da divisão, em particular do algoritmo, seja com compreensão assume-se o conhecimento do professor como outro dos aspetos fulcrais a ter em conta para potenciar o desenvolvimento do raciocínio dos alunos de forma sustentada em conhecimentos sólidos e generalizáveis a qualquer etapa educativa. Este conhecimento do professor é considerado, aqui, na perspetiva do Mathematical Knowledge for Teaching – MKT (e.g., Hill, Rowan e Ball, 2005; Ball et al., 2008).

O conhecimento matemático para ensinar torna-se decisivo, aqui no que diz respeito à operação divisão, para que o/a professor/a saiba qual a fase de ensino da operação em que estão os/as seus/suas alunos/as, identificar as principais dificuldades e como irá orientar o ensino progressivo da mesma. Isto fará com que os seus alunos fiquem a compreender o significado matemático dos procedimentos bem como os aspetos terminológicos corretos e linguagem matematicamente adequada. Através do MKT do professor também terá grande importância na compreensão dos erros e dificuldades dos alunos, sendo relevante para estes aprender a partir dos seus erros e compreender aquilo que lhe queremos ensinar (Kamii & Housman, 2002).

O/A professor/a saber e compreender as operações aritméticas é essencial para a compreensão destas por parte dos alunos e aumentar-lhes-á a motivação, o gosto e o interesse pela matemática. A maioria das pessoas admite que não gosta de matemática. Ficam as seguintes questões para refletir: Será essa rejeição motivada pela falta de compreensão? E o que podem os/as professores/as fazer para mudar esta situação?

Agradecimentos

Este trabalho foi suportado pelo projeto da FCT PEst- OE/EEI/LA0008/2013.

Referências

Aharoni, R. (2012). *Aritmética para pais* (4ª ed.). Lisboa: SPM/Gradiva.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *JTE,* 59(5), 389-407.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2012). *Metas Curriculares do Ensino Básico - Matemática: Cadernos de apoio 1º Ciclo*. Lisboa: MEC.

Brocardo, J., & Serrazina, L. (2008). O sentido do número no currículo de matemática. *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* , pp. 97-115.

Carpenter, T., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. (1999). *Children's Mathematics: Cognitively Guided Instruction.* Portsmouth, NH: Heinemann/NCTM.

Fosnot, C. T. (1996). *Construtivismo e Educação.* Lisboa: Instituto Piaget.

Freuddenthal Institute (1991). *Realistic Mathematics Education in Primary School.* Utrecht: Center for Science an Mathematics Education.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. AERJ, 42(2), 371-406.

Heuvel-Panhuizen, M. (1996). *Assessment and Realistic Mathematics Education.* Utrcht: Freudenthal Institute.

Kammi, C. & Housman, L. (2002). *Crianças pequenas reinventam a aritmética - implicações da teoria de Piaget* (2ª ed.). (Trad. Cristina Monteiro). Porto Alegre: Artmed. (Original publicado em 2000)

Kamii, C., & Dominick, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (130-140). Resto, VA: NCTM.

Loureiro, C. (2004). Em defesa da utilização da calculadora - algoritmos com sentido numérico. *Educação e Matemática, (77), 22-29*

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: MEC.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1973). *A psicologia da criança* (2ª ed.). São Paulo, Brasil: Difusão Europeia do Livro.