

## Wavelets con Aplicación a Compresión de Datos

Investigación

Francisco Javier Villalobos Piña<sup>1</sup>, Rafael Molina Contreras<sup>1</sup> y H. Ulises Rodríguez Marmolejo<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Ingeniería Eléctrica Electrónica, Instituto Tecnológico de Aguascalientes,

Aguascalientes., México Teléfono (449) 910 50 02 Fax (123) 345-6789

E-mail: fvillalobospia@yahoo.com

### Resumen

El presente artículo expone los conceptos básicos acerca de la teoría de wavelets y una aplicación de dichas teorías en la compresión de datos para su transmisión inalámbrica mediante el uso de la transformada de Haar Nivel 1 para implementación a nivel discreto mediante el uso de un microcontrolador PIC18F4520 de microchip de tecnología RISC y el modem XBEE-PRO en sus versiones serial y usb como elementos de enlace entre el sistema remoto y la computadora personal.

**Palabras clave:** señales, espacio vectorial, frecuencia, compresión de datos, ondas, usb, risc.

### Abstract

This paper presents the basic concept about wavelets theory and approach to data compression for wireless communications. The tool used is the level one Haar transformation for discrete implementation on a RISC PIC18F4520 of microchip. The wireless communications use a XBEE-PRO modem than has two versions serial and usb both were used to communicate the remote system and personal computer.

**Key words:** signals, vectorial space, frequency, data compression, wavelets, usb, risc.

### Introducción

El análisis de señales ha representado una herramienta muy poderosa en diversos campos del conocimiento durante varias décadas. Las características principales de cualquier señal tanto en el dominio del tiempo como en la frecuencia, permiten obtener información valiosa de una infinidad de sistemas, incrementando y mejorando las técnicas de análisis y control de dichos sistemas. Tradicionalmente la transformada de Fourier ha sido empleada en el análisis de señales gracias a su capacidad de representación del contenido de frecuencias de una determinada señal, sin embargo hace aproximadamente dos décadas, se

han venido desarrollando nuevas técnicas de análisis que permitan abordarlas desde otra perspectiva enfocándose principalmente a señales no estacionarias o que presentan cambios bruscos. Una de estas nuevas herramientas que ha destacado es la teoría de wavelets,

la cual se ha establecido como una técnica muy importante al servicio de la investigación, complementándose con los métodos tradicionales. La teoría de wavelets es el resultado de un esfuerzo multidisciplinario de matemáticos, físicos e ingenieros y debido a esto posee un gran potencial y aplicabilidad en diversos campos [1], todo el conjunto de transformadas wavelets puede ser considerado como formas de representación tiempo-frecuencia. Las wavelets son funciones que poseen algunas propiedades especiales y son usadas en la representación de información o de otras funciones. Literalmente, el término "wavelet" significa onda pequeña. Una wavelet es una función matemática usada para dividir una función unidimensional dada en diferentes componentes de frecuencia y estudiar cada componente con una resolución que se relaciona con su escala [2]. Las wavelets son copias o versiones escaladas y trasladadas (conocidas como wavelets hijas") de una función oscilante de longitud y energía finitas (conocida "wavelet madre"). Al procesar señales es común encontrar fenómenos oscilantes que exhiben patrones de frecuencia variables en el tiempo. Surge entonces, en forma natural, la noción de los fenómenos localizados en tiempo y frecuencia, es decir de objetos que para su descripción requieren información conjunta de ambos dominios. Claramente, el par de Fourier no es la herramienta adecuada para este propósito, sin embargo la transformada wavelet si lo permite. Por lo tanto, la transformada wavelet tiene ventajas sobre la tradicional transformada de Fourier para la representación de funciones que presentan discontinuidades y picos, y para la descomposición y reconstrucción precisa de señales finitas no periódicas y/o no estacionarias. En la década pasada hemos atestiguado una explosión en la actividad del análisis wavelet [3], para darse una idea de los problemas que han sido resueltos mediante el uso de wavelets podemos mencionar: el filtraje y análisis de señales [4]-[8], compresión de señales [9]-[15], detección

de objetos y eliminación de ruido en imágenes [16], reconocimiento de voz [17], diagnóstico de problemas cardíacos, identificación de sistemas no lineales [18], control [19] y monitoreo [20] de redes, control estadístico de procesos [21]-[23], medición de potencia reactiva [24], extracción de características de señales bioeléctricas [25]-[28], entre otros. La organización del resto del artículo es la siguiente: En la Sección II se presentan los antecedentes y definiciones que componen el marco teórico de la representación wavelet. En la Sección III se describen las principales aplicaciones de la teoría de wavelets. Finalmente, un ejemplo práctico del uso de la transformada wavelet en el procesamiento de señales es presentado en la Sección IV.

**Nomenclatura**

- $\tau_a$  Operador traslación  $[(\tau_a f)(t) \triangleq f(t - a)]$ .
- $e_b$  Operador modulación  $[(e_b f)(t) \triangleq e^{j2\pi bt} f(t)]$ .
- $D_s$  Operador dilatación  $[(D_s f)(t) \triangleq |s|^{1/2} f(st)]$ .
- $\sim$  Operador involución  $[\tilde{f}(t) \triangleq \overline{f(t)}]$ .
- $\wedge$  Operador transformada de Fourier.
- $\vee$  Operador transformada inversa de Fourier.

**Antecedentes y definiciones**

En el contexto más general, una wavelet es una función que satisface dos condiciones principales [2]:

1. Tiene una ráfaga pequeña concentrada de energía finita en el dominio del tiempo.
2. Exhibe alguna oscilación en el tiempo. La primera condición hace la wavelet "pequeña", en el sentido que puede ser bien localizada en el tiempo, mientras la segunda condición la hace "ondulada". En términos formales, la representación wavelet es una representación en serie de una función ya sea con respecto a un conjunto ortonormal de funciones base o un conjunto marco de un espacio vectorial (base de Riesz), para el espacio de Hilbert de funciones integrables en su cuadrado  $L2(\mathbb{R})$ .

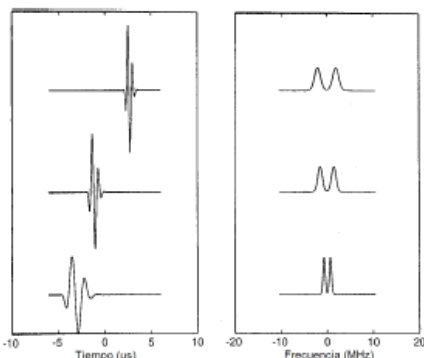


Figura 1: Familia generada por la dilatación y traslación en tiempo de una wavelet.

Una función wavelet genera una familia de wavelets a partir de su dilatación (estirándola o contrayéndola) y su traslación en el dominio del tiempo. Es decir, si  $g$  es una wavelet entonces el conjunto

$$\{\tau_t D_s g\}, \tag{1}$$

corresponde a las versiones dilatadas ( $s \neq 0$ ) y trasladadas de  $g$ , y por ende, la familia de wavelets generada por  $g$ . Donde  $s$  representa la escala y  $t$  la traslación. En la Figura 1, se puede observar que la dilatación en el tiempo contrayendo los valores de escala ( $s > 1$ ) corresponde a un estiramiento en el dominio de la frecuencia, es decir,  $(D_s g)^\wedge = D_{s-1} \wedge g$ . Por lo tanto, los efectos primarios de tal dilatación son:

- (i) Traslación a lo largo del eje de la frecuencia hacia frecuencias más altas.
- (ii) Mayor soporte, es decir una ampliación del ancho de banda [2].

**A. Ejemplos de Wavelets.**

A continuación se presentan algunas de las principales señales wavelet, como lo son la wavelet Haar, Shannon (o sinc) y Morlet [2]. La wavelet Haar lleva a una base ortonormal y es ampliamente usada cuando se requiere una familia wavelet con traslaciones enteras y dilataciones por potencias de 2. Ec. (2), dicha wavelet está definida por

$$g_{\text{Haar}} = 1_{(-1/2, 0]} - 1_{(0, 1/2]} \tag{2}$$

mientras que en el dominio de la frecuencia Ec. (3) (4),

$$\begin{aligned} \hat{g}_{\text{Haar}} &= (\tau_{-1/4} 1_{(-1/4, 1/4]} - \tau_{1/4} 1_{(-1/4, 1/4]})^\wedge \\ &= (e_{1/4} - e_{-1/4}) d_{\pi/2} \end{aligned} \tag{3}$$

explícitamente

$$\hat{g}_{\text{Haar}}(\gamma) = 2j \frac{\sin^2(\frac{\pi\gamma}{2})}{\pi\gamma}. \tag{4}$$

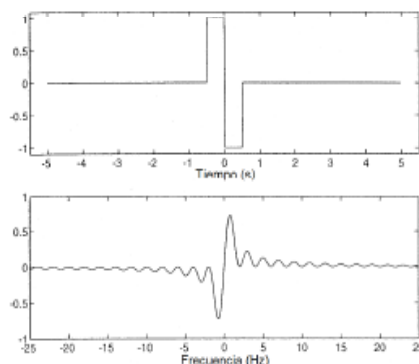


Figura 2: Wavelet Haar en los dominios tiempo y frecuencia.

La esencia de la wavelet Shannon es que su transformada de Fourier es constante sobre algún intervalo de frecuencias excluyendo el origen y cero en otros. La wavelet Shannon Ec. (5), puede definirse como la transformada inversa de Fourier de la función indicador, normalizada respecto a la norma  $L^2$ , en el intervalo  $(\gamma c - \gamma b/2, \gamma c + \gamma b/2]$  como

$$g_{\text{Shannon}} = (\tau_{\gamma c} D_{\gamma b}^{-1} 1_{(-1/2, 1/2]})^\vee = e_{\gamma c} D_{\gamma b} d_\pi \quad (5)$$

donde  $d_\pi$  es el kernel de Dirichlet (sinc), por lo tanto explícitamente Ec. (6),

$$g_{\text{Shannon}}(t) = \gamma_b^{-1/2} e^{j2\pi\gamma c t} \frac{\text{sinc}(\pi\gamma_b t)}{\pi t} \quad (6)$$

En las ecuaciones anteriores  $\gamma c$  representa una frecuencia central y  $\gamma b$  un ancho de banda determinados. La wavelet Morlet Ec. (7), es una función Gaussiana modulada, en este caso el ancho de banda es definido como la varianza de la transformada de Fourier de la wavelet Morlet Ec. (8),

$$\gamma_b = \int \gamma^2 \hat{g}_{\text{Morlet}}(\gamma) d\gamma \quad (7)$$

y es definida como

$$g_{\text{Morlet}}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma_b}} e^{j2\pi\gamma c t - (t^2/\gamma_b)} \quad (8)$$

### B. Transformada Wavelet Continua.

La transformada wavelet continua de una función  $f$  es Definida como el producto interno

$$\langle f, \tau_t D_s g \rangle$$

Cada punto  $(t, s)$  en el plano tiempo-escala, la magnitud de la transformada wavelet de una señal  $f$  describe cuánto es trasladada por  $t$  y escalada por  $s$ . A partir del conocimiento de la transformada wavelet es posible recuperar la señal original, es decir, la transformada es invertible y por lo tanto la wavelet  $g$  no puede elegirse arbitrariamente. Se requiere que  $g \in L^1(\mathbb{R})$  con media cero, es decir  $\hat{g}(0) = 0$ , para asegurar la invertibilidad de la transformada wavelet continua [2].

Definición. Para un espacio de Hilbert  $H$  Ec. (9), la transformada wavelet continua puede ser descrita como un mapeo  $Wg : H \rightarrow Wg(H)$  parametrizado por una función  $g$ . La transformada de una función unidimensional  $f \in L^2(\mathbb{R})$  está dada por

$$\begin{aligned} W_g : L^2(\mathbb{R}) &\rightarrow W_g(L^2(\mathbb{R})) \\ f &\mapsto \langle f, \tau_t D_s g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

$$(\tau_t D_s g)(\sigma) = |s|^{1/2} g(s(t - \sigma)). \quad (9)$$

Por lo tanto, la transformada wavelet Ec. (10), continua es una función bidimensional que puede escribirse como

$$(W_g f)(t, s) = \langle f, \tau_t D_s g \rangle = (f * D_s \bar{g})(t). \quad (10)$$

Para valores particulares de escala  $s$  y tiempo  $t$  la transformada wavelet asigna un valor numérico (complejo) para la función  $f$  el cual describe cualitativamente el grado de similitud entre la función  $f$  y una versión trasladada- $t$  y dilatada- $s$  de  $f$ . Explícitamente la transformada wavelet Ec. (11), continua de una señal  $f$  es

$$(W_g f)(t, s) = |s|^{1/2} \int_{\mathbb{R}} f(\sigma) \bar{g}(s(t - \sigma)) d\sigma. \quad (11)$$

$b$  y las funciones arbitrarias  $f, f_1$  y  $f_2$  en  $L^2(\mathbb{R})$ . La transformada wavelet continua,  $Wg$ , con respecto a una wavelet admisible  $g$  satisface las siguientes propiedades:

1. (Linealidad)  
 $(W_g(a f_1 + b f_2))(t, s) = a(W_g f_1)(t, s) + b(W_g f_2)(t, s)$
2. (Invariancia en el Tiempo)  
 $(W_g(\tau_b f))(t, s) = (W_g f)(t - b, s)$
3. (Dilatación)  
 $(W_g(D_a f))(t, s) = (W_g f)(at, a^{-1}s), a \neq 0$
4. (Escalas Negativas)  
 $(W_g f)(t, s) = (W_{\mathcal{R}g} f)(t, s) = W_g \mathcal{R}f(-t, s).$

### C. Transformada Wavelet Inversa Ec. (12),(13).

Suponga

$F \in W_g(L^2(\mathbb{R})), g \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$  tal que

$$C \triangleq \int_{\mathbb{R}} |\gamma|^{-1} |\hat{g}(\gamma)|^2 d\gamma < \infty, \quad (12)$$

y  $W_g^{-1} : W_g(L^2(\mathbb{R})) \mapsto L^2(\mathbb{R})$  es definida como

$$\begin{aligned} W_g^{-1} F &\triangleq C^{-1} \int_{\mathbb{R}} F(\cdot, s) * (D_s g) ds \\ &= C^{-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F(\sigma, s) (\tau_\sigma D_s g) ds d\sigma. \end{aligned} \quad (13)$$

Si  $f \in L^2(\mathbb{R})$  y  $F = W_g f$  entonces  $f = W_g^{-1} F$ .

#### D. Transformada Wavelet Discreta.

El diseño de una versión discreta de la transformada wavelet, esencialmente consiste en definir una apropiada red discreta de parámetros  $\{(m, n, s_n)\}$ , de traslaciones y escalas Ec. (14), respectivamente. El término transformada wavelet discreta es utilizado comúnmente para asociarlo al muestreo diádico

$$\Gamma_D \triangleq \{(2^{-n}m, 2^n)\}_{m,n \in \mathbb{Z}} \quad (14)$$

para ciertas wavelets que dan lugar a bases wavelet ortonormales. Bajo esta elección de los parámetros Ec. (15), tendremos entonces la usual expresión para las wavelets:

$$g_{mn}(\sigma) = 2^{n/2}g(m - 2^n\sigma) \quad (15)$$

La transformada wavelet discreta es usada para indicar un muestreo especial de la transformada wavelet continua que satisface las siguientes condiciones

1. El conjunto discreto tiempo-escala debe ser una red diádica  $\Gamma_D$ .
2. La familia de wavelets  $\{g_{mn}\}_{(m,n) \in \Gamma_D}$  debe formar una base ortonormal para el espacio de interés.
3. La wavelet madre debe tener soporte compacto.

Asumiendo que la wavelet madre es real y una señal  $f$  de energía finita la transformada discreta Ec. (16), se define como:

$$\begin{aligned} D(W_g f)(m, n) &= \langle f, g_{mn} \rangle \\ &= 2^{n/2} \int_{\mathbb{R}} f(\sigma)g(m - 2^n\sigma)d\sigma. \end{aligned} \quad (16)$$

Una forma sencilla de comprender el modo de operación de esta transformada es pensar que la señal es pasada por varios filtros pasa bajos y pasa altos, los cuales permiten separar las porciones de la señal de alta y baja frecuencia. Generalmente una señal discreta se expresa como  $f = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ , donde  $N$  es un entero positivo que representa el ancho de  $f$ . Típicamente, los valores de esta señal se obtienen de una señal analógica  $h$  medidos en el tiempo  $t = t_1, t_2, \dots, t_N$ , entonces Ec. (17)

$$f_1 = h(t_1), f_2 = h(t_2), \dots, f_N = h(t_N) \quad (17)$$

La transformada wavelet Haar descompone una señal discreta en 2 sub-señales de la mitad de ancho. Una señal es un promedio de la corrida o la tendencia (baja

frecuencia) y se representa como  $a_1 = (a_1, a_2, \dots, a_{N/2})$ , donde Ec. (18),

$$a_m = \frac{f_{2m-1} + f_{2m}}{\sqrt{2}} \quad (18)$$

Mientras que la otra sub-señal representa la fluctuación (alta frecuencia)  $d_1 = (d_1, d_2, \dots, d_{N/2})$ , donde Ec. (19),

$$d_m = \frac{f_{2m-1} - f_{2m}}{\sqrt{2}} \quad (19)$$

Por lo tanto, la transformación wavelet Haar [29] de nivel 1 es un mapeo  $fH_1 \rightarrow (a_1|d_1)$ . El mapeo inverso de la transformación Haar Ec. (20), para recuperar la señal original  $f$  esta dado por

$$f = \left( \frac{a_1 + d_1}{\sqrt{2}}, \frac{a_2 + d_2}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{a_{N/2} + d_{N/2}}{\sqrt{2}} \right) \quad (20)$$

#### E. Transformada Wavelet Multi-resolución.

Un factor interesante y clave para la proliferación del procesamiento de señales basado en wavelets fue el descubrimiento y la construcción de las bases wavelet ortonormales. Desarrollado por Mallat [30], el marco matemático y mecanismo principal para la construcción de bases wavelet ortonormales es llamado análisis multi-resolución. Definición. Suponga que  $\{V_k : V_k \subset H\}$  es una secuencia creciente de subespacios y  $\varphi \in V_0$  una función de escalamiento. El par  $(\{V_k\}, \varphi)$  se dice un análisis multi-resolución de  $H$  si se tiene lo siguiente:

1. (Base Ortonormal para  $V_0$ ) existe una función  $\varphi \in V_0$  tal que  $\{\tau_n\varphi\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal para  $V_0$ .
2. (Invariancia a la Dilatación) si  $f \in V_k$  entonces  $D_2f \in V_{k+1}$ .
3. (Completes)  $\bigcap V_j = H$  y  $\bigcap V_j = \{0\}$ .

La idea de Mallat fue diseñar un algoritmo basado en un banco de filtros que permite obtener una transformada wavelet en forma instantánea a partir de los datos de interés separando las componentes de alta y baja frecuencia. Naturalmente, los filtros son diseñados de manera que sean complementarios. Cuando se trabaja con señales de alta complejidad no basta con dos bandas de frecuencia, sino que la descomposición



debe ser de más niveles al subdividir la señal de baja frecuencia, generando una descomposición multinivel conocida como ramificación o árbol wavelet. Al ser descompuesta la señal en mayor cantidad de bandas se posee una información más detallada acerca de la señal, por lo que esta metodología es conocida como multi-resolución.

**Aplicación en compresión de datos**

La compresión de señales juega un papel muy importante en sistemas de comunicación digital, debido a que una gran cantidad de información puede enviarse y recibirse utilizando una menor cantidad de bits para su representación. En este trabajo se presenta un ejemplo de aplicación para comunicación RF, utilizando una wavelet de Haar que realiza la compresión de la información. Se tiene una señal original  $f$  a una frecuencia de 100Hz, esta señal es muestreada con un PIC18F4520 a una frecuencia de 31,350Hz. Para la etapa de comunicación se utiliza un bloque de información de 128 muestras, la cual es comprimida mediante una transformada wavelet Haar de nivel 1. La transmisión se efectúa mediante compresión de datos mediante el envío de solo 64 muestras de las 128.

Esto se logra gracias a la descomposición de la señal original en 2 partes fluctuación y valor medio ya que se asume una señal suave. La señal se transmite mediante un modem RF Xbee-PRO (serial) y se recibe con otro modem RF Xbee-PRO (USB) conectado a una computadora personal. Finalmente, se emplea un programa en Delphi que descomprime la información, muestra la señal recibida y calcula las pérdidas de energía ocasionadas por la compresión.

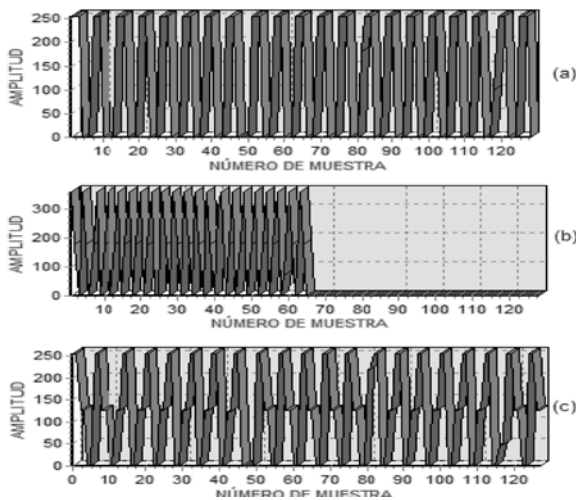


Figura 3: Señales correspondientes a la aplicación de compresión en comunicación RF.

En la Figura 3 se presentan las gráficas correspondientes a la compresión de información para comunicación RF. La gráfica 3(a) muestra la señal original, en 3(b) se presenta la transformación wavelet Haar y finalmente en 3(c) se observa la señal recibida en la computadora. Para utilizar la transformación wavelet Haar de nivel 1, la señal  $f$  debe tener un número par de elementos, por ejemplo; si  $f = (2, 8, 7, 6)$  su transformación empleando la wavelet Haar es:

$$a_1^1 = \frac{2+8}{2}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}, \quad a_2^1 = \frac{7+6}{2}\sqrt{2} = 12.5\sqrt{2}$$

$$d_1^1 = \frac{2-8}{2}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}, \quad d_2^1 = \frac{7-6}{2}\sqrt{2} = 0.5\sqrt{2}$$

Se utiliza la componente de tendencia, que representa la señal y su energía compactadas a la mitad del intervalo.

En la figura 4 y 5 respectivamente se muestran la pantalla del programa de computadora desarrollado en el lenguaje de programación visual delphi y el diagrama esquemático del hardware implementado.

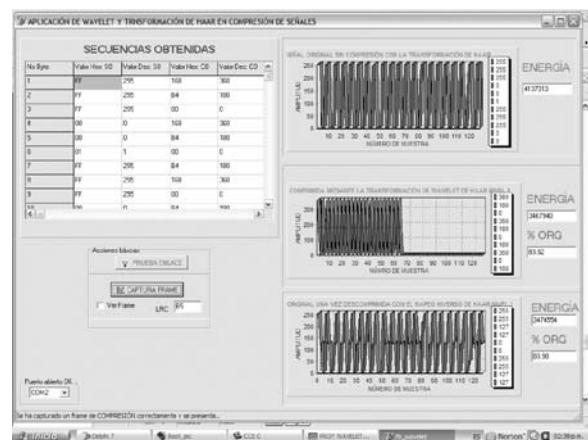


Figura 4. Programa de computadora desarrollado en ELPHI

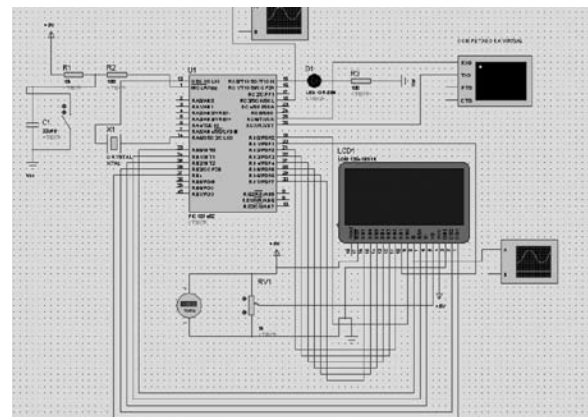


Figura 5. Diagrama esquemático del hardware con PIC18F4520

## Conclusiones

Se diseñó un sistema de comunicación que es capaz de comprimir el contenido de la señal al 50% de la magnitud de la secuencia original, transmitirla y recuperarla mediante el mapeo inverso con el uso de la transformada de Haar nivel 1. El sistema implementado permite visualizar la señal sin compresión validar su contenido energético y posteriormente una vez efectuada la descompresión de la señal volver a cuantificar dicho nivel de energía y así validar el nivel de pérdida de información que para esta aplicación es despreciable.

## Referencias

- [1] C. Chui, (1992). *"Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications"*. Academic Press.
- [2] A. Teolis, (1998). *Computational Signal Processing with Wavelets*. Birkhäuser.
- [3] J. Walker, (1999). *A Primer on Wavelets and their Scientific Applications*. Chapman&Hall/CRC.
- [4] A. Nayak, and R. Roy, (1998). "Anesthesia Control Using Midlatency Auditory Evoked Potentials". *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, Vol. 45, No. 4, April 1998, pp. 409-421.
- [5] R. Ortolan, R. Naoki, R. Pereira, C. Cabral, J. Pereira, and A. Cliquet. (2003), "Evaluation of Adaptive/Nonadaptive Filtering and Wavelet Transform Techniques for Noise Reduction in EMG Mobile Acquisition Equipment". *IEEE Trans. on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, Vol. 11, No. 1, March 2003, pp. 60-69.
- [6] L. Zheng, Y. Zhang, F. Yang, and Da-Tian Ye. (1999), "Synthesis and Decomposition of Transient-Evoked Otoacoustic Emissions Based on an Active Auditory Model". *IEEE Trans. On Biomedical Engineering*, Vol. 46, No. 9, pp. 1098-1106.
- [7] Jun Yao, and Y. Zhang. (2001), "Bionic Wavelet Transform: A New Time-Frequency Method Based on an Auditory Model". *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, Vol. 48, No. 8, August 2001, pp. 856-863.
- [8] T. Zikov, S. Bibian, G. Dumont, M. Huzmezan, and C. Ries. (2006), "Quantifying Cortical Activity During General Anesthesia Using Wavelet Analysis". *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, Vol. 53, No. 4, April 2006, pp. 617-632.
- [9] J. Huang, Ying-Ying Lu, A. Nayak, and R. Roy, (1999), "Depth of Anesthesia Estimation and Control". *IEEE Trans. On Biomedical Engineering*, Vol. 46, No. 1, pp. 71-81.
- [10] Zhitao Lu, D. Youn Kim, and W. Pearlman, (2000), "Wavelet Compression of ECG Signals by the Set Partitioning in Hierarchical Trees Algorithm". *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, Vol. 47, No. 7, July 2000, pp. 849-856.
- [11] L. Brechet, M. Lucas, C. Doncarli, and D. Farina, (2007), *"Compression of Biomedical Signals With Mother Wavelet Optimization and Best-Basis Wavelet Packet Selection"*. *IEEE Trans. On Biomedical Engineering*, Vol. 54, No. 12, pp. 2186-2192.
- [12] R. Istepanian, and A. Petrosian, (2000) "Optimal Zonal Wavelet- Based ECG Data Compression for a Mobile Telecardiology System". *IEEE Trans. on Information Technology in Biomedicine*, Vol. 4, No. 3, September 2000, pp. 200-211.
- [13] M. Hilton, (1997), "Wavelet and Wavelet Packet Compression of Electrocardiograms". *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, Vol. 44, No. 5, May 1997, pp. 394-402.
- [14] K. Oweiss, (2006), "A Systems Approach for Data Compression and Latency Reduction in Cortically Controlled Brain Machine Interfaces". *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, Vol. 53, No. 7, July 2006, pp. 1364-1377.
- [15] R. Gopinath, J. Odegard, and C. Bums, (1994), "Optimal Wavelet Representation of Signals and the Wavelet Sampling Theorem". *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Vol. 41, No. 4, April 1994, pp. 262-277.
- [16] I. Dinov, M. Mega, P. Thompson, R. Woods, L. Summers, E. Sowell, and A. Toga, (2002) "Quantitative Comparison and Analysis of Brain Image Registration Using Frequency-Adaptive Wavelet Shrinkage". *IEEE Trans. on Information Technology in Biomedicine*, Vol. 6, No. 1, March 2002, pp. 73-85.
- [17] M. Kobayashi, M. Sakamoto, T. Saito, Y. Hashimoto, M. Nishimura, and K. Suzuki, (1998), "Wavelet Analysis Used in Text-to-Speech Synthesis". *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Vol. 45, No. 8, August 1998, pp. 1125-1129.
- [18] N. Sureshbabu, and J. A. Farrell, (1999), "Wavelet-Based System Identification for Nonlinear Control". *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 44, No. 2, February 1999, pp. 412-417.
- [19] C. M. Chang and T. S. Liu, (2006), "A Wavelet Network Control Method for Disk Drives". *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, Vol. 14, No. 1, January 2006, pp. 63-68.
- [20] L. Benetazzo, C. Narduzzi, P. Pegoraro, and R. Tittoto, (2006), "Passive Measurement Tool for Monitoring Mobile Packet Network Performances". *IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement*, Vol. 55, No. 2, April 2006, pp. 449-455.
- [21] S. Zhou, B. Sun, and J. Shi, (2006), "An SPC Monitoring System for Cycle-Based Waveform Signals Using Haar Transform". *IEEE Trans. on Automation Science and Engineering*, Vol. 3, No. 1, January 2006, pp. 60-72.
- [22] R. Ganesan, T. Das, and K. Ramachandran, (2007), "A Multiresolution Analysis-Assisted Reinforcement Learning Approach to Run-by-Run

- Control". *IEEE Trans. on Automation Science and Engineering*, Vol. 4, No. 2, April 2007, pp. 182-193.
- [23] J. Scharcanski, (2006), "Stochastic Texture Analysis for Measuring Sheet Formation Variability in the Industry". *IEEE Trans. On Instrumentation and Measurement*, Vol. 55, No. 5, October 2006, pp. 1778-1785.
- [24] Weon-Ki Yoon, and M. Devaney, (2000), "Reactive Power Measurement Using the Wavelet Transform". *IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement*, Vol. 49, No. 2, April 2000, pp. 246-252.
- [25] Jun-Uk Chu, I. Moon, and Mu-Seong Mun, (2006), "A Real-Time EMG Pattern Recognition System Based on Linear-Nonlinear Feature Projection for a Multifunction Myoelectric Hand". *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, Vol. 53, No. 11, November 2006, pp. 2232-2239.
- [26] Y. Al-Assaf, (2006), "Surface Myoelectric Signal Analysis: Dynamic Approaches for Change Detection and Classification". *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, Vol. 53, No. 11, November 2006, pp. 2248-2256.
- [27] D. Farina, M. Lucas, and C. Doncarli, (2008), "Optimized Wavelets for Blind Separation of Nonstationary Surface Myoelectric Signals". *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, Vol. 55, No. 1, January 2008, pp. 78-86.
- [28] K. Englehart, B. Hudgins, and P. Parker, (2001), "A Wavelet-Based Continuous Classification Scheme for Multifunction Myoelectric Control". *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, Vol. 48, No. 3, March 2001, pp. 302-311.
- [29] Y. Nievergelt, (2001), *Wavelets Made Easy*. Birkh"auser.
- [30] S. Mallat, (1989), "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation". *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 11, No. 7, July 1989, pp. 674-693.

**Recibido:** 7 de noviembre de 2008

**Aceptado para publicación:** 26 de noviembre de 2008