Modelado intervalar modal de sistemas de producción

José Luis Angel Rodríguez Silva[1], Reyes Hernández Díaz[2]

Depto. De Ingeniería Industrial

Instituto Tecnológico de Aguascalientes

Av. López Mateos 1801 Ote. Esq. Av. Tecnológico

Aguascalientes, Ags. C.P. 20256

e-mail: jlangel314@yahoo.com, rhern004@correu.udg.es

Tel.: +(4) 9-10-50-02 ext. 102

Fax: +(4) 9-70-04-23

Resumen

Muchos de los procesos físicos y tecnológicos son difíciles de describir en términos de su comportamiento. La causa y las relaciones de efecto no son fácilmente discernibles debido a las muchas variables involucradas y sus críticas interacciones. He aquí el porqué muchos procesos físicos, cuya caracterización dinámica necesita ser bien comprendida, son muy complejos así que un subsiguiente enfoque matemático formal es necesario. El presente artículo muestra el uso del modelado intervalar modal como una alternativa al desarrollo y aplicación de simulación puntual e intervalar clásica a sistemas de producción.

Palabras clave: Modelado intervalar, modelado intervalar modal, modelado de sistemas de producción, simulación.

Introducción

Los resultados numéricos son exactos solamente en un rango limitado y contienen cierto grado de error numérico. Los resultados numéricos que no resulten de aquellos que se obtienen de números enteros pequeños, son solo resultados estimados o aproximados de alguna medición o cálculo. De hecho, en tiempos anteriores un número aislado parecía lo suficientemente apropiado para describir la información numérica asociada debido a que es conocido de antemano de qué tipo de medición o proceso de cálculo proviene el fenómeno en observación y cual es su correspondiente margen de error, pero en general, los números simples son incapaces de usarse para representar información numérica. Por ejemplo, es difícilmente aceptable el adivinar del símbolo 15 cuál de la información se desea proporcionar si es $15 \pm 0.1 = [14.9,15.1]$ ó $15 \pm 5 = [10,20]$. El único camino para indicar "la gama de un resultado numérico" es mediante la señalización de un límite inferior y uno superior de sus valores posibles mediante, probablemente, una notación como 15 ± 0.1 ó 15 ± 5, o quizá mediante una notación intervalar directa como $[14.9,15.1]$ ó $[10,20]$. Los intervalos, denotados generalmente por $[a,b]$ con las condiciones $a \leq b$, son los elementos básicos elementales de información numérica. Pero cuando se tiene el problema de operar o desarrollar matemáticas con información numérica, este es precisamente el punto de partida de las llamadas matemáticas

[1] Alumno del programa de Maestría en Ciencias en Ingeniería Industrial del I.T. de Aguascalientes

[2] Alumno del doctorado en Informática Industrial/Tecnologías Avanzadas de Producción de la Universitat de Girona, España

intervalares desde el camino usual de manipular información numérica mediante números. Desde el punto de vista intervalar la alternativa común de desarrollar cálculos con números simples es para posibilitar solamente una indicación de que el verdadero resultado debería ser alcanzado mediante el uso de cálculos intervalares: solamente un valor simple en algún lugar dentro del resultado intervalar completo. Siguiendo este camino sistemáticamente, las matemáticas intervalares usan a través del proceso completo de desarrollo de los cálculos, todo el rango posible de valores que corresponden a cada hecho básico dentro de la información numérica.

Los números reales generalizan el concepto de una fracción exacta a un número exacto y el conjunto modela en forma geométrica la línea real **R**, la cual es el sustento ideal –tanto conceptual como intuitivamente- sobre el cual los modelos numéricos son concebidos. Desde un punto de vista teórico, es posible trabajar con cualquier número real con un número finito o infinito de dígitos, pero los números reales no son muy convenientes, como su nombre podría indicar, porque en la práctica no es posible el manipular con números que tengan cantidades arbitrarias o infinitas de dígitos. Las representaciones computacionales contienen solamente un número limitado de dígitos. Podríamos pensar que la tecnología permite el trabajar con un número suficiente de dígitos, pero esto es ignorar la realidad y el dotar de propiedades al conjunto **R** que, de hecho, no posee.

Intervalos Clásicos

Los hechos señalados anteriormente son ampliamente reconocidos y puestos en marcha desde la perspectiva del Análisis Intervalar Clásico [1] en las matemáticas numéricas, cuando ésta decide sistemáticamente el conservar las dos cotas digitales discernibles más cercanas, una cota inferior $n1(\mathrm{DI})$, y una cota superior $n2(\mathrm{DI})$, para representar cualquier valor real $x(\mathbf{R})$ definido conceptualmente como algo lo suficientemente compatible con una medición definida o un desarrollo real de cálculos. Así, cualquier número real se encuentra entre dos números digitales consecutivos $n1(\mathrm{DI})$ y $n2(\mathrm{DI})$. La identificación del par de números digitales $(n1,n2)$ que acotan un número real en un intervalo teórico-conjuntista $[n1,n2]$ que consiste en el conjunto de los intervalos clásicos teóricos conjuntistas. En el enfoque del Análisis Intervalar Clásico el cálculo numérico de los intervalos digitales

$$[n1(\mathrm{DI}), n2(\mathrm{DI})] = \{x\in \mathrm{DI} \mid n1(\mathrm{DI}) \le x \le n2(\mathrm{DI})\}$$

son los hechos computacionales. Si $I(\mathbf{R})$ denota el conjunto de intervalos con números reales como cotas

$$I(\mathbf{R}) = \{[x1, x2] \mid x1\in \mathbf{R}, x2\in \mathbf{R}, x1 \le x2\}$$

Los intervalos matemáticos identifican el intervalo $[a,b]$ con el conjunto de los números reales x que están dentro de a y b : $[a,b] = \{ x \mid a \le x \le b\}$

Lo que hace que los intervalos sean no triviales en los cálculos numéricos, y en análisis es que algunas regularidades fundamentales de los números reales se pierden. Este y otros defectos del Análisis Intervalar Clásico pueden llevarnos a un cierto sentimiento derrotista, pero afortunadamente sólo basta un esfuerzo mayor para completar su estructura a través de un una teoría conjuntista más amplia.

Intervalos Modales

El Análisis de los Intervalos Modales [2] es una extensión natural del Análisis Intervalar Clásico donde el concepto de intervalo es ampliado de la siguiente manera. Usando las notaciones

E(x,X) en lugar de ($\exists\, x\in X$)

U(x,X) en lugar de ($\forall\, x\in X$)

para los cuantificadores lógicos y

$[a,b]' := \{x\in \mathbf{R} \mid \min(a,b) \leq x \leq \max(a,b)\} = [b,a]'$

para el conjunto de elementos que pertenecen a un intervalo clásico, por ejemplo

$[1,2]' = \{x\in \mathbf{R} \mid 1 \leq x \leq 2\} = [2,1]'$

un intervalo modal $[a,b]$ está definido por

$$[a,b] := \begin{cases} ([a,b]',\mathrm{E}) & \text{si } a \leq b \\ ([a,b]',\mathrm{U}) & \text{si } a \geq b \end{cases}$$

Por ejemplo, [1,2] = ([1,2]',E) y [2,1] = ([2,1]',U). Si $a \leq b$ hablamos de un intervalo con la modalidad "propia" (o intervalo propio) y si $a \geq b$ hablamos de un intervalo con la modalidad "impropia" (o intervalo impropio). Están relacionados por el operador "dual"

$\mathrm{du}([a,b]) = [b,a]$

Si el conjunto de intervalos clásicos es

$I(\mathbf{R}) = \{[a,b] \mid a\in \mathbf{R},\ b\in \mathbf{R},\ a \leq b\}$

el conjunto de intervalos modales es

$I^*(\mathbf{R}) = \{[a,b] \mid a\in \mathbf{R},\ b\in \mathbf{R}\}$

e $I^*(\mathbf{R})$ es una extensión de $I(\mathbf{R})$, porque $I(\mathbf{R}) \subseteq I^*(\mathbf{R})$.

Las operaciones racionales con intervalos modales son extensiones naturales de las operaciones racionales entre intervalos clásicos. En $I^*(\mathbf{R})$ las preguntas como las siguientes tienen una solución de fácil respuesta.

Ecuaciones Intervalares

En el Análisis Intervalar Clásico una ecuación como

$[a,b] + [x,y] = [c,d]$

tiene una solución intervalar que valida las rela-ciones $a+x = c$ y $b+y = d$ sólo cuando $c+b \leq a+d$.

Ejemplo:

$[1, 3] + [x, y] = [4, 5] \Rightarrow x + 1 = 4$ y $y + 3 = 5$

$\Rightarrow [x, y] = [3, 2]$ no es un intervalo o

$[1, 3] + [x, y] = [2, 7] \Rightarrow x + 1 = 2$ y $y + 3 = 7$

$\Rightarrow [x, y] = [1, 4]$ es la solución

Aun en este caso, este método falla para obtener la solución de cualquier operación intervalar teórica conjuntista entre $[a,b]$ y $[c,d]$ porque

$[1, 3] + [x, y] = [2, 7] \Rightarrow [x, y] = [2, 7] - [1, 3] =$

$[-1, 6] \neq [1, 4]$

En el Análisis Intervalar Modal es fácil y directo el obtener la solución verdadera para las ecuaciones $A+X = B$, la cual es $X = B - \mathrm{du}(A)$, y $A*X = B$, la cual es $X = B/\mathrm{du}(A)$.

Siguiendo el ejemplo, la solución es

$[1, 3] + [x, y] = [2, 7] \Rightarrow [x, y] = [2, 7] - \text{du}[1, 3] =$

$[2, 7] - [3, 1] = [1, 4]$

porque

$[1, 3] + [1, 4] = [2, 7]$

lo que significa que

$\forall\ (x \in [1,3])\ \forall\ (y \in [1,4])\ \exists\ (z \in [2,7])\ (z = x+y)$

Y aún cuando la primera ecuación tiene una solución

$[1,3] + [x, y] = [4,5] \Rightarrow [x, y] = [4, 5] - \text{du}[1,3] =$

$[4,5] - [3,1] = [3, 2]$

porque

$[1,3] + [3, 2] = [4, 5]$

lo que significa que

$\forall\ (x \in [1,3])\ \exists\ (y \in [2,3])\ \exists\ (z \in [4,5])\ (z = x+y)$

Significado de los resultados intervalares

Un resultado intervalar *A* evaluación funcional *f* en un intervalo $\boldsymbol{X} = (X1,..., Xn)$ en el Análisis Intervalar Clásico tiene solamente la interpretación semántica:

$U(x1 \in X1) ... U(xn \in Xn)\ E(z \in A)\ (z = f(x1..., xn))$

Y esta es la única semántica accesible. Debido a que el significado semántico de una función depende de la modalidad de los intervalos, es posible en el Análisis Intervalar Modal el manipular las modalidades para obtener una semántica deseada.

Ejemplo: Para la función simple $z = x+y$ tenemos (tanto en el contexto de los intervalos clásicos como en el de los modales):

$[5, 11] = [1, 3] + [4, 8] \Rightarrow U(x,[1, 3]')\ U(y,[4, 8]')\ E(z, [5, 11]')\ (z = x+y)$

Si queremos la semántica

$U(x,[1,3]')\ U(z, ?\ )\ \ E(y,[4,8]')\ (z = x+y)$

Los cálculos tendrán que ser

$[9,7] = [1,3] + [8,4] \Rightarrow U(x,[1,3]')\ U(z,[9,7]')\ E(y,[8,4]')\ (z = x+y)$

Similarmente, podemos obtener otras semánticas mediante la manipulación de las modalidades de los operandos

$[7,9] = [3,1] + [4,8] \Rightarrow U(y,[4,8]')\ E(x,[3,1]')\ E(z,[7,9]')\ (z = x+y)$

$[11,5] = [3,1] + [8,4] \Rightarrow U(z,[11,5]')\ E(x,[3,1]')\ E(y,[8,4]')\ (z = x+y)$

Evaluación de funciones

En al Análisis Intervalar Clásico, para función real *f*

$$R_f(X) = \left[min_{x \in X} f(x), Max_{x \in X} f(x) \right]$$

continua en la región

$\boldsymbol{X} = (X1,...,Xn) \subseteq \mathbf{R}n$

La extensión unida *Rf* es el rango de *f* en la región *X*, definido por

Para una función racional $f(x1,..., xn)$ una extensión intervalar racional $f\mathrm{R}(X1,..., Xn)$ está definida a través del árbol sintáctico de f, con sus argumentos $x1,...,xn$ reemplazados por los argumentos intervalares $X1,...,Xn$ y con las operaciones numéricas de f reemplazadas por sus correspondientes operaciones intervalares, las cuales en caso de computaciones aproximadas deben ser redondeadas externamente. Es bien conocido que ambas extensiones Rf están relacionadas por

$$Rf(X1,..., Xn) \subseteq f\mathrm{R}(X1,..., Xn)$$

La extensión Rf no es computable en general pero $f\mathrm{R}$ sí lo es y la pérdida de información que representa $f\mathrm{R}$ respecto a Rf es, en la mayoría de los casos, muy grande.

Ejemplo: Para $f(x,y) = (x–y)/(y+x)$ y $x\in [1,2]$, $y\in [3,6]$ es posible obtener la extensión unida con las herramientas del cálculo diferencial

$$Rf([1, 2], [3,6]) =[-0.625, -0.25]$$

y la extensión de intervalos racionales a través de la aritmética intervalar

ambos verificando que $Rf([1,2],[3,6]) \subseteq f\mathrm{R}([1,2],[3,6])$.

$$fR([1,2],[3,6]) = \frac{[1,2]-[3,6]}{[2,1]+[3,6]} = \frac{[-5,-1]}{[8,4]} = [-0.625,-0.25]$$

Pero en el Análisis Intervalar Modal es muy fácil, en este caso, el obtener Rf a través de cálculos intervalares.

$$fR([1,2],[3,6]) = \frac{[1,2]-[3,6]}{[1,2]+[3,6]} = \frac{[-5,-1]}{[4,8]} = [-1.25,-0.125]$$

donde los "intervalos" [2,1] y [6,3] son los intervalos duales de [1,2] and [3,6]. El significado semántico de este resultado es:

U(x, [1, 2]') U(y, [3,6]') E(z, [- 0.625, - 0.25]') ($z = (x–y)/(y+x)$)

Simulaciones con modelos matemáticos

Muchos de los procesos físicos y tecnológicos son difíciles de describir en términos de su comportamiento. La causa y las relaciones de efecto no son fácilmente discernibles debido a las muchas variables involucradas y sus críticas interacciones. He aquí el porque muchos procesos físicos, cuya caracterización dinámica necesita ser bien comprendida, son muy complejos así que un subsiguiente enfoque matemático formal es necesario. Definiendo las variables físicas, realizando suposiciones acerca de las relaciones y los factores que caracterizan la respuesta del proceso físico y haciendo uso de las teorías físicas estándares, es como llegamos a obtener ecuaciones matemáticas las cuales definen el estado matemático del modelo para los sistemas físicos. Consideraciones como un conocimiento incompleto del sistema, el uso de modelos simplificados debido a la complejidad intrínseca, la incertidumbre y la variación con el tiempo de los parámetros y los fenómenos no predecibles o no modelados es lo que nos lleva a los modelos intervalares.

Ejemplo: El agua de un tanque, de volumen v, es calentada por medio de un sistema hidráulico formado por un circuito primario, donde el agua caliente es bombeada por la bomba B_1 a una tasa de fluido de q_1, un circuito secundario, donde el agua es bombeada por la bomba B_2 a una tasa de fluido de q_2, y un intercambiador de calor del cual el agua de ambos circuitos se obtiene a la misma temperatura (ver Figura 1).

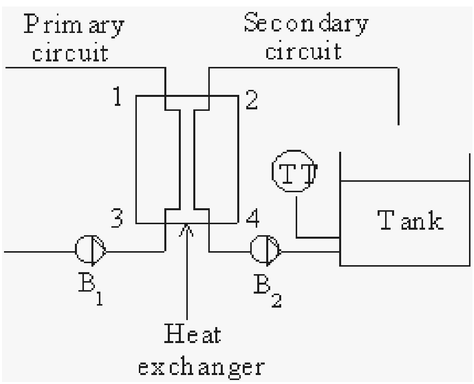

Figura 1. Sistema a simularse.

El modelo matemático para el balance energético es

$$\frac{dt_4}{dt} = \frac{1}{v}\left(\frac{1}{\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}} (t_3 - t_4) - \frac{k}{\delta c}(t_3 - t_a) \right)$$

donde

t_4 es la temperatura del agua en el punto 4 y en el tanque, medida por TT

t_3 es la temperatura del agua en el circuito primario en el punto 3

t_a es la temperatura del aire que envuelve al sistema

k es la constante de disipación

δ es la densidad del agua

c es la capacidad calórica del agua

La simulación desarrollada con un esquema de diferencias finitas

$$T_4(n+1) = T_4(n) + \frac{\Delta t}{V}\left(\frac{1}{\frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2}} (T_3 - T_4(n)) - \frac{k}{\delta c}(T_4(n) - T_a) \right)$$

para

k = 7000 W/K,

δ = 1000 kg/m^3,

c = 4180 J/K· kg,

t_a = 300 K,

t_3 = 340 K,

q_1 = 0.005 m^3/s,

q_2 = 0.025 m^3/s,

v = 1 m^3,

$t_4(0)$ = 301 K y

Δk = 1

nos da el resultado mostrado en la Figura 2.

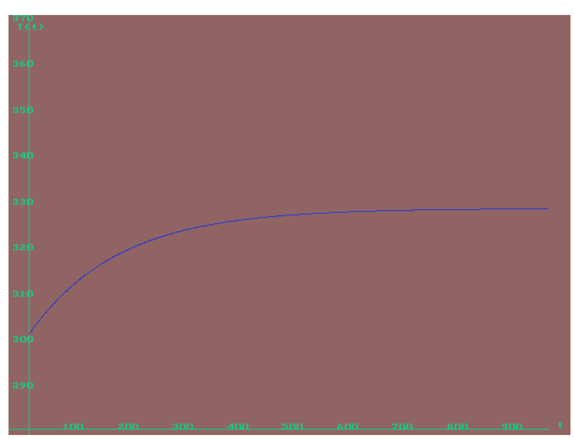

Figura 2. Simulación puntual del sistema

$$t_4(n+1) =$$

$$t_4(n) + \frac{\Delta t}{v}\left(\frac{1}{\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}}\left(t_3 - t_4(n)\right) - \frac{k}{\delta c}\left(t_4(n) - t_a\right)\right)$$

Consideremos ahora los intervalos siguientes de variación: Q_1 para la tasa de fluido q_1, Q_2 para la tasa de fluido q_2, T_3 para la temperatura t_3, T_4 para la temperatura t_4, T_a para la temperatura t_a, V para el volumen v (considerando k, δ y c como constantes) y discretizando a través de diferencias finitas, el sistema físico puede ser representado mediante el siguiente modelo intervalar de tiempo-discreto

Una simulación desarrollada para

k = 7000 W/K,

δ = 1000 kg/m^3,

c = 4180 J/K. kg,

T_a = [299,301] K,

T_3 = [339,341] K,

Q_1 = [0.005,0.006] m^3/s,

Q_2 = [0.024,0.026] m^3/s,

V = [0.9,1.1] m^3,

$T_4(0)$ = [301,303]

Nos da los resultados de la Figura 3.

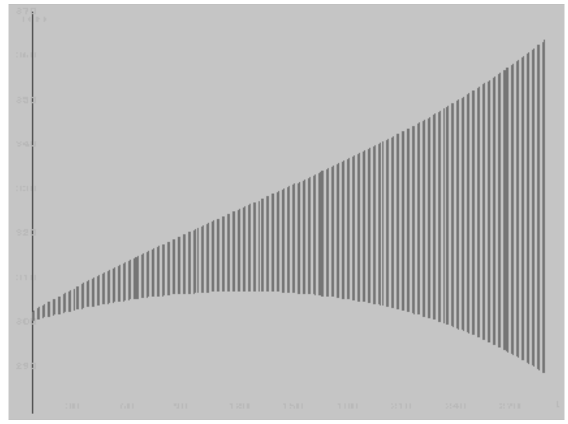

Figura 3. Simulación intervalar clásica del sistema

Pero para el siguiente modelo intervalar

los resultados obtenidos se muestran en la figura 4.

Esto significa, por ejemplo, en el instante n = 1000

U(ta,[299,301]') U(t3,[339,341]') U(q1,[0.005,0.006]') U(q2,[0.024,0.026]')U(v,[0.9,1.1]') U(t(0),[301,303]') E(t(1000),[325.6,330.7]')

(t(1000) = f(ta,t3,q1,q2,v,t(0))

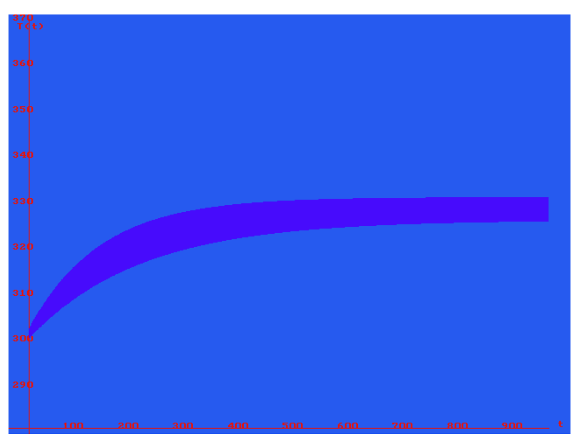

Figura 4. Simulación intervalar modal del sistema

Conclusiones

$$T_4(n+1) = T_4(n) + \frac{\Delta t}{V}\left(\frac{1}{{}^{1}\!/\!_{Q_1} + {}^{1}\!/\!_{Q_2}} \left(T_3 - duT_4(n)\right) - \frac{k}{\delta c}\left(T_4(n) - T_a\right) \right)$$

La solución a problemas como ecuaciones, evaluaciones o funciones intervalares y la posibilidad de obtener resultados con significados diferentes, dependiendo de la cuantificación de las variables, hacen que el Análisis Intervalar Modal sea una herramienta poderosa en todos los campos donde los intervalos tienen un procedimiento susceptible de ser adaptado, tales como, simulación y control de sistemas físicos, optimización, supervisión y detección de fallas, simulación cualitativa, etcétera.

Referencias

[1] Moore, R. E., (1995), *Methods and applications of Interval Analysis*, Siam, 2ª. Edición, (USA).

[2] SIGLA/X Group, (1996), Construcción de los intervalos modales, Report IMA96-07-RR, Depto. De Informática y Matemática Aplicada, Univesitat de Girona (España).