

Modelo numérico para el análisis y el diseño de redes de tubería para flujo bifásico

Numerical model for the analysis and design of piping networks for two-phase flow

Gustavo Valle-Tamayo¹, Leonardo Valbuena-Luna², Carlos Rojas-Beltrán³, Manuel Cabarcas-Simancas⁴

¹Petroleum Consulting Company S.A.S., Grupo de Modelamiento de Procesos de Hidrocarburos.
Email: gustavo.valle@pccsas.com

²Petroleum Consulting Company S.A.S. Email: Leonardo.valbuena@pccsas.com

³Petroleum Consulting Company S.A.S. Email: carlos.rojas@pccsas.com

⁴Grupo de Modelamiento de Procesos de Hidrocarburos, Universidad Industrial de Santander. Email: cabarcas@uis.edu.co

RECIBIDO: Octubre 18, 2017. ACEPTADO: Marzo 20, 2018. VERSIÓN FINAL: Abril 22, 2018.

RESUMEN

Un nuevo algoritmo para analizar flujo bifásico en redes de recolección es presentado. Este algoritmo se fundamenta en la resolución en marcha de las variables hidráulicas, siendo una modificación al propuesto inicialmente por Tian & Adewum, quienes consideraron la fase líquida como una unidad de sólo aceite, a diferencia del presente estudio, que, en adición, contempla agua. Para su implementación, no hay necesidad de generar arreglos matriciales complejos, ya que adopta el esquema de las reglas de Kirchhoff. Asimismo, se modificaron algunas correlaciones de flujo, para que se adaptaran al algoritmo propuesto. El algoritmo se plantea utilizando la correlación de Beggs & Brill, en un caso ilustrativo.

PALABRAS CLAVE: Flujo bifásico; redes de tubería; algoritmo solución.

ABSTRACT

A new algorithm for analyzing biphasic flow in collection networks is presented. This algorithm is based on the current resolution of the hydraulic variables, being a modification to the principle proposed by Tian & Adewum, who considered the liquid phase as a unit of water alone, a difference of the present study, which, in addition, includes oil. For its implementation, there is no need to generate complex matrix arrays, it adopts Kirchhoff's philosophy of rules. Also, some flow correlations have been modified to fit the proposed algorithm. The algorithm is tested with the Beggs & Brill correlation, in an illustrative case.

KEYWORDS: Biphasic flow; pipe networks; solution algorithm.

1. INTRODUCCIÓN

Extensivas investigaciones para flujo bifásico en tuberías han sido tratadas por más de 60 años. Valle et al [1] realizan un detallado estado del arte, respecto a los modelos matemáticos enfocados a la caracterización hidráulica del flujo multifásico. Sin embargo, en la literatura la aplicación de esos métodos ha sido limitada a esquemas constituidos por sólo una línea de flujo, exceptuando las herramientas comerciales que permiten la implementación en redes de tuberías. En la búsqueda bibliográfica efectuada para esta investigación (e.g. Scientdirect, Onepetro,

Google Academic), son escasos los métodos satisfactorios que se han reportado para analizar y diseñar redes de flujo bifásico, gas-líquido. No obstante, los autores Mucharam & Adewumi [2] y Tian & Adewumi [3], lograron modelar sistemas complejos de tuberías con flujo bifásico, pero su aplicabilidad se ve restringida, ya sea por el tipo de configuración del sistema o por el tipo de fluido tratado (i.e. gas y aceite).

Por su parte, Shamir & Howard [4] publicaron un método para el análisis de flujo monofásico en redes, haciendo uso del método iterativo de Newton-Raphson, para resolver el conjunto de ecuaciones resultante del

balance de masa. La aplicación de esta técnica a sistemas de flujo monofásico es reconocida en la literatura, no obstante, no ha sido replanteada para sistemas bifásicos, probablemente, debido a la complejidad implicada en la obtención de las derivadas necesarias, para su correcta puesta en marcha.

El presente trabajo tiene como objetivo plantear un modelo numérico para flujo bifásico, basado en el propuesto por Tian & Adewumi [3], el cual ha sido modificado con el fin de superar las dificultades adscritas al mismo. En primera medida esto se efectuó mediante la consideración de una mezcla de agua y aceite como fase líquida complementaria a la fase gaseosa, y a través de la implementación de diversos tipos de correlaciones de flujo multifásico (e.g. [5, 6, 7]). Finalmente, es necesario resaltar que este modelo no requiere un arreglo matricial, ya que está basado en un algoritmo de solución simultánea que facilita su aplicación. Asimismo, se presentan los diversos modelos numéricos para el modelado de redes de flujo monofásico, descritos en la literatura, que permitirán sustentar el fundamento matemático del algoritmo propuesto.

2. MODELOS DE REDES DE TUBERÍAS

El objetivo principal del modelado enfocado a la construcción de redes de tuberías es simular el comportamiento hidráulico de los fluidos. Un esquema típico usado en muchos problemas de mecánica de fluidos es el modelo en estado estacionario, el cual consiste en establecer condiciones estables en la red, en un instante/punto del tiempo [8]. Cuando se conocen puntos de presión y flujo del modelo, se pueden implementar ecuaciones de continuidad (balance de masa) y balance energético para estimar el caudal y la presión en cualquier punto del sistema. Varios métodos numéricos de resolución de problemas se han desarrollado para resolver el modelo en estado estacionario.

A continuación, se presentan algunos de los métodos de solución numérica para sistemas conformados por esquemas monofásicos, los cuales serán insumo para el modelo propuesto.

3. MODELOS DE SOLUCIÓN NUMÉRICA

La complejidad de modelar redes de recolección se fundamenta en el requerimiento de caudal y presión en todas las tuberías y nodos del sistema. La conceptualización del problema demanda de características físicas de las tuberías, y la especificación de las variables presión y caudal dentro del sistema. Es un desafío, al intentar representar el comportamiento hidráulico del fluido cuando diferentes corrientes fluyen a un mismo nodo, para lo cual, en esta investigación, se suscitan estudios enmarcados en la literatura, cuyo objeto sea la resolución del flujo de fluidos en sistemas tipo bucles, siendo estos, un punto

de partida, para comprender el análisis matemático y numérico, relacionado con la problemática evidenciada.

Con el fin de resolver el problema de la red de fluidos en bucles, es muy común el empleo de las dos leyes de Kirchhoff, desarrolladas originalmente para resolver circuitos eléctricos, las cuales son equivalentes, a las ecuaciones de continuidad, y conservación de la energía, respectivamente [9], y, establecen que: i) La suma algebraica de las corrientes en un nodo pertenecientes a una red de conductores es cero, ii) La suma dirigida de las diferencias de potencial eléctrico (i.e. voltios) alrededor de cualquier circuito cerrado es cero.

Aplicando las anteriores leyes, al problema de red de tuberías en bucle, la corriente eléctrica en la primera ley es equivalente el flujo de masa, y el potencial eléctrico en la segunda ley, corresponde a la caída de presión. Por lo tanto, una de las leyes se satisface en el modelado del problema y la otra, resolviendo un sistema no lineal de ecuaciones [10]. Basándose en la linealización de este sistema de ecuaciones, Cross [10] propuso un método de resolución, que es esencialmente un método de relajación adecuado para solventar el problema manualmente [11], obteniendo los métodos de modelado, denominados: Método de Flujo Equilibrado y el Método de Presión Balanceada, que satisfacen la primera y segunda ley de Kirchhoff, respectivamente [10].

En busca de mejorar la resolución del problema, se han desarrollado métodos basados en: i) La partición de la matriz representativa del problema [12, 13], ii) La linealización [14] y, iii) Newton-Raphson para resolver el problema de la red de fluidos en bucles para el método de Hardy-Cross [15, 16]. Para esta última, las características de las ecuaciones y las suposiciones iniciales de las variables dependientes definen la propiedad de convergencia del problema.

Atendiendo a lo anterior, se procederá a describir los métodos de resolución mencionados.

3.1. Hardy-Cross

La idea básica del método de Hardy-Cross es que la conservación de la masa en cada nodo puede establecerse inicialmente [10]. Esto significa que primero se debe asumir una estimación inicial de los flujos en cada elemento de la tubería antes de iniciar el cálculo de la caída de presión.

Para cualquier tubería en el que Q_0 es asumido como el flujo inicial, la Ecuación 1 (i.e. ecuación característica de la tubería), puede ser estimada usando una expansión de la serie Taylor como sigue en la Ecuación 2:

$$h_f = KQ^n \quad (1)$$

$$h_f = K(Q_0^n + Q_0^{n-1}\Delta Q + n(n-1)Q_0^{n-2}\Delta Q^2 + \dots) \quad (2)$$

Y,

$$\Delta Q = Q - Q_0 \quad (3)$$

Donde h_f representa la caída de presión, y K denota una resistencia constante de la tubería. La caída de presión es usualmente relacionada al flujo en la tubería con la potencia característica, n . Los métodos de Darcy-Weisbach y Hazen-Williams son comúnmente usados para definir los valores de n y K [17]. Asimismo, Q es el “flujo correcto” y ΔQ es el factor de corrección del flujo.

Si ΔQ es relativamente insignificante en comparación con Q_0 , la Ecuación 2, podría ser descrita como lo enuncia la Ecuación 4.

$$h_f = K(Q_0^n + Q_0^{n-1}\Delta Q) \quad (4)$$

Para un grupo de sistemas tipo bucles, se tiene (Ver Ecuación 5).

$$\begin{aligned} \sum h_f &= \sum KQ^n = \sum KQ|Q|^{n-1} \\ &= \sum KQ_0|Q_0|^{n-1} \\ &+ \Delta Q \sum knk|Q_0|^{n-1} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

En la cual, ΔQ es asumido igual para todas las secciones de tubería en un bucle. Las anotaciones de valor absoluto se han añadido para tener en cuenta la dirección de la sumatoria alrededor de un bucle dado. La Ecuación 6 permite obtener ΔQ .

$$\Delta Q = -\frac{\sum KQ_0|Q_0|^{n-1}}{\sum nk|Q_0|^{n-1}} \quad (6)$$

Posteriormente, ΔQ se aplica para actualizar el caudal en la Ecuación 7 para cada sección de tubería en un bucle.

$$Q_{0,nuevo} \sim Q = -Q_0 + \Delta Q \quad (7)$$

Para sistemas complejos de redes de tuberías, donde existen fuentes múltiples, y diferencias en la elevación, la Ecuación 6, debe ser acondicionada para considerar dichos efectos (Ver Ecuación 8).

$$\Delta Q = -\frac{\sum KQ_0|Q_0|^{n-1} + a}{\sum nk|Q_0|^{n-1} + b} \quad (8)$$

Y,

$$a = \sum_{pérdidas} \left(\frac{8C_e}{g_c\pi^2 D^4} \right) Q_0|Q_0| \quad (9)$$

$$b = \sum_{pérdidas} \left(\frac{16C_e}{g_c\pi^2 D^4} \right) |Q_0| \quad (10)$$

Donde C_e es el coeficiente de pérdida menor, causado por un cambio en el área de sección transversal del flujo entre la tubería y la fuente. Para los sistemas de red de tuberías grandes, los efectos de entrada y salida pueden ser insignificantes cuando sus pérdidas de presión no son representativas en comparación con las caídas de presión de la tubería.

3.2. Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson es un método numérico que permite resolver sistemas de ecuaciones matemáticas de manera simultánea. Su principal utilidad, según Pipes [18], radica en la facilidad que ofrece para resolver ecuaciones diferenciales cuando se conocen valores aproximados de los parámetros desconocidos deseados.

El objetivo de este método multivariable es linealizar los sistemas de ecuaciones mediante el uso de series de Taylor, de tal manera que el modelo resultante pueda ser resuelto a través de un determinado método de eliminación como el Gaussiano con sustitución hacia atrás.

Suponga que los caudales de un sistema de tuberías están representados mediante la formulación observada en la Ecuación 11, el cual no es lineal y sus variables pueden ser aproximadas inicialmente como se muestra en la Ecuación 12.

$$\begin{aligned} f_1(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) &= 0 \\ f_2(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$Q_1 = Q_1^k, Q_2 = Q_2^k, \dots, Q_n = Q_n^k. \quad (12)$$

Entonces, al utilizar las series de Taylor se puede obtener una aproximación inicial de los valores de la forma indicada en la Ecuación 13.

$$\begin{aligned} f_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) &= \\ f_i(Q_1^k, Q_2^k, \dots, Q_n^k) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial Q_j} \right) \Big|_{Q_j^k} (Q_j - Q_j^k) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Este resultado puede ser representado matricialmente, como se muestra en la Ecuación 14,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^k}{\partial Q_1^k} & \frac{\partial f_1^k}{\partial Q_2^k} & \dots & \frac{\partial f_1^k}{\partial Q_n^k} \\ \frac{\partial f_2^k}{\partial Q_1^k} & \frac{\partial f_2^k}{\partial Q_2^k} & \dots & \frac{\partial f_2^k}{\partial Q_n^k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n^k}{\partial Q_1^k} & \frac{\partial f_n^k}{\partial Q_2^k} & \dots & \frac{\partial f_n^k}{\partial Q_n^k} \end{bmatrix}_{m \times n} \begin{bmatrix} Q_1 - Q_1^k \\ Q_2 - Q_2^k \\ \vdots \\ Q_n - Q_n^k \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad (14)$$

$$= - \begin{bmatrix} f_1(Q_1^k, Q_2^k, \dots, Q_n^k) \\ f_2(Q_1^k, Q_2^k, \dots, Q_n^k) \\ \vdots \\ f_m(Q_1^k, Q_2^k, \dots, Q_n^k) \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

De tal manera que al reordenar se tiene lo expresado por la Ecuación 15,

$$\begin{bmatrix} Q_1 - Q_1^k \\ Q_2 - Q_2^k \\ \vdots \\ Q_n - Q_n^k \end{bmatrix}_{n \times 1} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^k}{\partial Q_1^k} & \frac{\partial f_1^k}{\partial Q_2^k} & \dots & \frac{\partial f_1^k}{\partial Q_n^k} \\ \frac{\partial f_2^k}{\partial Q_1^k} & \frac{\partial f_2^k}{\partial Q_2^k} & \dots & \frac{\partial f_2^k}{\partial Q_n^k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n^k}{\partial Q_1^k} & \frac{\partial f_n^k}{\partial Q_2^k} & \dots & \frac{\partial f_n^k}{\partial Q_n^k} \end{bmatrix}_{m \times n} \begin{bmatrix} f_1(Q_1^k, Q_2^k, \dots, Q_n^k) \\ f_2(Q_1^k, Q_2^k, \dots, Q_n^k) \\ \vdots \\ f_m(Q_1^k, Q_2^k, \dots, Q_n^k) \end{bmatrix}_{m \times 1} \quad (15)$$

En la Ecuación 16 se pueden observar los valores corregidos para la iteración posterior,

$$\begin{bmatrix} Q_1^{k+1} \\ Q_2^{k+1} \\ \vdots \\ Q_n^{k+1} \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} Q_1^k \\ Q_2^k \\ \vdots \\ Q_n^k \end{bmatrix}_{n \times 1} + \begin{bmatrix} Q_1 - Q_1^k \\ Q_2 - Q_2^k \\ \vdots \\ Q_n - Q_n^k \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad (16)$$

De lo anterior se puede concluir que, a medida que los valores de la matriz $Q_1 - Q_1^k$ tienden a cero, el método logrará alcanzar una convergencia y el proceso iterativo habrá llegado a su fin.

3.3. Leyes de Kirchhoff

Como se mencionó anteriormente, estas leyes fueron propuestas inicialmente para el análisis de circuitos eléctricos, sin embargo, la experiencia ha demostrado que pueden ser aplicadas para el análisis de sistemas de tuberías.

La primera ley de Kirchhoff expresa que la suma algebraica de los flujos en cada nodo debe ser cero, es

decir, los flujos de entrada y salida del nodo deben ser iguales, como se muestra en la Ecuación 17 & 18.

$$\sum Q = 0 \quad (17)$$

$$\sum Q_{entrada} - \sum Q_{salida} = 0 \quad (18)$$

Por otra parte, la segunda ley (expresada en la Ecuación 19), enuncia que la suma algebraica de los diferenciales de presión en cada bucle cerrado debe ser cero.

$$\sum \Delta P = 0 \quad (19)$$

No obstante, es de notar que el diferencial de presión en cada nodo ($P_j - P_k$) está relacionado al flujo a través de este, y dicha relación está determinada por la ecuación de balance de energía, como se observa en la Ecuación 20:

$$P_j - P_k = \left((Z_k - Z_j) + \left(\frac{8}{g_c \pi^2 D^4} \right) Q^2 + \sum_{tuberías} K Q^n + \sum_{perdidas} \left(\frac{8(C_e + C_v)}{g_c \pi^2 D^4} \right) Q^2 - \sum_{bombas} (A_o + A_1 Q + A_2 Q^2) \right) \frac{\gamma g_c}{g} \quad (20)$$

Donde Z_j y Z_k son las elevaciones de los puntos j y k , γ es la gravedad específica del fluido y g es la constante gravitacional.

4. FORMULACIÓN DEL MODELO PROPUESTO

El modelo expuesto, consta de dos componentes principales complementarios entre sí: i) el modelo de flujo multifásico que indica el comportamiento del fluido en movimiento basado en la ecuación de balance de energía, y ii) el modelo de red de tuberías que predice los caudales y las presiones en cada punto del sistema, derivado de las leyes de Kirchhoff y la ecuación de balance de materia.

Con el fin de plantear el modelo se asumen las siguientes suposiciones:

1. La temperatura promedio del fluido es constante a través del sistema.
2. Se presentan condiciones de estado estable.
3. Esquema de fluido "Black Oil".
4. Efectos de codos, uniones, etc., fueron ignorados.

4.1. Modelo de Flujo Multifásico

Para analizar el flujo multifásico, cualquier tipo de correlación puede ser usada en el modelo numérico propuesto, sin embargo, para lograr acoplarla es necesario realizar una reorganización previa de las

ecuaciones formuladas, con el fin de expresar el caudal de fluidos en función de las presiones de entrada y salida.

El procedimiento a seguir es similar para cualquier correlación de flujo multifásico ([19, 20, 21, 22, 23, 5, 24, 6, 7, 25]), no obstante, por cuestiones de extensión solo se mostrará el método de Beggs & Brill [7], correspondiente a las Ecuaciones 21-36.

Partiendo de la Ecuación 21 usada para calcular el gradiente de presión de líquido:

$$\frac{\Delta P}{\Delta Z} = \frac{\left(\frac{g}{g_c} \sin \theta \rho_m + \frac{f_{tp} G_m v_m}{2g_c d}\right)}{1 - \frac{[\rho_l H_l + \rho_g (1 - H_l)] v_m v_{sg}}{g_c P}} \quad (21)$$

Se definen los caudales de líquido y gas en términos de ciertas constantes arbitrarias, como se muestran en las Ecuaciones 22-25:

$$q_g = \left[3,27 * 10^{-7} Z(R - R_s) \frac{\bar{T}}{\bar{P}}\right] q = C_1 q \quad (22)$$

$$q_o = [6,49 * 10^{-5} B_o] q = C_2 q \quad (23)$$

$$q_w = [6,49 * 10^{-5} B_w WOR] q = C_3 q \quad (24)$$

$$q_l = q_o + q_w = (C_2 + C_3) q = C_4 q \quad (25)$$

Adicionalmente, la densidad y el flujo másico de la mezcla, así como las velocidades reales y superficiales, también deben expresarse usando estas constantes, a partir de las relaciones evidenciadas en las Ecuaciones 26-29:

$$\rho_m = \rho_l H_l + \rho_g (1 - H_l) \quad (26)$$

$$G_m = (\rho_l C_4 + \rho_g C_1) q \quad (27)$$

$$v_m = \frac{C_1 + C_4}{A_p} * q \quad (28)$$

$$v_{sg} = \frac{C_1 q}{A_p} * q \quad (29)$$

Al reemplazar las variables la Ecuación 21 se convierte en:

$$\frac{\Delta P}{\Delta Z} = \frac{\left(\frac{g}{g_c} \sin \theta \rho_m + \frac{f_{tp} (\rho_o C_4 + \rho_g C_1) q * \frac{C_1 + C_4}{A_p} q}{2g_c D}\right)}{1 - \frac{\rho_m * \frac{(C_1 + C_4) q}{A_p} * \frac{C_1 q}{A_p}}{g_c P}} \quad (30)$$

Posteriormente se reducen términos semejantes:

$$\frac{\Delta P}{\Delta Z} = \frac{\left(\frac{2Dg \sin \theta \rho_m + f_{tp} (\rho_o C_4 + \rho_g C_1) (C_1 + C_4) q^2}{A_p}\right)}{\frac{g_c P - \frac{\rho_m (C_1 + C_4) C_1 q^2}{A_p^2}}{P}} \quad (31)$$

Operando las fracciones se obtiene:

$$\frac{\Delta P}{\Delta Z} = \frac{2Dg \sin \theta \rho_m P A_p^2 + f_{tp} (\rho_o C_4 + \rho_g C_1) (C_1 + C_4) q^2 P A}{2Dg_c P A^2 - 2D\rho_m (C_1 + C_4) C_1 q^2} \quad (32)$$

Separando términos a lado y lado:

$$\begin{aligned} \Delta P (2Dg_c P A^2 - 2D\rho_m (C_1 + C_4) C_1 q^2) \\ = \Delta Z (2Dg \sin \theta \rho_m P A_p^2 \\ + f_{tp} (\rho_o C_4 + \rho_g C_1) (C_1 + C_4) q^2 P A) \end{aligned} \quad (33)$$

Se agrupan términos semejantes y se factoriza q²:

$$\begin{aligned} q^2 (-\Delta Z f_{tp} (\rho_o C_4 + \rho_g C_1) (C_1 + C_4) P A \\ - 2D\rho_m \Delta P (C_1 + C_4) C_1) \\ = (2\Delta Z Dg \sin \theta \rho_m P A_p^2 \\ - 2\Delta P Dg_c P A^2) \end{aligned} \quad (34)$$

Al despejar:

$$q^2 = \frac{2\Delta Z Dg \sin \theta \rho_m P A_p^2 - 2\Delta P Dg_c P A^2}{-\Delta Z f_{tp} (\rho_o C_4 + \rho_g C_1) (C_1 + C_4) P A - 2D\rho_m \Delta P (C_1 + C_4) C_1} \quad (35)$$

Reorganizando y reduciendo términos:

$$q^2 = \frac{(P_1 - P_2 - (L \sin \theta \rho_m)) - g_c A^2}{(C_1 + C_4) \left[\frac{L f_{tp} (\rho_o C_4 + \rho_g C_1)}{2D} + \frac{C_1 \rho_m (P_1 - P_2)}{P} \right]}$$

De este punto en adelante la variable q² será denotada como S.

A continuación, se evidencia una metodología para calcular el caudal a través de una tubería, considerando flujo bifásico. En esta, los primeros cuatro pasos son comunes para todas las correlaciones de flujo multifásico, sin embargo, a partir del quinto, el enfoque cambia de acuerdo con cada autor. En el presente estudio, se describirán las correlaciones de: i) Beggs & Brill [7] (ver Ecuaciones 37-59), ii) Eaton et al. [5] (ver Ecuaciones 60-85), iii) Dukler [6] (ver Ecuaciones 86-114).

1. Calcular la presión promedio a la entrada y la salida de la tubería (ver Ecuación 37):

$$\bar{P} = \frac{P_1 + P_2}{2} \quad (37)$$

2. Calcular todas las propiedades del fluido a la presión promedio: Z, Rs, Bo, Bg, densidades y viscosidades (se debe asumir una temperatura promedio en la tubería).
3. Calcular q_g , q_o , q_w y q_l de acuerdo con las Ecuaciones 22-25.
4. Obtener el hold-up de líquido no-slip, λ (constante), mediante la Ecuación 38.

$$\lambda = \frac{q_l}{q_g + q_l} = \frac{C_4}{C_1 + C_4} \quad (38)$$

4.1.1. Beggs & Brill [7]

5. Calcular la viscosidad del líquido:

$$\mu_l = \mu_o \left(\frac{1}{1 + WOR} \right) + \mu_w \left(\frac{WOR}{1 + WOR} \right) \quad (39)$$

6. Calcular los siguientes parámetros:

$$\mu_m = \lambda * \mu_l + (1 - \lambda) * \mu_g \quad (40)$$

$$L_1 = \exp(-4.62 - 3.757 * X - 0.481 * X^2 - 0.0207 * X^3) \quad (41)$$

$$L_2 = \exp(1.061 - 4.602 * X - 1.609 * X^2 - 0.179 * X^3 + 0.000635 * X^5) \quad (42)$$

Donde: $X = \ln(\lambda)$

7. Calcular la densidad del líquido:

$$\rho_l = \rho_o \left(\frac{1}{1 + WOR} \right) + \rho_w \left(\frac{WOR}{1 + WOR} \right) \quad (43)$$

8. En la primera iteración asumir un valor de factor total de fricción ($f_{sp}=0,006$) y calcular la densidad de la mezcla:

$$\rho_{sp}^{(0)} = \lambda * \rho_l + (1 - \lambda) * \rho_g \quad (44)$$

9. Calcular el flujo total:

$$q = \begin{cases} \sqrt{S} & \text{si } S \geq 0 \\ \sqrt{-S} & \text{si } S < 0 \end{cases} \quad (45)$$

Donde,

$$S = \frac{(144 * (P_1 - P_2) - \rho_{sp} * L * \sin(\theta)) * 32.174 * A^2}{(C_1 + C_4 * \left[\frac{L * f_{sp}}{2 * D} * (C_1 * \rho_g + C_4 * \rho_l) + \frac{C_1 * \rho_{sp}}{P} * (P_1 - P_2) \right])} \quad (46)$$

10. Calcular N_{FR} , N_{Re} , N_{LV} :

$$N_{FR} = \frac{1}{32.174 * D} * \left[\frac{(C_1 + C_4) * q}{A} \right]^2 \quad (47)$$

$$N_{Re} = \frac{((C_1 * \rho_g + C_4 * \rho_l) * q * D)}{A * \mu_m} \quad (48)$$

$$N_{LV} = 1.938 * C_4 * \frac{q}{A} * \left(\frac{\rho_l}{\sigma_l} \right)^{0.25} \quad (49)$$

11. Determinar el patrón de flujo:

Segregado: $N_{FR} < L_1$

Intermitente: $L_1 < N_{FR} < L_2$

Distribuido: $N_{FR} > L_1 \ \&\& \ N_{FR} > L_2$

12. Calcular el hold-up para tubería horizontal mostrado en la Ecuación 50, usando las constantes de la Tabla 1:

$$H_L(0) = \frac{a * \lambda^b}{N_{FR}^c} \quad (50)$$

Tabla 1. Constantes a, b y c para el cálculo de hold-up. Modificado de Beggs & Brill [7].

Régimen de flujo	a	b	c
Segregado	0,98	0,4846	0,0868
Intermitente	0,845	0,5351	0,0173
Distribuido	1,065	0,5824	0,0609

13. Calcular el factor de corrección de hold-up ψ por inclinación, utilizando las constantes de la Tabla 2:

$$\Psi = 1 + C \left[\sin(1.8 * \theta) - \frac{1}{3} \sin^3(1.8 * \theta) \right] \quad (51)$$

Donde,

$$C = (1 - \lambda) * \ln(d * \lambda^e * N_{LV}^f * N_{FR}^g) \quad (52)$$

Tabla 2. Constantes d, e, f y g para el cálculo de hold-up. Modificado de Beggs & Brill [7].

Régimen de Flujo	d	e	f	g
Segregado hacia arriba	0.011	-3.768	3.539	-1.614
Intermitente hacia arriba	2.96	0.305	0.4473	0.0978
Distribuido hacia arriba	No se corrige C=0, $\Psi = 1, H_L \neq f(\theta)$			
Todos los patrones hacia abajo	4.70	0.3692	0.1244	0.5056

14. Calcular el hold-up de líquido y la densidad de la mezcla:

$$H_L(\theta) = H_L(0) * \Psi \quad (53)$$

$$\rho_{sp} = H_L(\theta) * \rho_o + (1 - H_L(\theta)) * \rho_g \quad (54)$$

15. Calcular el factor de fricción sin deslizamiento:

$$f_{ns} = \frac{1}{\left[2 * \log \left(\frac{N_{Re}}{4.5223 * \log N_{Re} - 3.8215} \right) \right]^2} \quad (55)$$

16. Calcular el factor total de fricción:

$$f_{sp} = f_{ns} * e^S \quad (56)$$

Donde: $S =$ (57)

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln(2.2 * Y - 1.2) \text{ si } 1.0 < Y < 1.2 \\ \ln(Y) \\ -0.0523 + 3.18 * \ln(Y) - 0.8725 * \ln(Y)^2 + 0.01856 * (\ln(Y))^4 \end{array} \right.$$

$$Y = \frac{\lambda}{H_L^2(\theta)} \quad (58)$$

17. Calcular la tasa de flujo a una nueva iteración utilizando las ecuaciones del paso 6.

18. Repetir hasta alcanzar la convergencia:

$$|q^{(n+1)} - q^{(n)}| < \epsilon \quad (59)$$

4.1.2. Eaton et al. [5]

1. Calcular ρ_L (ver Ecuación 43) y ρ_g :

$$\rho_g = \frac{0.074 * SG_g * (\bar{P} + 14.7) * 520}{14.7 * (\bar{T} + 460) * Z} \quad (60)$$

2. Asumir un factor total de fricción $f_{sp}=0,006$ y calcular el flujo total:

$$q = \begin{cases} \sqrt{S} & \text{si } S \geq 0 \\ \sqrt{-S} & \text{si } S < 0 \end{cases} \quad (61)$$

Donde,

$$S = \frac{48 * d * (P_1 - P_2) * 32,174 * A_p^2 * \left(1 + \frac{D}{6 * L * f_{sp}}\right)}{L * (\rho_L C_4 + \rho_g C_1) * (C_4 + C_1) * f_{sp}} \quad (62)$$

3. Calcular la viscosidad del líquido (ver Ecuación 39).

4. Calcular V_{SL} y V_{SG} :

$$V_{sL} = \frac{q_L}{A_p} \quad (63)$$

$$V_{sG} = \frac{q_g}{A_p} \quad (64)$$

5. Calcular H_Ψ para P_1 y P_2 :

$$H_\Psi = \frac{N_{LV}^{0.575}}{N_{gv} * N_d^{0.0277}} * \left(\frac{P}{14.65} \right)^{0.05} * \left(\frac{N_L}{0.00226} \right)^{0.1} \quad (65)$$

Donde:

$$N_{Lv} = 1.938 * V_{sL} * \left(\frac{\rho_L}{\sigma} \right)^{0.25} \quad (66)$$

$$N_{gv} = 1.938 * V_{sG} * \left(\frac{\rho_L}{\sigma} \right)^{0.25} \quad (67)$$

$$N_d = \frac{(120.872 * d)}{12} * \left(\frac{\rho_L}{\sigma} \right)^{0.5} \quad (68)$$

$$(57) \quad N_L = 0.15726 * \mu_L * \left(\frac{1}{\rho_L * \sigma^3} \right)^{0.25} \quad (69)$$

6. Calcular H_Ψ, V_L y V_g

Si $0.001 < H_\Psi < 1.40$ entonces

$$H_L = -1.708 * H_\Psi^4 + 4.9826 * H_\Psi^3 - 5.4823 * H_\Psi^2 + 2.7618 * H_\Psi + 0.0106 \quad (70)$$

Si $1.40 \leq H_{\psi} < 10$ entonces

$$H_L = -0.0034 * H_{\psi}^2 + 0.0541 * H_{\psi} + 0.7523 \quad (71)$$

$$V_L = \frac{V_{SL}}{H_L} \quad (72)$$

$$V_g = \frac{V_{sg}}{H_L} \quad (73)$$

7. Calcular y:

$$y = \frac{(GR)^{0.5} * \left(\frac{d_B}{d}\right)^{1.25} * G_T * d}{\mu_g * 12 * (6.72 * 10^{-4})} \quad (74)$$

Donde:

$$GR = \frac{W_g}{W_m} \quad (75)$$

$$LR = \frac{W_L}{W_m} \quad (76)$$

$$G_T = \frac{W_m}{A_p / 144} \quad (77)$$

$$W_L = \rho_L * q_L \quad (78)$$

$$W_g = \rho_g * q_g \quad (79)$$

$$W_m = W_L + W_g \quad (80)$$

Luego:

Si $1000 \leq y < 100000$ entonces

$$I = 7 * 10^6 * y^{-1.664} \quad (81)$$

Si $100000 \leq y < 600000$ entonces

$$I = 5 * 10^{-24} * y^4 - 8 * 10^{-18} * y^3 + 4 * 10^{-12} * y^2 - 1 * 10^{-6} * y + 0.0971 \quad (82)$$

Si $600000 \leq y < 1728000$ entonces

$$I = 7.0525 * y^{0.487} \quad (83)$$

Y finalmente:

$$f_{sp} = \frac{I}{LR^{0.1}} \quad (84)$$

$$LR = \frac{W_L}{W_m} \quad (85)$$

8. Calcular la tasa de flujo q a una nueva iteración utilizando las ecuaciones del paso 2.
9. Repetir hasta alcanzar la convergencia (ver Ecuación 59).

4.1.3. Dukler [6]

1. Calcular $\rho_L y \rho_g$ (ver Ecuaciones 43 & 60, respectivamente)
2. Calcular la viscosidad del líquido (ver Ecuación 39).
3. Calcular v_m :

$$V_m = \frac{q_g + q_l}{A_p} \quad (86)$$

4. Calcular la viscosidad de la mezcla sin deslizamiento:

$$\mu_m = \lambda * \mu_l + (1 - \lambda) * \mu_g \quad (87)$$

5. Calcular ρ_m :

$$\rho_m = \rho_l \left(\frac{\lambda^2}{H_L}\right) + \rho_g \left(\frac{(1-\lambda)^2}{1-H_L}\right) \quad (88)$$

6. Calcular NRe:

$$N_{Re} = \frac{D * V_m * \rho_m}{12 * (6.72 * 10^{-4}) * \mu_m} \quad (89)$$

7. Calcular el hold-up de líquido:

- Para $0,1 \leq \lambda \leq 1,0$

$$H_L(0) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 \quad (90)$$

Donde,

$$x = 10 \lambda - 2.107 \quad (91)$$

$$b_0 = 0.469609 - 0.138040 Z - 0.027481 Z^2 \quad (92)$$

$$\begin{aligned}
 &+ 0.003537 Z^3 - 0.024212 Z^4 \\
 &+ 0.01097 Z^5 \\
 &+ 0.027187 Z^6 - 0.019885 Z^7 \\
 &- 0.004693 Z^8 \\
 &+ 0.004295 Z^9 \\
 \\
 & \quad b_1 = \\
 & 0.106343 \\
 & + 0.001065 Z - 0.00349 Z^2 \\
 & - 0.002214 Z^3 + 0.002365 Z^4 \\
 & + 0.000567 Z^5 - 0.000726 Z^6 \\
 & + 0.000127 Z^7
 \end{aligned} \tag{93}$$

$$\begin{aligned}
 & \quad b_2 = \\
 & - 0.015214 + 0.004208 Z + \\
 & 0.006524 Z^2 \\
 & + 0.000246 Z^3 - 0.00127 Z^4 - \\
 & 0.00028 Z^5 + 0.000105 Z^6
 \end{aligned} \tag{94}$$

$$\begin{aligned}
 & \quad b_3 = \\
 & 0.001994 + 0.000064 Z - \\
 & 0.000572 Z^2 - 0.00002 Z^3
 \end{aligned} \tag{95}$$

$$\begin{aligned}
 & \quad b_4 = \\
 & - 0.000144 + 0.000016 Z + \\
 & 0.000083 Z^2 - 0.000133 Z^3 \\
 & + 0.000043 Z^4 - 0.000042 Z^5 \\
 & - 0.000028 Z^6 + 0.000106 Z^7 \\
 & + 0.000003 Z^8 - 0.000022 Z^9
 \end{aligned} \tag{96}$$

Donde,

$$Z = \log(NRe) - 4.0176 \tag{97}$$

- Para $0,01 \leq \lambda \leq 0,1$

$$yL(o) = b_0 + b_1\lambda \tag{98}$$

- Para $0.006 \leq \lambda \leq 0.01$

$$\begin{aligned}
 b_0 = & 0.7464444 + \\
 & 0.402593 x - 0.459559 x^2 + \\
 & 0.112758 x^3 - 0.008571 x^4
 \end{aligned} \tag{99}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 = & 0.037791 + \\
 & 0.091513 x + \\
 & 0.205683 x^2 + \\
 & 0.390756 x^3 + \\
 & 0.47075 x^4 - \\
 & 0.230195 x^5 + 0.023875 x^6
 \end{aligned} \tag{100}$$

- Para $0.003 \leq \lambda \leq 0.006$

$$\begin{aligned}
 b_0 \\
 = & 0.800301 \\
 & + 0.386447 x - 0.524572 x^2 \\
 & + 0.140726 x^3 - 0.011543 x^4
 \end{aligned} \tag{101}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 = & 0.110852 + \\
 & 0.254436 x + \\
 & 0.54049 x^2 + \\
 & 0.966715 x^3 + \\
 & 1.080144 x^4 - \\
 & 0.594425 x^5 + \\
 & 0.067371 x^6
 \end{aligned} \tag{102}$$

- Para $0.0017 \leq \lambda \leq 0.003$

$$\begin{aligned}
 b_0 \\
 = & 0.844298 \\
 & + 0.363485 x - 0.575184 x^2 \\
 & + 0.165097 x^3 - 0.014327 x^4
 \end{aligned} \tag{103}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 = & 5.37305 + \\
 & 11.209496 x + \\
 & 13.672301 x^2 - 6.758896 x^3 + \\
 & 0.71421 x^4
 \end{aligned} \tag{104}$$

- Para $0.001 \leq \lambda \leq 0.0017$

$$\begin{aligned}
 b_0 = & 0.6911545 + \\
 & 0.260211 x - 0.494243 x^2 + \\
 & 0.155236 x^3 - 0.014659 x^4
 \end{aligned} \tag{105}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 \\
 = & 107.430534 \\
 & + 62.558994 x - 36.118309 x^2 \\
 & + 1.293692 x^3 + 0.581947 x^4
 \end{aligned} \tag{106}$$

La variable independiente de los coeficientes b_0 y b_1 para el intervalo $0.001 \leq \lambda \leq 0.01$ es equivalente al logaritmo del N_{Re} y esto es:

$$x = \log(N_{Re}) \tag{107}$$

8. Reemplazar el valor de hold-up en el punto 9 e iterar hasta alcanzar convergencia. Es decir:

$$|H_L^{(n+1)} - H_L^{(n)}| < \epsilon \tag{108}$$

9. Asumir un factor total de fricción $f_{sp}=0,006$ y calcular el flujo total:

$$q = \begin{cases} \sqrt{S} & \text{si } S \geq 0 \\ \sqrt{-S} & \text{si } S < 0 \end{cases} \tag{109}$$

Donde,

$$S = \frac{12 * D * (P_1 - P_2) * 32,174}{2 * L * \rho_m * \left(\frac{C_4 + C_1}{A_p}\right) * f_{sp}} \quad (110)$$

10. Obtener f_n y f_{tp}/f_n :

$$fn = 0.0056 + 0.5 N_{Re}^{-0.32} \quad (111)$$

$$\frac{f_{sp}}{f_n} = 1.076587 - 2.182034x - 0.937941x^2 - 0.101785x^3 \quad (112)$$

Donde,

$$x = \log(\lambda) \quad (113)$$

11. Calcular f_{tp} :

$$f_{sp} = \left(\frac{f_{sp}}{f_n}\right) f_n \quad (114)$$

12. Calcular la tasa de flujo a una nueva iteración utilizando las ecuaciones del paso 13.

13. Repetir hasta alcanzar la convergencia (ver Ecuación 59).

4.2. Modelo de Red de Tuberías

La construcción del modelo de red de tuberías depende en gran medida del establecimiento de una relación entre las presiones y los caudales que entran y salen de los nodos, entendiéndose estos como las conexiones entre los diferentes elementos que conforman el sistema. Dicha relación corresponde, en el caso de las bombas y compresores a las curvas de desempeño provistas por el fabricante, y en el caso de las tuberías a las ecuaciones de pérdida de energía, definidas en la sección anterior [2].

Con el fin de definir correctamente las ecuaciones de este, y de todos los sistemas en general además de garantizar la solución del mismo, ciertos parámetros deben ser tomados en cuenta:

1. Debe existir máximo una incógnita en cada nodo (i.e. ya sea la presión o el caudal).
2. Por lo menos una presión debe ser especificada en el sistema.
3. Flujos que salen de un nodo son asignados con signo negativo, mientras que aquellos que llegan a un nodo son asignados positivos.
4. El ángulo de cada tubería se considera positivo cuando el nodo con el número mayor se encuentra a una altura superior que el nodo con el número menor.

Una vez definidas las condiciones anteriores se realiza un balance de masa en cada uno de los nodos, utilizando

la ecuación de continuidad, basada en la primera Ley de Kirchhoff (ver Ecuación 115):

$$\sum_{j=1}^{l_i} q_{ij} + Q_i = 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, N \quad (115)$$

Siendo l_i el número de tuberías conectado al nodo i -ésimo, N el número total de nodos en el sistema, q_{ij} el flujo total en la tubería j -ésima conectada al nodo i -ésimo y Q_i el caudal de entrada o salida al nodo.

Ahora bien, para poder calcular el flujo a través de una determinada tubería utilizando el modelo bifásico, se deben asumir las presiones en todos y cada uno de los nodos del sistema, a excepción de los nodos en donde la presión es conocida, ya que permanecerá constante durante el proceso. No obstante, si las suposiciones no son correctas, es muy probable que la Ecuación 115 no se cumpla, para lo cual, Tian & Adewumi [3] brindan una solución a este problema aumentando o disminuyendo presión en el nodo dependiendo de si el balance másico es positivo o negativo respectivamente (ver Ecuación 116).

$$P_i^{k+1} = P_i^k + \beta_i \left[\sum_{j=1}^{l_i} q_{ij} + Q_i \right] \quad (116)$$

La Ecuación 116 constituye la base de cálculo de la metodología enunciada en este trabajo. Como se ha venido mencionando, el procedimiento para el análisis de redes de tuberías es un algoritmo de solución simultánea, que no involucra el uso de matrices y en el cual se iteran las presiones, hasta alcanzar una convergencia, interpretada mediante la Ecuación 117:

$$\left| \sum_{j=1}^{l_i} q_{ij} + Q_i \right| < \varepsilon \quad (117)$$

El término β_i corresponde a un factor de aceleración que permite a la iteración confluir más rápidamente y está definido en la Ecuación 118:

$$\beta_i = \text{Min} \left| \frac{P_i - P_j}{q_{ij}} \right| \text{ para } j = 1, 2, \dots, l_i \quad (118)$$

Cabe resaltar que en caso de presentarse una situación donde una presión en un nodo es especificada y el caudal de entrada o salida necesita ser calculado, la Ecuación 119 puede ser utilizada:

$$\sum_{j=1}^{l_i} q_{ij} = -Q_i \quad (119)$$

5. SOLUCIÓN NUMÉRICA

El modelo enmarcado se compone básicamente de cuatro partes. Estas son: i) la identificación de la red y el tratamiento de datos de entrada, ii) el modelo multifásico, iii) el modelo de red, y iv) el procedimiento iterativo simultáneo.

Para ilustrar la metodología de solución en la Figura 1 se muestra un ejemplo sencillo de un sistema constituido por ocho tuberías y ocho nodos, basado en el trabajado Tian & Adewumi (1994) [3], el cual se

analizará. Un resumen de los resultados obtenidos se presenta en las Tablas 3-6.

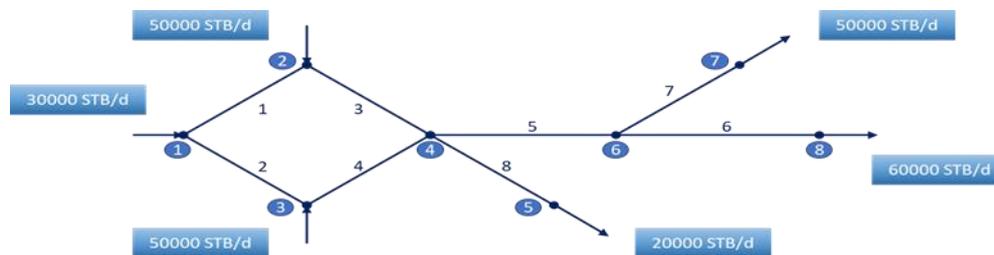


Figura 1. Requerimientos generales para modelar flujo multifásico. Modificado de Tian & Adewumi [2].

5.1. Identificación de la Red de Tuberías

Para iniciar el análisis del sistema la entrada de datos debe constar de tres componentes: i) El número total de nodos y el número de tuberías conectadas a cada uno, ii) Las propiedades del fluido y de las tuberías, y finalmente, iii) Las presiones y/o flujos conocidos. A continuación, en la Tabla 3 se encuentra un resumen de la relación existente entre los nodos y las tuberías del sistema.

Es importante aclarar que las propiedades de los fluidos transportados (i.e. aceite, agua y gas) deben ser calculadas mediante las correlaciones adecuadas, no obstante, valores constantes fueron asumidos para la fase líquida (i.e. agua y aceite) y la fase gaseosa con el fin de agilizar el análisis, tal y como se muestra en la Tabla 4.

En cuanto a las características de las líneas, fueron asumidas tuberías nuevas de acero. Adicionalmente, cabe destacar que los ángulos fueron referenciados como positivos cuando se movían de un lugar más bajo a un lugar más alto, siempre de un nodo inferior a un nodo superior, esto se puede ver ilustrado en la Tabla 5.

Tabla 3. Relación entre nodos y tuberías del sistema.

Nodo	Número de tuberías
2	2.1
	2.3
3	3.2
	3.4
4	4.3
	4.4
	4.5
	4.8
5	5.8
6	6.5
	6.6
	6.7
7	7.7
8	8.6

Tabla 4. Propiedades del fluido a una presión promedio

γ_g	0,65	T	50 °F
γ_l	0,82	WOR	2 Bb/STB
μ_g	0,02 cp	GOR	1000 SCF/STB
μ_o	1,0 cp	σ_1	30 dinas/cm
μ_w	1,0 cp	P_c	660 psia
B_o	1,11	T_c	440 R
B_g	0,0014	F.C.	0,7236
B_w	1,01		

Tabla 5. Características de las tuberías del sistema

Número de Tubería	Parámetros de Tubería		
	L _i (ft)	D _i (in)	Θ_i
1	2000	6	1,5
2	2000	6	1,5
3	1500	9	-0,5
4	1500	9	-0,5
5	3000	12	0
6	1000	9	2
7	800	6	3,5
8	1200	4	-5

Usando los datos anteriores, se puede llevar a cabo la identificación de la red, y seguidamente, las ecuaciones características pueden ser generadas.

5.2. Procedimiento Iterativo

Una vez terminada la fase de identificación se procede a calcular las presiones y caudales correspondientes a cada tubería de manera simultánea, usando los modelos de flujo tratados previamente, para posteriormente determinar las presiones y caudales en cada nodo mediante el modelo de red. La implementación del

procedimiento iterativo es explicada detalladamente en el diagrama de flujo mostrado en la Figura 2.

En la Tabla 6 se muestra un resumen de los resultados conseguidos en la simulación. Se pueden apreciar en esta las presiones y caudales presentes en cada nodo.

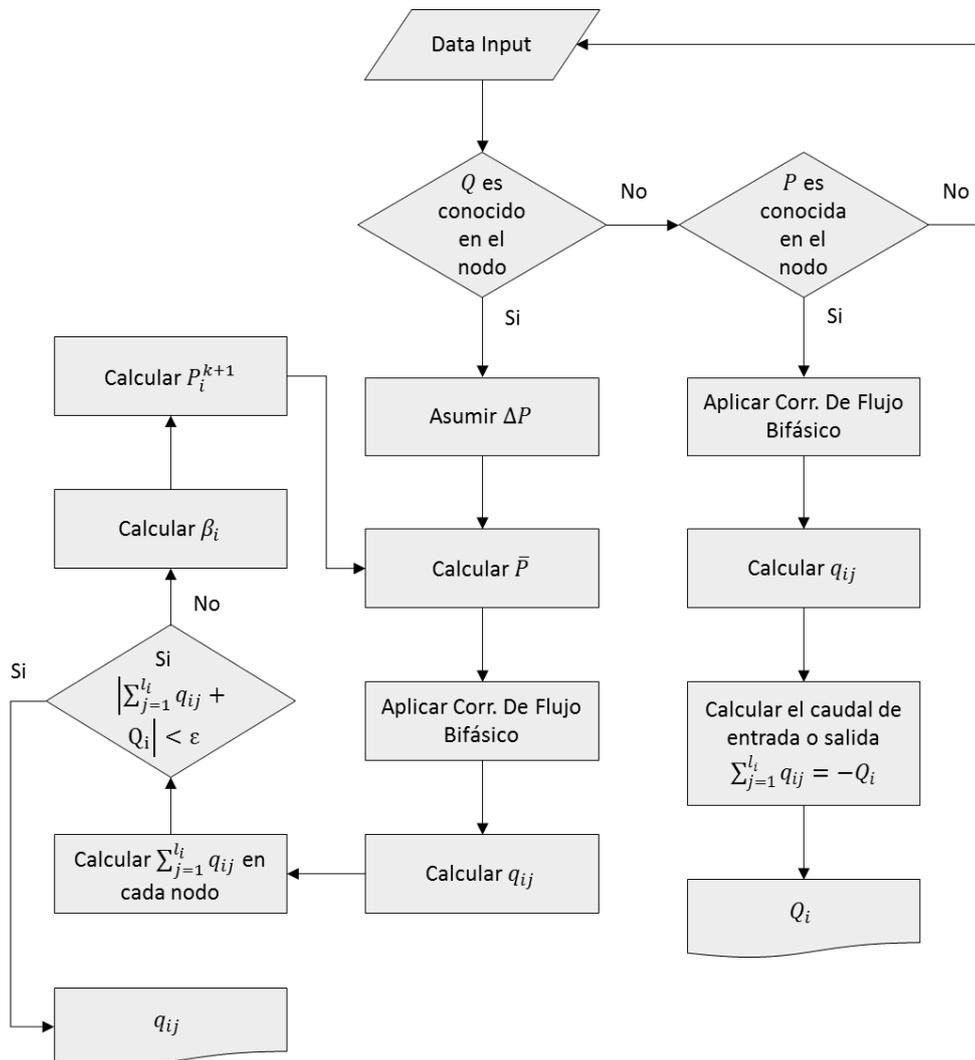


Figura 2. Diagrama de Flujo del modelo propuesto.

Tabla 6. Resultados obtenidos con el modelo propuesto. Modificado de Tian & Adewumi [2].

Nodo	Q _i [STB/d]	Número de tuberías conectadas	P _i [psi]	Tubería	q _{ij} [STB/d]	Patrón de flujo
1	30000	2	3000,00*	1	15000	Distribuido
2	50000	2	2847,97	2	15000	Distribuido
3	50000	2	2847,97	3	65000	Distribuido
4	0	4	2652,33	4	65000	Distribuido
5	-20000	1	1707,88	5	110000	Distribuido
6	0	3	2387,54	6	60000	Distribuido
7	-50000	1	1875,00	7	50000	Distribuido
8	60000	1	2257,50	8	20000	Distribuido

*Presión conocida

5.3. Discusión de Resultados

En este estudio, el modelo fue probado usando varios datos hipotéticos de una red de tuberías. Con el fin de verificar la validez de los resultados obtenidos. Estos fueron cotejados con los alcanzados por Tian & Adewumi [3]. La evaluación de los resultados es bastante simple ya que las variables hidrodinámicas deben tener valores simétricos en la red propuesta.

Los resultados de la predicción muestran que el modelo es capaz de predecir con gran precisión tanto la distribución de las presiones y flujos en cada nodo como el hold-up de líquido en cada tubería y el régimen de flujo, con la ventaja de tomar en cuenta una fase líquida compuesta no solo por un tipo de fluido (i.e. aceite) sino por dos fases inmiscibles (agua y aceite). Es de aclarar que el modelo propuesto, es independiente a la calidad del crudo, tipo de fluido, e inversiones de fases de mezclas agua-aceite, y de fenómenos tales como la corrosión [26], los cuales deben ser modelados por medios de correlaciones de fluidos para instancias *Black oil*, por lo tanto, la implementación del modelo planteado no está limitado por lo anteriores.

6. CONCLUSIONES

En el presente estudio se desarrolló un nuevo modelo numérico, el cual permite el análisis y diseño de redes de tuberías con flujo multifásico, a través de la implementación de un algoritmo de resolución simultánea que no requiere del manejo algebraico de matrices.

Este modelo cuenta con diversas ventajas entre las que destacan su fácil utilización, la posibilidad de manejar presiones y caudales como parámetros de inicialización, además de que su aplicabilidad no se ve restringida por el tipo de configuración del sistema o los fluidos tratados, lo cual lo hace idóneo para la simulación de la mayoría de los sistemas actuales.

7. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Universidad Industrial de Santander, al grupo de Modelamiento de Procesos de Hidrocarburos y a Petroleum Consulting Company S.A.S.

8. NOMENCLATURA

A = Área transversal de la tubería, ft²
 B_o = Factor volumétrico de formación del aceite, Bb/STB
 B_w = Factor volumétrico de formación del agua, Bb/STB
 C_e = Coeficiente de pérdida menor.
 D = Diámetro de la tubería, ft
 F.C. = Factor de compresibilidad del gas, adim.
 h_f = Caida de Presión.

H_L (0) = Hold-up horizontal de líquido, adim.
 K = Constante referida a la resistencia en la tubería
 L = Longitud de la tubería, ft
 n = Potencia característica de la tubería
 N_{FR} = Número de Froud, adim
 N_{Re} = Número de Reynolds, adim
 N_{LV} = Número de velocidad del líquido
 P = Presión promedio, psia
 P₁ = Presión en el nodo inicial, psi
 P₂ = Presión en el nodo final, psi
 q = Caudal total a través de la tubería, STB/d
 q_g = caudal de gas, ft³/s
 q_o = caudal de aceite, ft³/s
 q_w = caudal de agua, ft³/s
 q_l = caudal de líquido, ft³/s
 Q₀ = Flujo inicial asumido.
 R = Relación gas/aceite, SCF/STB
 R_s = Relación gas en solución/aceite, SCF/STB
 SG_g = Gravedad específica del gas, adim.
 T = Temperatura promedio, R
 WOR = Relación agua/aceite, adim.
 Z = Elevación.
 ρ_o = densidad del aceite, Lbm/ft³
 ρ_w = densidad del agua, Lbm/ft³
 ρ_{sp} = Densidad de la mezcla, Lbm/ft³
 ρ_l = Densidad del líquido, Lbm/ft³
 ρ_g = Densidad del gas, Lbm/ft³
 μ_o = viscosidad de aceite, cp
 μ_w = viscosidad de agua, cp
 μ_m = Viscosidad de la mezcla, cp
 μ_l = Viscosidad del líquido, cp
 μ_g = Viscosidad del gas, cp
 Θ = Ángulo de la tubería tomado desde el nodo menor al nodo mayor, grados
 σ_l = Tensión superficial del líquido

9. REFERENCIAS

- [1] G. Valle, F. Romero y M. Cabarcas, Predicción de flujo multifásico en sistemas de recolección de crudo: descripción de requerimientos, Fuentes el Reventón Energético, v. 15, n. 1, p. 87-99., 2017.
- [2] L. Mucharam y M. Adewumi, A Compositional Two-Phase Flow Model for Analyzing and Designing Complex Pipeline Network Systems, Society of Petroleum Engineers, SPE 21562, 1990, p. 17.
- [3] S. Tian y M. Adewumi, A New Algorithm for Analyzing and Designing Two-Phase Flow Pipeline Networks, Pennsylvania: Society of Petroleum Engineers, SPE 28177, 1994.
- [4] U. Shamir y C. Howard, «WATER DISTRIBUTION SYSTEMS ANALYSIS,» Journal of the Hydraulics Division, pp. 219-234, 1968.

- [5] B. Eaton, D. Andrews, C. Knowles y K. Brwon, The Prediction of Flow Patterns, Liquid Holdup and Pressure Losses Occurring During Continuous Two-Phase Flow in Horizontal Pipelines., *J. Pet. Technol.*, 19 (6), 815–828 (SPE Paper 1525)., 1967.
- [6] A. Dukler, Gas Liquid Flow in Pipelines: I. Research Results, AGA-API Project NX-28, 1969.
- [7] H. Beggs y J. Brill, A Study of Two-Phase Flow in Inclined Pipes, *J. Pet. Technol., Trans., AIME*, 25 (5), 607–617., 1973.
- [8] T. Walski, Pipe Network Modeling, Video Learning System For CYBERNET Software, Haestad Methods: Waterbury, 1994.
- [9] J. Martinez y L. Puigjaner, A powerful improvement on the methodology for solving large-scale pipeline networks., *Comput. Chem. Eng.* 12 (2–3), 261–265., 1988.
- [10] H. Cross, Analysis of Flow in Networks of Conduits or Conductors., University of Illinois Engineering Experiment Station, 1936.
- [11] B. Gay y P. Middleton, The solution of pipe network problems, *Chem. Eng. Sci.*, 26, 109–123., 1970.
- [12] R. Sargent, The Decomposition of Systems of Procedures and Algebraic Equations in Numerical Analysis, Watson, G.A. (Ed.). Springer-Verlag, Berlin., 1978.
- [13] M. Shacham, Decomposition of systems of nonlinear algebraic equations, *AIChE J.* 30 (1), 92–99., 1984.
- [14] J. Krope, P. Trop y D. Goricanec, Flow pressure analysis of loop gas network, international journal of systems applications., *Eng. Dev.* 5 (4)., 2011.
- [15] T. Altman y P. Boulos, Convergence of Newton method in nonlinear network analysis, *Math. Comput. Model.* 21 (4), 35–41., 1995.
- [16] D. Brick, Iterative methods for looped network pipeline calculation. *WaterResour, Manage.* 25, 2915–2987., 2011.
- [17] P. Bhawe, Analysis of Flow in Water Distribution Networks, Technomic Publishing: Lancaster, PA, 1991.
- [18] L. A. Pipes, Applied Mathematics for Engineers and Physicists, New York: McGraw-Hill, 1958.
- [19] F. Poettmann y P. Carpenter, Multiphase Flow of Gas, Oil and Water Through Vertical Flow Strings., *Drill. Prod. Pract.*, pp 257., 1952.
- [20] O. Flanigan, Effect of Uphill Flow on Pressure Drop in Design of Two-Phase Gathering Systems., *Oil Gas J.*, 1958.
- [21] C. Hoogendorn, Gas-Liquid Flow in Horizontal Pipes, *Chem. ENg. Sci.*, 9, 1959.
- [22] H. Duns y N. Ros, Vertical Flow of Gas and Liquid Mixtures in Wells., In Proceedings of the Sixth World Petroleum Congress, Frankfurt, Germany; pp 451–465 (Section II, Paper 212.PD6)., 1963.
- [23] A. Hagedorn y K. Brown, Experimental Study of Pressure Gradients Occurring During Continuous Two-Phase Flow in Small-Diameter Vertical Conduits., *J. Pet. Technol.*, 17 (4), 475–484., 1965.
- [24] J. Orkiszewski, Predicting Two-Phase Pressure Drops in Vertical Pipes., *J. Pet. Technol., Trans. AIME*, 19 (6), 829–838 (SPE Paper 1546-PA)., 1967.
- [25] J. Mandhane, G. Gregory y K. Aziz, Critical Evaluation of Holdup Prediction Methods for Gas-Liquid Flow in Horizontal Pipes, Society of Petroleum Engineers, SPE 5140, 1974.
- [26] O. Gonzales-Estrada, J. Leal-Enciso y J. Reyes-Herrera, “Análisis de integridad estructural de tuberías de material compuesto para el transporte de hidrocarburos por elementos finitos,” *Rev. UIS Ing.*, vol. 15, no. 2, pp. 105-116, 2016. Doi: <https://doi.org/10.18273/revuin.v15n2-2016009>