EDVCATIO PHYSICORVM
QVO NON ASCENDAM?

Ambientes virtuales. La construcción de conceptos y teoremas en acción por estudiantes de secundaria

Elvia Rosa Ruiz Ledezma[1], Alejandro Miguel Rosas Mendoza[2]
[1]Instituto Politécnico Nacional, CECyT Wilfrido Massieu, Av. de los Maestros 217, Colonia, Casco de Santo Tomás, C.P. 11340, Ciudad de México.
[2]Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Calzada Legaria 694, Col. Irrigación, 11500, Ciudad de México.

E-mail: ruizelvia@hotmail.com

(Recibido el 15 de enero de 2017, aceptado el 28 de agosto de 2017)

Resumen

En este documento mostramos los argumentos, inferencias y conjeturas que lleva a cabo uno de los estudiantes de la muestra participativa, de nivel secundaria en la Ciudad de México. Asimismo, presentamos los análisis de las respuestas categorizadas en *concepto en acción* (concepto considerado como pertinente dentro de la acción) y *teorema en acción* (proposición considerada como verdadera dentro de la acción) con el uso de ambientes virtuales, trabajando las funciones trigonométricas seno y coseno, en donde la posición del parámetro da lugar a la construcción de diferentes reglas, bajo la óptica de la teoría de la génesis instrumental y la teoría de los campos conceptuales. Para esto, los estudiantes resolvieron actividades aplicadas en una computadora construyendo el concepto de parámetro, permitiendo la clasificación de sus respuestas bajo los esquemas que se construyeron para su análisis.

Palabras clave: Concepto en acción, teorema en acción, génesis instrumental.

Abstract

In this document we show the arguments and conjectures carried out by one of the students of the participative sample, of secondary level in Mexico City. Likewise, we present the analysis of the responses categorized in concept in action (concept considered as pertinent within the action) and theorem in action (proposition considered as true within the action) with the use of virtual environments, working the trigonometric functions sine and cosine, where the position of the parameter gives rise to the construction of different rules, from the perspective of the theory of instrumental genesis and the theory of conceptual fields. For this, students solved activities applied in a computer constructing the concept of parameter, allowing the classification of their answers under the schemes that were constructed for their analysis.

Keywords: Concept in action, theorem in action, instrumental genesis.

PACS: 01.30.-y, 01.30.M-, 01.40.E- **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

A partir de su introducción en la década de los 80, las herramientas digitales se consideraron prometedoras en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, desde su uso por ser herramientas potencialmente significativas, dinámicas y ejecutables [1]. En este siglo la preocupación se ha centrado en el tipo de actividades que permitan su integración en la clase de matemáticas, no siendo solamente actividades adaptadas del lápiz y papel sino actividades encaminadas a la conceptualización y socialización del conocimiento [2] y más aún orientadas hacia situaciones productivas y expresivas de los estudiantes, focalizadas en la apropiación de herramientas para el aprendizaje matemático [3]. Así, con la construcción teórica de la aproximación instrumental se ha profundizado en las clases de matemáticas.

Por lo que se refiere a los ambientes virtuales, el internet ha promovido uno de los cambios más radicales desde finales del siglo xx. La manera de investigar, de comunicarse, de trabajar, entre otras y cada vez los estudiantes tienen mayor acceso [4], provocando la producción acelerada de programas que son utilizados en todos los ámbitos de nuestra vida.

En la Educación matemática no ha sido la excepción, como comenta Kaufmann [5] los ambientes virtuales pueden proporcionar campos de juego interactivo, con un grado de interactividad que puede mejorar las habilidades espaciales de los estudiantes. En otros proyectos, como por ejemplo el proyecto SMILE se enfatiza su uso en la enseñanza de la geometría y de la trigonometría [5].

El empleo de la tecnología y los softwares usados, no siempre son suficientes y no necesariamente garantizan el éxito. Balacheff [6] propone en el diseño de ambientes tecnológicos para la educación, se contemple al estudiante como eje central, al tener como objetivo el conocimiento; siendo la interacción base del diseño de este entorno.

Por lo que en el proceso de instrumentación y en la construcción de esquemas (formas de organización de la actividad) se centra esta investigación. Teniendo como finalidad encontrar evidencias de la forma en cómo, los ambientes virtuales de enseñanza/aprendizaje influyen en los procesos de enseñanza/aprendizaje de los estudiantes de secundaria.

II. ORIGEN DE LA PLOBLEMÁTICA

A. Contexto Institucional

Desde el año 2002, con base en el programa Nacional de Educación (PRONAE, 2001/2006), se emprende la Reforma Integral de la Educación Secundaria (RIES), con los propósitos de lograr continuidad curricular con los niveles educativos que le anteceden, responder a la demanda social de mejorar la calidad educativa y garantizar la atención de todos los jóvenes en edad para cursar la educación secundaria.

La Educación secundaria basada en competencias en México, al igual que los otros dos niveles de educación básica (preescolar y primaria) en el perfil de egreso establecido en el Plan de estudios 2011, señala las aptitudes que pretenden desarrollarse a lo largo de la vida. Particularmente en el Programa de estudios de matemáticas 2011 se incluyen las competencias a desarrollar por los estudiantes: resolver problemas de manera autónoma, comunicar información matemática, validar procedimientos y resultados y manejar técnicas eficientemente.

Por lo que un perfil de egresos basado en una educación en competencias requiere iniciar considerando el conocimiento y dominio que tengan los alumnos y las construcciones que posteriormente ellos desarrollen en nuevos conocimientos, actitudes y destrezas y por último la movilización y puesta en práctica de cada uno de ellos.

Haciendo referencia a las tecnologías de la información y la comunicación (TIC), en general a las plataformas digitales, se diseñó la estrategia; habilidades digitales para todos (HDT), como estrategia educativa que impulse el desarrollo y utilización de estas tecnologías.

El objetivo es que los estudiantes manejen información dentro y fuera del aula para ampliar sus competencias para la vida. Cabe notar que se han establecido estándares tecnológicos, siendo los aprendizajes esperados al concluir un periodo escolar, es decir saber utilizar herramientas digitales para comunicar ideas e información, así como interactuar con otros.

Aunado a lo anterior se tienen las evaluaciones nacionales e internacionales, la prueba PISA (Program for International Student Assesment - Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos) tiene como propósito evaluar el rendimiento de los alumnos de 15 años de varios países y la prueba PLANEA (Plan nacional para la evaluación de los aprendizajes) correspondiente a 3er. grado de Secundaria, se aplica con el propósito de conocer en qué medida los estudiantes logran dominar un conjunto de aprendizajes esenciales al término de la Educación Secundaria, en dos campos de formación: Lenguaje y comunicación (comprensión lectora) y Matemáticas. Donde casi el 50% de los estudiantes se ubican en niveles de bajo desempeño en las competencias fundamentales, marcadas en los planes y programas de estudio; implicando que el sistema educativo no ha fortalecido el potencial de los jóvenes para hacer de ellos ciudadanos productivos y competitivos.

Lo que nos está mostrando por un lado la necesidad del desarrollo de competencias en los estudiantes, así como el panorama negativo del nivel educativo en el que encuentran los alumnos mexicanos. Por lo que es necesario iniciar programas, más específicos y plantearse estrategias que permitan al estudiante mejorar particularmente en la comprensión de las matemáticas y de la ciencia en general

Insistimos en que la idea fundamental es aprovechar la mayoría de las herramientas tecnológicas de que disponen nuestros estudiantes, desde una computadora hasta un teléfono inteligente, con argumentos didácticos y cognitivos que coadyuven al desarrollo de actividades de aprendizaje, eficientes en su funcionamiento y eficaces en sus propósitos.

B. Justificación

Pocos han sido los avances que ha tenido México respecto a la calidad educativa, por esta razón en 2011 la Subsecretaría de Educación Básica promovió el programa: Estrategia Integral para la Mejora del Logro Educativo (EIMLE), para atender a las escuelas que han presentado menores resultados en las pruebas estandarizadas nacionales [7]. Se busca favorecer el trabajo docente y de toda la comunidad estudiantil, logrando generar adolescentes que cumplan con los perfiles de egreso plasmados en los planes y programas de estudio, por medio de actividades, cursos propedéuticos, entre otros, que fortalezcan y desarrollen las habilidades y competencias que beneficien el razonamiento matemático de los alumnos.

Pero lo que realmente deberíamos considerar es si las finalidades de la educación, la escuela y la puesta en marcha de los diversos programas, responden o no a las necesidades de cada uno de los alumnos, pues poseer conocimientos o capacidades no significa ser competente. Además de que cualquier proyecto concerniente a la educación debe poseer una intencionalidad cuyos resultados se encuentren en un futuro próximo, esto es, que lo que en un momento se enseña y se aprende, pueda ser utilizado en el preciso momento en que los conocimientos, habilidades y actitudes sean requeridos, que sea significativo. De ahí la importancia de documentar en los conceptos y teoremas en acción, los momentos en los que el estudiante construye el conocimiento referido a los objetos matemáticos y más adelante pueda utilizar en los siguientes cursos y en lo cotidiano.

C. Propósito de la investigación

En este mismo sentido y reflexionando que en diversas investigaciones [2, 3, 8] se propone, usar los artefactos no solo como herramientas didácticas, sino como recursos productores de conocimiento, construyendo propuestas didácticas y analizando sus consecuencias cognitivas, al introducir ambientes tecnológicos, especialmente software en el aula y en conclusión el saber que cambia o que no cambia en las mentes de nuestros estudiantes en los intercambios con tecnologías. Así decidimos plantear y desarrollar este proyecto. Teniendo como propósito documentar y analizar cómo los estudiantes de secundaria construyen el concepto de parámetro y el papel que desempeñan los parámetros en las variaciones de la gráfica de las funciones trigonométricas seno y coseno, inmersos en un ambiente virtual.

III. CONSIDERACIONES TEÓRICAS

El marco de referencia está conformado por la teoría de la aproximación instrumental, específicamente la génesis instrumental y la teoría de los campos conceptuales referidos al desarrollo de esquemas de uso y esquemas de acción.

La aproximación instrumental en educación matemática surge en el contexto francés, de la ingeniería didáctica, de la teoría de las situaciones didácticas y de la teoría antropológica de lo didáctico. En un inicio la aproximación instrumental fue aplicada, principalmente en ambientes tecnológicos como los CAS (sistemas algebraicos computarizados), utilizados por estudiantes y profesores, pero que no fueron diseñados con un propósito educativo [3]. Inicialmente, la teoría toma tres ideas esenciales desde la ergonomía cognitiva [9].

1.- La distinción entre un artefacto y un instrumento: un artefacto es un objeto material o abstracto, un producto de la actividad humana y es usado por un sujeto para transformar un tipo de tarea. Un instrumento es lo que el sujeto construye desde el artefacto.

2.- El reconocimiento de que la apropiación de un artefacto y la construcción de un instrumento es un proceso complejo, llamado génesis instrumental, en el cual una nueva entidad ha nacido.

3.- La comprensión de que la génesis instrumental no es un proceso simple, que envuelve dos componentes, llamados:

-Instrumentación, dirigido hacia el sujeto; en el que se generan esquemas de acción; es decir habilidades de aplicación de la herramienta para la realización de tareas significativas que a su vez se transforman en técnicas que permiten respuestas efectivas a actividades matemáticas.

-Instrumentalización, dirigido hacia el artefacto; en el que el sujeto lo transforma y adapta a sus necesidades y circunstancias.

Los estudiantes desarrollan los procesos descritos anteriormente, cuando llevan a cabo las actividades mediadas por la herramienta, con la finalidad de obtener información sobre el concepto. El artefacto se transforma en instrumento, en la medida que los alumnos desarrollan esquemas para la resolución de tareas con la ayuda del instrumento: Instrumento = Artefacto + Esquemas y técnicas para un determinado tipo de tareas. (Rabardel, 2002, citado por [10]).

Desde este punto de vista propusimos la investigación, donde el desarrollo de esquemas es central en la génesis instrumental, y el concepto de esquema se construye sobre la definición de Vergnaud [11]. Así damos paso a la teoría de los campos conceptuales, donde; un esquema es una organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dada, esto es, un esquema es una forma más o menos estable para manejar situaciones o desempeños específicos [10]. Particularmente en la investigación, un esquema es una parte de un instrumento, hacemos referencia a los esquemas de instrumentación, dentro de ellos se encuentran los esquemas de acción instrumentada y los esquemas de utilización (esquemas de uso).

Los esquemas de utilización están directamente relacionados con el artefacto y son bloques de construcciones para nuevos esquemas de acción instrumentada, los cuales son esquemas globales dirigidos hacia una actividad con el objeto [12]. Como los esquemas mentales no son observables directamente, nos enfocamos sobre las técnicas instrumentadas, las cuales se definen como una secuencia más o menos estable de interacciones entre el usuario y el artefacto con una particular meta. Un esquema mental se mira como una acción deliberada para lograr una meta que contiene operaciones invariantes, estas por lo general son conocimientos implícitos contenidos en el esquema en forma de *conceptos en acción* y *teoremas en acción.*

Un concepto en acción, es un concepto considerado como pertinente dentro de la acción en situación. Un teorema en acción, es una proposición considerada como verdadera dentro de la acción en situación [13].

Vergnaud [13] señala que no se puede estudiar el desarrollo de un concepto de manera aislada, porque siempre está tomado de un conjunto, formando un sistema, por lo que los conceptos son definidos a través de una terna: el primero es un conjunto de situaciones que constituyen el referente del concepto, el segundo es un conjunto de invariantes operatorios (teoremas y conceptos en acción) que dan el significado del concepto, y el tercero es un conjunto de formas lingüísticas, que permiten representar simbólicamente al concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se aplica, en general su significante.

Esto nos permitió observar a los estudiantes en el momento de interactuar con las ADeL (Actividades Didácticas en Línea) e identificar los conceptos y teoremas en acción y determinar los esquemas de acción instrumentada que desarrollan los alumnos.

IV. METODOLOGÍA

A. Actividades Didácticas en Línea (ADeL)

Las ADeL fueron planeadas como parte del proyecto "Diseño, desarrollo y generación de materiales didácticos en línea para la enseñanza de la matemática en el Sistema Educativo Veracruzano" (CONACYT108952). En este proyecto se generó un conjunto de 20 actividades. Explícitamente en la investigación se seleccionaron aquellas que por su nivel de complejidad y secuencia de conceptos incluidos permitieran la construcción de los esquemas, En secundaria se utilizaron las actividades 1,4,6.5,2 y 3 (en el orden mostrado). La actividad didáctica le pide al alumno que reproduzca una gráfica que el programa le presenta mediante una pantalla semejante a la siguiente:

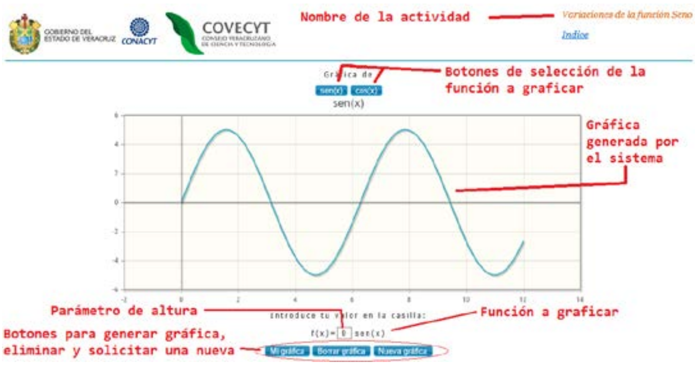

FIGURA 1. Imagen de la interfaz que el alumno utiliza en las actividades didácticas.

B. Aplicación de las actividades

Las actividades se aplicaron a estudiantes de tercer grado de secundaria, en la Ciudad de México, alumnos de 13 a 14 años, en sesiones de una a dos horas. Los alumnos participantes en las sesiones fueron elegidos de acuerdo con conocimiento que de ellos tenían sus profesores. Participaron tres estudiantes, uno de alto aprovechamiento, otro de aprovechamiento promedio y uno más de bajo aprovechamiento. Las sesiones se efectuaron en el laboratorio de red escolar de la escuela y fueron videograbadas.

Se dio una explicación a los estudiantes de lo que tenían que hacer, esto es, generar una gráfica; identificando la colocación de un valor al que llamamos parámetro en el espacio requerido para que la gráfica dada por el programa (en color azul) se igualara a la generada por ellos (en color naranja). Nunca se dijo qué valor colocar, se les dejó libremente explorar con los valores que quisieran anotar, solo se pidió que dijeran el por qué utilizaban ese valor y que comentaran sus observaciones con base en su gráfica generada en comparación con la que se presentaba en la pantalla.

Además, se les solicitó que se anticiparan, comentando que consideraran que haría en la gráfica el valor que habían escrito antes de hacer su gráfica. En ningún momento se indujo a la respuesta correcta, pero se pidió que generalizaran sus observaciones a través de una regla o una conclusión. De esta forma podríamos observar si el alumno estaba construyendo los esquemas, los conceptos en acción y los teoremas en acción.

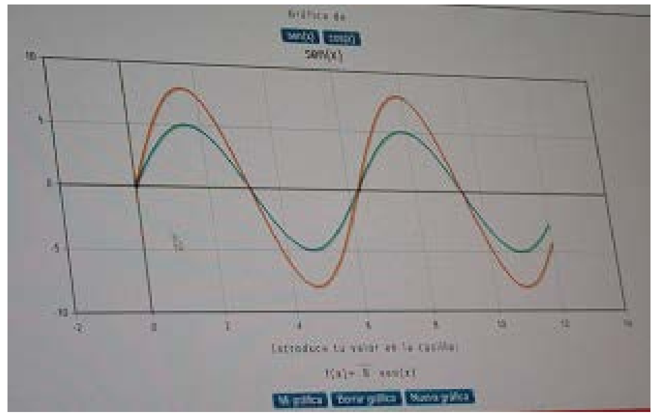

FIGURA 2. El alumno proporcionó un valor que generó la curva naranja, que difiere de la curva (azul) del programa.

Durante las sesiones de aplicación, se cuestionó a los estudiantes sobre lo que pensaban que haría el valor del parámetro que proporcionaron antes de que introdujeran el valor. Después de ver la gráfica resultante con el valor que dieron se les preguntó el por qué pensaban que la gráfica había o no resultado igual a la del programa.

C. Intensión de las sesiones de aplicación

En el desarrollo de la aplicación de las actividades, apuntamos hacia la construcción de enunciados que recogen casos particulares y de reglas que generalizan las particularidades, por lo que las respuestas de los estudiantes las hemos categorizado en concepto en acción y teorema en acción, de acuerdo con los fundamentos teóricos considerados en esta investigación.

Estamos entendiendo *concepto en acción*, cuando el estudiante al observar una gráfica en la pantalla relaciona el comportamiento de esta con sus conocimientos previos; en el caso del primer esquema, el plano cartesiano, abscisas, ordenadas, origen, altura de la curva, escala de la curva, números positivos y negativos. Además de que al ir probando valores observe los efectos que provoca el parámetro en cada caso particular, lo que le permitirá construir una regla. Así mismo que relacione en la progresión de las actividades el lugar en que se encuentra cada parámetro con su comportamiento gráfico y cuando se combinan los acomodos de dichos valores pueda anticiparse a qué efectos corresponden en el contexto gráfico.

Entendemos *teorema en acción* cuando el alumno conjetura a través de casos particulares el comportamiento de la función con la posición del parámetro y lo externa en una regla o conclusión; esto es, cuando generaliza.

Las *técnicas instrumentadas* las observamos: cuando el estudiante busca en la pantalla cómo decidir la función trigonométrica con la cual quiere trabajar, cómo se genera una nueva gráfica, la relación que guarda la gráfica con la escala correspondiente, distinguir su gráfica de la generada por el sistema y la utilización de los botones para generar, borrar y dibujar su gráfica.

D. Respuestas de los estudiantes

En la presente investigación se muestran los argumentos y conjeturas que lleva a cabo uno de los estudiantes de la muestra participativa en la construcción de los conceptos y teoremas en acción y el análisis de sus respuestas.

Enseguida mostramos los conceptos en acción, teoremas en acción y las técnicas instrumentadas, manifestadas por el estudiante de bajo aprovechamiento (B).

Actividad 1. Variaciones de la función seno y coseno
Función seno f(x)= A sen x

En los primeros minutos, el alumno se familiariza con los botones de la actividad, genera una primera gráfica f(x)= 1senx. Prueba con el valor 5, comentando que la curva naranja aumentó y la azul disminuyó (cambió la escala y el alumno no se percató de este hecho, por lo que considera que las dos gráficas (naranja y azul se movieron)). Continúa dando valores 3, 1.5, 1.

Concepto en acción parámetro altura

B*: Creo que con el valor 1 se igualará porque ya le falta poquito para que se iguale*.

En una nueva gráfica generada f(x)= 3senx. B dijo: *Escribo el 2 y veo que la gráfica naranja está debajo de la azul*

B: *Con el valor 1 la curva bajó más, por lo que es un valor mayor*.

B: *Cuando le puse 2 la curva naranja estaba más arriba que con el 1*.

En la curva generada f(x)= 4senx. B dijo: *Escribo 4 porque la curva llega a 4 y baja a -4, va a seguir subiendo y bajando de 4 a -4.*

Teorema en acción parámetro altura

B: *No recuerdo el nombre de los ejes, los llamaré horizontal y vertical* (6:14 min).

Se genera otra gráfica f(x)= 5 sen x. B dijo*: El valor es cinco, porque la gráfica está un poco más arriba de 4 en el eje vertical* (6:48 min).

B: *La gráfica queda igual porque ya le entendí* (7:11 min).

B: *El número que tengo que escribir es el que te marca la curva, hasta donde llega* (7:20min).

Técnicas de acción instrumentada

Observa que con números negativos la curva queda al revés.

B: *Pruebo con 2, 1 en esta nueva gráfica* (casos particulares para generar una conclusión).

Actividad 1 para función coseno f(x)=A cos x

En la pantalla se genera la curva f(x)= 6cosx.

Concepto en acción parámetro altura

B: *Creo que el valor es 6 porque es hasta donde está la curva y baja a -6*.

En esta gráfica (f(x)= 4cosx). B dijo: *El valor es 4 porque la curva sube a 4 y baja a -4.*

Teorema en acción parámetro altura

B: *El valor es el número hasta donde llega la gráfica* (9:3 min).

B: *El número es hasta donde suben todas las curvas* (11:5 min).

Técnicas de acción instrumentada

Prueba con menor cantidad de valores después de observar el valor máximo de la curva.

Actividad 4. Desplazamiento vertical de la función seno.
f(x)= sen x + [h]

La curva generada es f(x)= sen x + 3

Concepto en acción parámetro desplazamiento vertical

B: *El valor es dos porque la curva va de 2 a 4".*

B: *El valor es tres para que suba la curva naranja".*

En la gráfica (f(x)=sen x -6) B dijo: *El valor es -6 porque con los negativos va subiendo la curva naranja.*

B: *El correcto es -6 donde inicia la curva*.

Teorema en acción parámetro desplazamiento vertical

B: *En esta gráfica el valor es -3*, comenta antes de escribir: *porque es donde inicia la curva* (17:52 min). Escribe el -3 y comprueba que su conclusión es correcta.

B: *Tienes que escribir el número donde empieza la curva* (18:05 min).

Técnicas de acción instrumentada

En la gráfica de f(x)=sen x -6, B dijo: *Con 6 la curva naranja está muy baja, con 3 aún no sube, con -5 la curva naranja subió más, pero con -4 va a bajar.* Hace observaciones de acuerdo con los valores sobre el comportamiento de su gráfica generada.

Actividad 6. Variaciones de altura y desplazamiento de la función seno

La gráfica generada por el programa es f(x)=9senx + 2

Concepto en acción parámetros altura y desplazamiento

B: *El primer valor es 1 y el segundo es dos. Pero la curva naranja está abajo.*

B: *Diez es el primero y -2 el segundo, pero bajo de más la curva naranja.*

B: *El primer valor debe ser menor que 9, para que baje la curva".*

B: *Con 1.5 en el segundo casi se iguala.*

B: *Los valores son 9 en el primero y dos en el segundo, porque el resultado tiene que dar 11 porque la curva está más arriba de 10.*

B: *Con 8 se bajó más la naranja*.

Ahora se genera la curva (f(x)=7senx-3). B: *Esta curva llega a 4 baja a -10.*

Teorema en acción parámetros altura y desplazamiento

B: *Si resto 7-3 es cuatro que es donde llega la curva y sumo -7-3 es -10, donde baja la curva* (30:24 min).

B: *Tienes que restar los números y sumarlos, pero fijarte en los signos* (33:20 min).

Técnicas de acción instrumentada

En la primer curva generada prueba con varias parejas de valores para subir la curva naranja. (1,2), (4,2), (3,3), (11, -6), (10, -2).

En otra curva generada observa que llega el valor máximo a 4 y el mínimo a -10.

Actividad 5. Desplazamiento vertical de la función coseno. f(x)= cos x +[h]

La primera gráfica generada es f(x)=cosx + 10

Concepto en acción parámetro desplazamiento vertical

B: *Con el valor 5 se separa mucho de la gráfica azul.*

B: *El valor es 10, si es el correcto, es que ahorita lo hice mal porque es la mitad*.

En otra curva generada (f(x)= cosx-6). B dijo: *Debe ser -6 porque es la mitad*.

Teorema en acción parámetro desplazamiento vertical

B: *El valor es la mitad de la gráfica* (37:18 min).

Técnicas de acción instrumentada

Observa que con un primer valor la curva azul está muy alejada de la naranja y escribe otros valores hasta el correcto, diciendo (ahorita lo hice mal) pues observa el inicio de la curva y su punto mínimo.

Actividad 2. Variaciones de la frecuencia de las funciones seno y coseno. f(x) = sen ([A]x)

La gráfica generada por el programa es f(x)= sen 9x

Concepto en acción parámetro frecuencia

B: *El número va a multiplicar, con 0.5 la curva está muy abierta.*

B: *Con -2 la curva naranja llega a -1 y va hacia abajo.*

B: *La curva original va hacia arriba, entonces el valor es positivo*.

B: *Con el valor 5 ya hay más curvas*.

Teorema en acción parámetro frecuencia

B: *Con valores más grandes, se va cerrando más la gráfica y va dibujando más curvas y con valores más chicos se va abriendo más*" (41:06 min).

B: *Conté el número de curvas y es la mitad* (44:26 min).

B: *Si cuentas el número de curvas y las divides entre dos, te da el resultado* (44:56 min).

Técnicas de acción instrumentada

Prueba con diferentes valores 5, 6, 8, 9; observando que se dibujan más curvas.

Relaciona que con un número positivo la curva va hacia arriba y con un negativo, va hacia abajo.

Cuenta la frecuencia de la curva (el número de curvas) para dar su conclusión.

Actividad 3. Variaciones de la fase de las funciones seno y coseno. f(x)= sen (x+[h]n)

La curva generada por el sistema es f(x)= sen (x+1n).

Concepto en acción parámetro fase

B: *La curva sube a 1 y baja a -1.*

B: *El valor es 1.*

B: *Con 1 y -1 la curva es igual.*

B: *En otra gráfica, el valor es dos y también 4.*

Teorema en acción parámetro fase

No concluye con un enunciado, solo menciona casos particulares.

No discrimina el comportamiento con el parámetro par o impar.

Técnicas de acción instrumentada

Prueba con 1 y -1, manifestando que la curva sigue el mismo patrón

Al probar con los valores pares 2 y 4 comenta que el comportamiento es igual.

E. Análisis de las respuestas de los estudiantes

Para el análisis se construyeron cuatro esquemas: 1) Mi gráfica, 2) Reproducir gráfica, 3) Repetición y 4) Combinación de parámetros.

Primeramente, se establecieron esquemas de acción generados por los estudiantes mediante la computadora y sus periféricos involucrados en la generación de la gráfica. Posteriormente se convirtieron esos esquemas de acción en esquemas de uso, utilizándose para generar otros esquemas de acción que le permitieron al estudiante generar las gráficas que le solicita el programa (concepto en acción). Finalmente, los anteriores esquemas nuevamente se convierten en esquemas básicos (de uso) para construir un esquema de acción que permite comprender cómo el estudiante ha construido la "regla" mediante la cual pueden predecir la forma de una gráfica dado un valor para un parámetro (teorema en acción).

En este apartado consideramos cuando el estudiante construyó los conceptos y teoremas en acción, así como, hizo uso de los esquemas construidos. Lo comentado textualmente por el alumno lo hemos colocado entre corchetes, para distinguirlo de las descripciones de las acciones.

En la actividad 1 para la función coseno, observamos que B (3:36 min), utiliza los dispositivos de la computadora (esquema 1), ha automatizado su funcionamiento, en este caso el puntero del ratón, para manifestar su regla, pasando del proceso de instrumentalización al de instrumentación. [*Lo que está marcando (señala la altura de la curva) es lo que tienes que escribir, porque todas las curvas (recorre la curva con el puntero) suben a 6 y bajan a -6 y todas van a seguir iguales en 6, que te va a dar el mismo resultado y no va a cambiar*]. Infiere una conclusión, mediante la construcción de un concepto en acción, puesto que éstos se construyen en estrecha relación con los teoremas en acción.

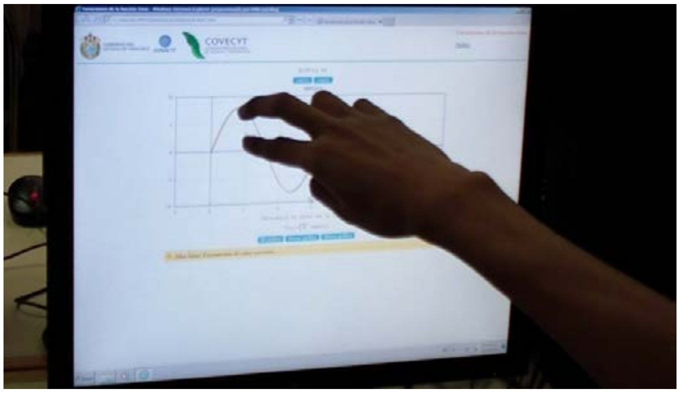

FIGURA 3. El estudiante B, señala la altura de la curva. Infiriendo una conclusión, mediante la construcción de un concepto en acción.

En la actividad dos observamos que B conjetura, usando los esquemas 2 y 3 [*con 5 ya hay más curvas, con 6, 7, 8, aumentan las curvas, ahora con 9 coincide, con valores más grandes, se va cerrando más la gráfica y va dibujando más curvas y con valores más chicos se va abriendo más*], al elaborar un teorema en acción (parámetro frecuencia), donde utiliza los invariantes operatorios del tipo argumento (30:06 min).

Respecto a la actividad 4, B escribe el número dos [*la curva va de 2 a 4* (señala con el puntero)], observamos que emplea el esquema 1, comenta [*es tres, donde empieza a subir y a bajar la gráfica*], establece su teorema en acción (parámetro desplazamiento vertical) [*tienes que escribir el número donde empieza la curva*], al emplear el esquema 3, infiriendo sobre los casos particulares (16:05 min).

Referente a la actividad 5, B analiza con el esquema 2 [*con el 5, se separa mucho, ahora con un valor mayor para que suba, el doble 10, si quedo, es que ahorita la hice mal, porque es la mitad* (señala, con el puntero)], genera otra curva [*debe ser -6 porque es la mitad*] construye un concepto en acción (parámetro desplazamiento vertical) y posteriormente un teorema en acción (parámetro desplazamiento vertical), ubicándose en el esquema 3 [*el número es la mitad de la gráfica*] (35:18 min).

Por último, en la actividad seis, observamos que B utiliza el esquema dos para construir un concepto en acción (parámetros altura y desplazamiento) [*el primer parámetro es1 y el segundo 2, cambio solo el segundo a 4, ahora con 3 y 3, porque aquí (señala la curva naranja) está muy baja, ahora 11 en el primero porque la curva llega arriba de 10, en el segundo es -6, no -2 para que baje, con 1 en el segundo, casi se iguala, pero ahora el primer valor debe ser menor, con 9 en el primero y dos en el segundo, es la correcta. La suma de los parámetros tiene que dar 11, porque la curva llega un poco más arriba de 10*]. Emite un teorema en acción (parámetros altura y desplazamiento) [*tiene que ser una resta, de los dos valores, para el primer parámetro, que es hasta donde sube la curva, para el segundo parámetro es una suma, pero fijándote en los signos*], empleando el esquema 4, que interrelaciona los parámetros, al evocar, los efectos individuales que proporciona cada uno en la gráfica (19:21 min).

V. CONCLUSIONES

El conjunto de esquemas construidos para analizar las interacciones de los estudiantes con el ambiente virtual y las ADeL, así como los conceptos y teoremas en acción que construyó el estudiante, permitieron obtener respuestas que documentan como construye el concepto de parámetro (altura, fase, frecuencia y desplazamiento) en las funciones trigonométricas.

El análisis cognitivo de lo conjeturado y argumentado por los estudiantes evidenció el proceso por el cual transitan, para construir las afirmaciones que emergieron durante el proceso de génesis instrumental. Se habla entonces de los conceptos y teoremas en acción que el estudiante determinó a partir de la comprensión de las diferentes proposiciones construidas durante la concatenación de las actividades en la acción, y que son dirigidas hacia el objeto matemático.

Los esquemas construidos, nos han permitido: documentar las acciones generadas por los alumnos, sus anticipaciones, sus argumentos, descubrimientos y las inferencias resultantes en la forma de conceptos y teoremas en acción. Así mismo pudimos revisar la eficiencia que conllevan los esquemas, cuando los estudiantes gesticulaban o emitían conclusiones ya sea verbales o con señalamientos de sus razonamientos. Puesto que, como menciona Vergnaud [14], los esquemas son frecuentemente eficaces, pero no efectivos; esto es, les falta la propiedad de lograr con seguridad el fin en un número finito de pasos.

Los invariantes operatorios contenidos en los esquemas, tanto de los tipos funciones proposicionales, proposiciones y argumentos fueron dirigiendo la construcción de los conceptos en acción; objetivos de las clases de situaciones (ADeL) como los parámetros altura, frecuencia, fase, desplazamiento vertical, y combinaciones de ellos.

Así también, nos percatamos que todos los estudiantes construyeron conceptos y teoremas en acción, pero en diferentes tiempos, algunos necesitaron mayor tiempo de exploración. Por lo que respecta al lenguaje matemático en los alumnos de secundaria es limitado. Sin embargo, estos jóvenes buscaron darse a entender señalando tanto con sus manos como con el puntero del ratón los comportamientos del parámetro en la gráfica.

Implementamos las ADeL en el referente de la instrumentación computacional predominando las relaciones entre el aprendizaje técnico y conceptual, por lo que la actividad técnica contenida preferentemente en el esquema 1, fue la base de la conceptualización en la construcción de los esquemas subsecuentes: 2, 3 y 4. Constatando así el valor pragmático de las técnicas, que les permite que produzcan resultados y el valor epistémico, referido a la comprensión de los objetos y a la posibilidad de nuevas preguntas [2].

VI. REFERENCIAS

[1] Ruiz, E., *La tecnología en el aula de clases: De las calculadoras graficadoras a los ambientes virtuales de aprendizaje*, Latin American Journal of Physics Education **2**, 345-354 (2014).

[2] Artigue, M., *Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work*, International Journal of Computers for Mathematical Learning **7**, 245-274 (2002).

[3] Trouche, L. y Drijvers, P., *Webbing and orchestration. Two interrelated views on digital tools in mathematics education*, Teaching Mathematics and Aplications **33**, 193-209 (2014).

[4] García, R. y Sánchez, D., *La enseñanza de conceptos físicos en secundaria: diseño de secuencias didácticas que incorporan diversos tipos de actividades*, Latin American Journal of Physics Education **1**, 62-67 (2009).

[5] Kaufmann, H., *Virtual Environments for Mathematics and Geometry Education*, Publishing History: In Themes in Science and Technology **2**, 131-152 (2009).

[6] Balacheff, N., *Knowledge*, *the keystone* of *TEL design* (Les Cahiers Leibniz No. 127). (Laboratoire Leibniz-IMAG, Grenoble, Francia, 2005).

[7] Secretaría de Educación Pública (SEP), *Resultados prueba enlace Distriro Federal, Básica,* (2012). Recuperado 25 septiembre de 2014 de: www.enlace.sep.gob.mx/content/gr/docs/2011/ENLACE2011-versionFinalSep.pdf.

[8] Escudero, C., *Una mirada alternativa acerca del residuo cognitivo cuando se introducen nuevas tecnologías. El caso de la resolución de problemas en ciencias*, Revista Electrónica Teoría de la Educación. Educación y Cultura en la Sociedad de la Información **10**, 272-292 (2009). Recuperado 22 de septiembre de 2014 de: http://campus.usal.es/~teoriaeducacion/rev_numero_10_01/n10_01_escudero.pdf.

[9] Verillon P. y Rabardel, P., *Cognition and Artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity*, European Journal of Psychology of Education **10**, 77-103 (1995).

[10] Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M.A., Ainley, J., Adresen, M., Cheung, Y., Meagher, M., Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectivas. En C. Hoyles y J.B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. The 17thICMI Study* (Vol. 13, pp. 89-132). London: Springer. Doi:10.1007/978/-1-4419-0146-0_7, (2010).

[11] Vergnaud, G., *Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica*, *Perspectivas* **26**, 195-207 (1996).

[12] Trouche, L., Calculators in mathematics education: a rapid evolution of tools with differential effects. En D. Guin, K. Ruthven, y L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of Symbolic Calculators: turning a computational device into a mathematical instrument*, (Springer Verlag, New York, 2005), pp. 9-40.

[13] Vergnaud, G., *In what sense the conceptual fields theory might help us to facilitate meaningful learning?* Investigações em Ensino de Ciências **12**, 285-302 (2007) Recuperado 15 de marzo de 2011 de: http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID172/v12_n2_a2007.pdf.

[14] Vergnaud. G., *La théorie des champs conceptuels*, Récherches en Didactique des Mathématiques **10**, 133-170 (1990).