**Revista Integración, temas de matemáticas**
*Escuela de Matemáticas*
*Universidad Industrial de Santander*
*Vol. 35, No. 2, 2017, pág. 163–187*

*DOI:http://dx.doi.org/10.18273/revint.v35n2-2017003*

# El teorema de Dirichlet sobre $\mathbb{F}_q[t]$

Harold Gamero[a], Jaider Blanco[b*], Gabriel Vergara[a]

[a] Universidad del Atlántico, Facultad de Ciencias Básicas, Barranquilla, Colombia.

[b] Universidad del Norte, Departamento de Matemáticas y Estadística, Barranquilla, Colombia.

***Resumen.*** En este artículo se prueba la existencia de infinitos polinomios primos irreducibles unitarios sobre el cuerpo finito $\mathbb{F}_q$ según Pollack a través de caracteres y series-L.
***Palabras clave***: Caracteres, Series-L, fórmula de la inversión de Möbius.
***MSC2010***: 11C02, 11N32, 12E10, 12Y02.

## Theorem of Dirichlet on $\mathbb{F}_q[t]$

***Abstract.*** In this paper we prove the existence of infinite unit irreducible prime polynomials on the finite field $\mathbb{F}_q$ by Pollack through of characters and L-series
***Keywords***: Characters, Series-L, Möbius inversion formula.

## 1. Introducción

La progresión aritmética de números impares $1, 3, 5, \ldots, 2k+1, \ldots$, contiene infinitos números primos. Es natural preguntar si otras progresiones aritméticas tienen esta propiedad. Una progresión aritmética con el primer término $a$ y diferencia común $m$ consiste de todos los números de la forma

$$a + mk, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \ . \tag{1}$$

Si $a$ y $m$ tienen un factor común $d$, cada término de la progresión es divisible por $d$ y no puede haber más de un primo en la progresión si $d > 1$. En otras palabras, una condición necesaria para la existencia de infinitos números primos en la progresión aritmética (1) es que $(a, m) = 1$. *Johann P. G. L. Dirichlet* fue el primero en probar que esta condición es también suficiente. Esto es, si $m > 0$ y $a$ son enteros con $(a, m) = 1$, entonces hay un número infinito de primos $p$ en la progresión aritmética (1), es decir, un número infinito de primos $p$ con $p \equiv a$ mód $m$. Este resultado es conocido como el teorema de *Dirichlet*.

*E-mail: jaiderblanco2017@gmail.com
Recibido: 29 de junio del 2017, Aceptado: 29 de noviembre del 2017.
Para citar este artículo: H. Gamero, J. Blanco, G. Vergara, El teorema de Dirichlet sobre $\mathbb{F}_q[t]$, *Rev. Integr. temas mat.* 35 (2017), No. 2, 163–188.

De hecho, *Dirichlet* estableció que, en cierto sentido, los primos se distribuyen por igual en las progresiones. *Euler* probó la existencia de infinitos números primos mostrando que la serie $\sum_p p^{-1}$, extendida sobre todos los primos, diverge [4]. La idea de Dirichlet era probar una afirmación correspondiente cuando los primos están limitados a estar en la progresión dada (1). En una memoria famosa [3], publicada en 1837 realizó esta idea por ingeniosos métodos analíticos. En 1950, *Harold N. Shapiro* publicó una prueba elemental del teorema de *Dirichlet* [7]. Esta también la puede ver en [2]. La prueba de *Shapiro* realmente obtiene una estimación para $\sum_p \frac{\log p}{p}$ cuando $(a, m) = 1$, $m > 0$:

$$\sum_{\substack{p \equiv a \text{ mód } m \\ p \leqslant x}} \frac{\log p}{p} = \frac{1}{\varphi(m)} \log x + O(1).$$

El análogo del teorema de *Dirichlet* en el caso de un anillo polinomial sobre $\mathbb{F}_q$ fue, primero, probado en 1919 por *Heinrich Kornblum* [6, Capitulo 4]. La estructura de esta demostración es en gran parte la misma como en el caso clásico, y culmina con el análogo de la ecuación

$$\lim_{s \downarrow 1} \left( \sum_{p \equiv a \text{ mód } m} \frac{p^{-s}}{\log\left(\frac{1}{s-1}\right)} \right) = \frac{1}{\varphi(m)}. \tag{2}$$

Donde se puede ver que, en cierto sentido, los primos se distribuyen por igual en las progresiones.

Nuestro propósito es mostrar que la prueba de *Shapiro* y su estimación pueden ser adaptadas para el caso del anillo de polinomios $\mathbb{F}_q[t]$ (demostración basada a la mostrada por *Paul Pollack* en [5]). Es decir, probar que, dado un cuerpo finito $\mathbb{F}_q$ y polinomios $a, m \in \mathbb{F}_q[t]$ con $(a, m) = 1$, $m \neq 0$, se tiene

$$\sum_{\substack{\pi \equiv a \text{ mód } m \\ deg \pi \leqslant n}} \frac{\log |\pi|}{|\pi|} = \frac{1}{\varphi(m)} \log(q^n) + O(1), \text{ para } n \geqslant 0.$$

El argumento de *Shapiro* puede ser considerado ligeramente más elemental, comparado con el de *Kornblum*, pues las series $L$ que se necesitan son sumas finitas.

Para ello, se estudiaron las funciones aritméticas definidas sobre el monoide $M(q;t)$. En particular, se usaron los análogos en $M(q;t)$ de la función de *von Mangoldt* y de la función de *Möbius* conocidos en $\mathbb{Z}$. Empleamos las propiedades de los caracteres de grupos abelianos finitos (caracteres de *Dirichlet* módulo $m(t)$) y sus relaciones de ortogonalidad en el estudio de la funciones $L$ o $L$-funciones (llamadas series o funciones de *Dirichlet*), $L(s, \chi)$, asociadas con un carácter $\chi$ módulo $m(t)$. Se demuestra, usando un argumento bastante sencillo, uno de los pasos más difíciles de la prueba del teorema de Dirichlet: el poder establecer la no anulación de $L(\chi)$ para $\chi$ real no principal.

## 2. Preliminares

$\mathbb{F}_q$ denota a un cuerpo de característica $p$ y cardinal $q = p^k$, con $p$ un número entero primo y $k$ un número entero con $k \geqslant 1$. $P(q;T)$ denota el conjunto de los primos de $\mathbb{F}_q[t]$, es decir, de los polinomios irreducibles unitarios. $M(q;T)$ denota el monoide de los polinomios unitarios con coeficientes en $\mathbb{F}_q$.

**Proposición 2.1.** *El conjunto* $U(\mathbb{F}_q[t]/(m(t)))$*, con* $m(t) \in \mathbb{F}_q[t]$*, definido por*

$$U(\mathbb{F}_q[t]/(m(t))) = \{\hat{a} \in \mathbb{F}_q[t]/(m(t)) \mid (a,m) = 1\}$$

*es un grupo multiplicativo de orden* $\varphi(m(t))$*, donde* $\varphi$ *es la función de Euler para los polinomios. En particular, si* $m(t)$ *es un polinomio primo de grado* $k$*, entonces* $U(\mathbb{F}_q[t]/(m(t))) = (\mathbb{F}_q[t]/(m(t)))^*$*, los elementos no nulos de* $\mathbb{F}_q[t]/(m(t))$*, es un grupo multiplicativo de orden* $\varphi(m(t)) = q^k - 1$*.*

**Teorema 2.2** (Análogo del teorema de Euler). *Si* $(a,m) = 1$ *con* $m(t) \in M(q;t)$*, entonces*

$$a(t)^{\varphi(m(t))} \equiv 1 \text{ mód } m(t).$$

Véase la prueba en [1, Lección II, Sección 4] o en [6, Capítulo I].

Una consecuencia del teorema anterior es el siguiente:

**Corolario 2.3** (Análogo del teorema pequeño de Fermat). *Si* $p(t) \in P(q;t)$ *tiene grado* $d$ *y* $p(t) \nmid a(t)$*, entonces*

$$a(t)^{q^d-1} \equiv 1 \text{ mód } p(t).$$

**Definición 2.4.** Una función con valor complejo definida en el monoide $M(q;t)$ se llama una función aritmética. Una función aritmética $f \neq 0$ es multiplicativa si $f(mn) = f(m)f(n)$ siempre que $(m,n) = 1$, y es completamente multiplicativa si $f(mn) = f(m)f(n)$ para todo par $m, n \in M(q;t)$.

**Definición 2.5.** La función aritmética $I$ dada por

$$I(f) = \begin{cases} 1, & \text{si } f = 1, \\ 0, & \text{si } f \neq 1, \end{cases}$$

se llama la función identidad.

**Definición 2.6.** El análogo de la función de Möbius $\mu$ está definida por

$$\mu(f) = \begin{cases} 1, & \text{si } f = 1, \\ 0, & \text{si } \pi^2 | f \text{ para algún } \pi \in P(q;t), \\ (-1)^r, & \text{si } f = \pi_1\pi_2\cdots\pi_r, \text{ donde los } \pi_i \in P(q;t) \\ & \text{son mutuamente distintos.} \end{cases}$$

**Teorema 2.7.** *[1, Lección VII, Proposición 6 (a)], [2, Capítulo 2, Sección 2] La función de Möbius satisface la relación*

$$\sum_{d|f} \mu(d) = I(f).$$

**Teorema 2.8.** *La función de Möbius* $\mu$ *es multiplicativa.*

*Demostración.* Sean $a, b \in M(q;T)$, y escribamos $a = p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$ y $b = q_1^{\beta_1}\cdots q_s^{\beta_s}$ tales que $p_i, q_j \in P(q;T)$. Si $(a,b) = 1$, entonces los $p_i$ son distintos de los $q_j$. Si algunos de los $\alpha_i$ o de los $\beta_j$ es mayor que 1, entonces $a$ o $b$ tiene algún divisor cuadrado que también lo será de $ab$. Por lo tanto, $\mu(ab) = 0 = \mu(a)\mu(b)$. Por el contrario, si $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = \beta_1 = \cdots = \beta_s = 1$, entonces $\mu(a) = (-1)^r$, $\mu(b) = (-1)^s$ y $\mu(ab) = \mu(p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r} q_1^{\beta_1}\cdots q_s^{\beta_s}) = (-1)^{r+s}$. Por lo tanto, $\mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$. ☑

**Definición 2.9.** La norma $|\cdot|$ de un polinomio unitario de $\mathbb{F}_q[t]$ es una función $|\cdot| : M(q;t) \to \mathbb{N}$ tal que $|a(t)| = q^n$ con $n = \deg(a(t))$. Como tal, esta función tiene las siguientes propiedades:

(I). $|1| = 1$,

(II). si $p(t) \in P(q;t)$, entonces $|p(t)| > 1$, y

(III). $|a_1(t)a_2(t)| = |a_1(t)||a_2(t)|$ para $a_1(t), a_2(t) \in M(q;t)$.

**Proposición 2.10** (Fórmula de la inversión de Möbius). *Sean $f$ y $g$ dos funciones aritméticas. Suponga que para cada $a \in M(q;t)$ la función*

$$g(a) = \sum_{d|a} f(d)$$

*es multiplicativa. Entonces,*

$$f(a) = \sum_{d|a} \mu(d)g(a/d) = \sum_{d|a} g(d)\mu(a/d)$$

*y la función $f$ es multiplicativa.*

Véase la prueba en [1, Lección VII, Proposición 9] o en [2, Capítulo 2, Sección 7].

**Definición 2.11.** El análogo de la función de von Mangoldt está definida por

$$\Lambda(f) = \begin{cases} \log|\pi|, & \text{si } f = \pi^k, \text{ para algún } \pi \in P(q;t) \text{ y } k \geqslant 1, \\ 0, & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

Como $\Lambda(1) = 0$, esta función no es invertible y mucho menos multiplicativa.

**Definición 2.12.** Sea $G$ un grupo abeliano finito, denotado multiplicativamente. Un homomorfismo $f : G \to \mathbb{C}^*$ se llama un carácter de $G$ si $f$ tiene la propiedad multiplicativa

$$f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2)$$

para todo $g_1$, $g_2$ en $G$, y $f(1_G) = 1$, donde $1_G$ es el elemento unidad de $G$. El conjunto de todos los caracteres de $G$ se denota con $\widehat{G}$, esto es

$$\widehat{G} = \{f : G \to \mathbb{C}^* \mid f \text{ es un homomorfismo de grupos}\}.$$

Todo grupo admite, por lo menos, un carácter $f_o(g) := 1$, para todo $g \in G$. A este carácter se le llama principal. Si $f_1, f_2 \in \widehat{G}$, podemos definir una ley de composición interna sobre $\widehat{G}$, de la siguiente manera:

$$(f_1f_2)(g) := f_1(g)f_2(g) \tag{3}$$

para cualquier $g$ de $G$. Además, $f_of = ff_o = f$, para cualquier $f \in \widehat{G}$.

**Definición 2.13.** Sea $m \in \mathbb{F}_q[t]$ un polinomio no constante fijo. Sea $\chi' : (\mathbb{F}_q[t]/(m(t)))^* \to \mathbb{C}^*$ un homomorfismo. Dado $\chi'$, definamos $\chi : \mathbb{F}_q[t] \to \mathbb{C}^*$ de la siguiente forma:

$$\chi(f) = \begin{cases} 0, & \text{si } (f,m) \neq 1, \\ \chi'(\hat{f}), & \text{si } (f,m) = 1. \end{cases}$$

Las funciones $\chi$ definidas de esta manera son llamadas caracteres de *Dirichlet* módulo $m$. El carácter principal $\chi_o$ es el que tiene las propiedades:

$$\chi_o(f) = \begin{cases} 0, & \text{si } (f,m) \neq 1, \\ 1, & \text{si } (f,m) = 1. \end{cases}$$

**Definición 2.14.** Sea $m \in \mathbb{F}_q[t]$. Una función $\chi : \mathbb{F}_q[t] \to \mathbb{C}^*$ se llama un carácter multiplicativo módulo $m$ si para cada $a, b \in \mathbb{F}_q[t]$ se tiene:

(I). $\chi(a) = 0$, si $(a,m) \neq 1$.

(II). $\chi(1) \neq 0$.

(III). $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$.

(IV). $a \equiv b \bmod m$, entonces $\chi(a) = \chi(b)$.

Los caracteres de *Dirichlet* (que están definidos en $\mathbb{F}_q[t]$) inducen y están inducidos por elementos en el grupo de caracteres de $(\mathbb{F}_q[t]/(m(t)))^*$. Por consiguiente, hay exactamente $\varphi(m)$ caracteres de *Dirichlet* módulo $m(t)$. Los caracteres módulo $m(t)$ de un grupo abeliano finito satisfacen ciertas relaciones de ortogonalidad. Aquí tomamos $G = (\mathbb{F}_q[t]/(m(t)))^*$. Para nosotros, estas relaciones toman las siguientes formas:

**Lema 2.15.** *[1, Lección VII, Proposición 13] o en [2, Teorema 6.16]. Sean* $\chi_1, \cdots, \chi_{o(\widehat{G})}$ *caracteres de Dirichlet módulo* $m$ *(asumiendo* $\chi_1$ *como el carácter principal) y* $u, v \in \mathbb{F}_q[t]$ *con* $(v,m) = 1$. *Entonces,*

$$\frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi} \chi(u)\overline{\chi(v)} = \delta(u,v),$$

*donde*

$$\delta(u,v) = \begin{cases} 1, & \textit{si } u \equiv v \bmod m, \\ 0, & \textit{de otra manera.} \end{cases}$$

## 3. Teorema de Dirichlet en $\mathbb{F}_q[t]$, forma fuerte

Antes de proceder, introducimos un poco de notación: para $p \in \mathbb{F}_q[t]$ se define $\varphi(p)$ como el cardinal del grupo de unidades de $\mathbb{F}_q[t]/(p)$. De aquí en adelante, $\pi$ siempre denota un mónico irreducible de $\mathbb{F}_q[t]$, $d$, $f$ siempre denotan polinomios mónicos, $n$ siempre denota un entero no negativo. Las sumas de polinomios siempre se entiende que deben tomarse solo sobre polinomios mónicos. Con estos acuerdos, el principal resultado de este trabajo se puede expresar de la siguiente manera:

**Teorema 3.1.** *Sean $\mathbb{F}_q$ un cuerpo finito, $a, m \in \mathbb{F}_q[t]$ con $(a, m) = 1$ y $m \neq 0$. Entonces, para $n \geqslant 0$,*

$$\sum_{\substack{\pi \equiv a \bmod m \\ \deg \pi \leqslant n}} \frac{\log |\pi|}{|\pi|} = \frac{1}{\varphi(m)} \log(q^n) + O(1).$$

En primer lugar demostraremos un análogo de la estimación $\log[x]! = x \log x - x + O(\log x)$.

**Lema 3.2.** *Para $n \geqslant 0$,*

$$\sum_{\deg(f) \leqslant n} \log |f| = \frac{q^{n+1}}{q-1} \log(q^n) - \left(\frac{q}{q-1}\right)\left(\frac{q^n - 1}{q-1}\right) \log q.$$

*Demostración.* Sea $S := \sum_{\deg(f) \leqslant n} \log |f|$. Puesto que $|f| = q^{\deg(f)}$, entonces

$$\begin{aligned} S = \sum_{\deg(f) \leqslant n} \log |f| &= \sum_{\deg(f) \leqslant n} \deg(f) \log q \\ &= \sum_{k=0}^{n} k \log q \sum_{\deg(f) = k} 1, \end{aligned}$$

tomando $k = \deg(f)$. Puesto que $\sum_{\deg(f)=k} 1 = q^k$ para $f(t) \in \mathbb{F}_q[t]$, entonces

$$S = \sum_{k=0}^{n} k \log q \sum_{\deg(f)=k} 1 = \log q \sum_{k=0}^{n} k q^k;$$

por lo tanto,

$$S(1-q) = \left(\log q \sum_{k=0}^{n} k q^k\right)(1-q) = q \log q \left( - n q^n + \frac{q^n - 1}{q-1}\right),$$

pues $\sum_{k=1}^{n} q^k$ es una progresión geométrica. Entonces,

$$\begin{aligned} S &= -\frac{q \log q}{q-1}\left( - n q^n + \frac{q^n - 1}{q-1}\right) \\ &= \frac{q^{n+1}}{q-1} \log(q^n) - \left(\frac{q}{q-1}\right)\left(\frac{q^n - 1}{q-1}\right) \log q. \end{aligned}$$ ☑

También necesitaremos algunos resultados elementales sobre la distribución de primos en $\mathbb{F}_q[t]$. Estos serán consecuencias sencillas de los siguientes:

**Teorema 3.3** (Teorema del número primo para $\mathbb{F}_q[t]$). *Sea $\mathbb{F}_q$ un cuerpo finito. Sea $\nu_q(n)$ el número de polinomios primos (mónicos) de grado $n$ en $\mathbb{F}_q[t]$. Para $n \geqslant 1$, $\sum_{d|n} d\nu_q(d) = q^n$. Así,*

$$\nu_q(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} q^d \mu(n/d) = \frac{q^n}{n} + O\left(\frac{q^{n/2}}{n}\right).$$

*Demostración.* Consideremos la factorización prima de $t^{q^n}-t$ en $\mathbb{F}_q[t]$ y sea $\pi(t)$ un primo mónico de grado $d$. Si $d|n$, entonces

$$t^{q^d} \equiv t \text{ mód } \pi(t) \tag{4}$$

por el análogo del teorema pequeño de Fermat. Por consiguiente,

$$\pi(t)|(t^{q^{kd}}-t) = (t^{q^n}-t).$$

Recíprocamente, si $\pi(t)|(t^{q^n}-t)$, escogemos $\widehat{g(t)}$ como un generador del grupo multiplicativo $\left(\mathbb{F}_q[t]/(\pi(t))\right)^*$. Entonces, dado que, $t^{q^n} \equiv t$ mód $\pi(t)$, tenemos $t^{q^n} = t + h(t)\pi(t)$ con $h(t) \in \mathbb{F}_q[t]$. Si $g(t) = g_0 + g_1 t + \cdots + g_k t^k$, donde cada $g_i \in \mathbb{F}_q$, tenemos $g(t^{q^n}) \equiv g(t)$ mód $\pi(t)$. Por otro lado,

$$g(t^{q^n}) = g_0 + g_1 t^{q^n} + \cdots + g_k t^{kq^n}$$

y, además,

$$g(t)^{q^n} = g_0 + g_1 t^{q^n} + \cdots + g_k t^{kq^n},$$

puesto que $\mathbb{F}_q$ es un dominio de integridad con $q-1$ unidades y de característica $p$. Entonces,

$$g(t)^{q^n} = g(t^{q^n}) \equiv g(t) \text{ mód } \pi(t),$$

es decir, $\widehat{g(t)^{q^n}} = \widehat{g(t)}$. Como $\widehat{g(t)} \in \left(\mathbb{F}_q[t]/(\pi(t))\right)^*$, existe $\widehat{g(t)^{-1}} \in \left(\mathbb{F}_q[t]/(\pi(t))\right)^*$ tal que $\widehat{g(t)^{q^n-1}} = \widehat{1}$. Además, puesto que $o((\widehat{g(t)})) = q^d - 1$, entonces $q^d - 1 | q^n - 1$, lo que obliga a que $d|n$. Sea

$$t^{q^n} - t = \pi_1(t)\pi_2(t)\cdots\pi_k(t) \tag{5}$$

la factorización única de $t^{q^n}-t$ en polinomios mónicos irreducibles. Por lo que se probó anteriormente, cada irreducible mónico de grado divisor de $n$ debe ser o aparece como uno de los $\pi_i$, y cada $\pi_i$ es un irreducible mónico de grado divisor de $n$ (pues, $\pi_i | t^{q^n}-t$). Además, ningún $\pi_i$ aparece más de una vez. De esto, se deduce que

$$t^{q^n} - t = \prod_{\pi(t):\deg\pi|n} \pi(t).$$

Como

$$\begin{aligned} t^{q^n} - t &= \prod_{\pi(t):\deg\pi|n} \pi(t) \\ &= \underbrace{\left(\pi_{11}(t)\pi_{12}(t)\cdots\pi_{1k_1}(t)\right)}_{\substack{\deg\pi_{11}=\cdots=\deg\pi_{1k_1} \\ \deg\pi_{1i}|n}} \underbrace{\left(\pi_{21}(t)\pi_{22}(t)\cdots\pi_{2k_2}(t)\right)}_{\substack{\deg\pi_{21}=\cdots=\deg\pi_{2k_2} \\ \deg\pi_{2i}|n}} \cdots \underbrace{\left(\pi_{r1}(t)\pi_{r2}(t)\cdots\pi_{rk_r}(t)\right)}_{\substack{\deg\pi_{r1}=\cdots=\deg\pi_{rk_r} \\ \deg\pi_{ri}|n}}, \end{aligned}$$

entonces, comparando grados, se tiene

$$\begin{aligned} q^n &= k_1 \deg\pi_{1i}|_{\deg\pi_{1i}|n} + k_2 \deg\pi_{2i}|_{\deg\pi_{2i}|n} + \cdots + k_r \deg\pi_{ri}|_{\deg\pi_{ri}|n} \\ &= \nu_q(d)d|_{\substack{d=\deg\pi_{1i} \\ \deg\pi_{1i}|n}} + \nu_q(d)d|_{\substack{d=\deg\pi_{2i} \\ \deg\pi_{2i}|n}} + \cdots + \nu_q(d)d|_{\substack{d=\deg\pi_{ri} \\ \deg\pi_{ri}|n}} \\ &= \sum_{d|n} d\nu_q(d). \end{aligned}$$

La fórmula para $\nu_q(n)$ se sigue de la fórmula de la inversión de Möbius (Proposición 2.10), así: tomando $g(n) = q^n$ y $f(d) = d\nu_q(d)$, se tiene

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu(n/d),$$

entonces

$$n\nu_q(n) = \sum_{d|n} q^d \mu(n/d).$$

Por lo tanto, $\nu_q(n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{d|n} q^d\mu(n/d)$.

Por otro lado, veamos que

$$\sum_{d|n} q^d\mu(n/d) = q^n + O(q^{n/2} + nq^{n/3}). \tag{6}$$

Si $n = 1$, entonces $d = 1$. Por lo tanto,

$$\sum_{d|1} q^d\mu(1/d) = q\mu(1) = q.$$

Pero, $q = q + 0 = q + O(q^{1/2} + q^{1/3})$. Por consiguiente,

$$\sum_{d|n} q^d\mu(n/d) = q^n + O(q^{n/2} + nq^{n/3}), \text{ si } n = 1.$$

Si $n = 2$, entonces $d = 1$ o $d = 2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{d|2} q^d\mu(2/d) &= q\mu(2) + q^2\mu(1)\\ &= q(-1) + q^2\\ &= -q + q^2.\end{aligned}$$

Pero, $|-q| = q < q^{2/2} + 2q^{2/3}$. Es decir, $-q = O(q^{2/2} + 2q^{2/3})$. Entonces,

$$\sum_{d|n} q^d\mu(n/d) = q^n + O(q^{n/2} + nq^{n/3}), \text{ si } n = 2.$$

Si $n$ es un número primo $> 2$, entonces $d = 1$ o $d = n$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} q^d\mu(n/d) &= q\mu(n) + q^n\mu(1)\\ &= q(-1) + q^n\\ &= -q + q^n.\end{aligned}$$

Como $n > 2$, entonces $q^{n/2} > q$, pues $n/2 > 1$. Entonces, $|-q| = q < q^{n/2} < q^{n/2} + nq^{n/3}$. Es decir, $-q = O(q^{n/2} + nq^{n/3})$. Luego, (6) se verifica para un primo $n > 2$. Suponga que $n$ es un número con las siguientes formas: Si $n = 2t$, con $t = 2, 3, \cdots$, entonces,

$$\sum_{d|n} q^d\mu(n/d) = q^n\mu(1) + q^{n/2}\mu(2) + S,$$

donde

$$S := \sum_{\substack{d|n \\ d\leqslant n/4}} q^d \mu(n/d).$$

Por otro lado, como $d \leqslant \frac{n}{4} < \frac{n}{3}$, entonces $q^d < q^{n/3}$ y, además, $|\mu(n/d)| \leqslant 1$; por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{\substack{d|n \\ d\leqslant n/4}} q^d \mu(n/d) \right| &\leqslant \sum_{\substack{d|n \\ d\leqslant n/4}} q^d |\mu(n/d)| \\
&= q^{t_1}|\mu(n/t_1)| + q^{t_2}|\mu(n/t_2)| + \cdots + q^{t_r}|\mu(n/t_r)| + q^{n/4}|\mu(4)| \\
&< \underbrace{q^{n/3} + q^{n/3} + \cdots + q^{n/3}}_{r \text{ términos}} \\
&= rq^{n/3} \\
&< nq^{n/3},
\end{aligned}$$

donde $t_1, t_2, \cdots, t_r$ son los divisores de $n$ menores que $n/4$. Por lo tanto,

$$|-q^{n/2} + S| \leqslant q^{n/2} + |S| < q^{n/2} + nq^{n/3}.$$

Entonces,

$$\sum_{d|n} q^d \mu(n/d) = q^n + O(q^{n/2} + nq^{n/3}).$$

Si $n = 3t$, con $t = 2, 3, \cdots$, entonces,

$$\sum_{d|n} q^d \mu(n/d) = q^n \mu(1) + S,$$

donde

$$S := \sum_{\substack{d|n \\ d\leqslant n/3}} q^d \mu(n/d).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{\substack{d|n \\ d\leqslant n/3}} q^d \mu(n/d) \right| &\leqslant \sum_{\substack{d|n \\ d\leqslant n/3}} q^d |\mu(n/d)| \\
&= q^{t_1}|\mu(n/t_1)| + q^{t_2}|\mu(n/t_2)| + \cdots + q^{t_r}|\mu(n/t_r)| + q^{n/3}|\mu(3)| \\
&= q^{t_1} + q^{t_2} + \cdots + q^{t_r} + q^{n/3} \\
&< \underbrace{q^{n/3} + q^{n/3} + \cdots + q^{n/3}}_{r \text{ términos}} + q^{n/2} \\
&= q^{n/2} + rq^{n/3} \\
&< q^{n/2} + nq^{n/3},
\end{aligned}$$

donde $t_1, t_2, \cdots, t_r$ son los divisores de $n$ menores que $n/3$. Así, de esta forma, se verifica (6). Análogamente, (6) se verifica si $n = pt$, donde $p$ es un entero primo y $t \in \mathbb{Z}^+$. De acuerdo con lo anterior, (6) se cumple para $n \geqslant 1$.

De (6) se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} q^d \mu(n/d) &= q^n + O(q^{n/2} + nq^{n/3}) \\ &= q^n + O((1 + nq^{-n/6})q^{n/2}) \\ &= q^n + O(q^{n/2}),\end{aligned}$$

concluyendo así lo deseado. ☑

**Lema 3.4.** *Para cada $f$,*

$$\sum_{d|f} \Lambda(d) = \log|f|.$$

*También,*

$$\sum_{d|f} \mu(d) \log|d| = -\Lambda(f).$$

*Demostración.* Sea $f = \pi_1^{a_1}\pi_2^{a_2}\cdots\pi_k^{a_k}$ con $\pi_i$ primo, para $1 \leqslant i \leqslant k$. Entonces,

$$|f| = |\pi_1|^{a_1}|\pi_2|^{a_2}\cdots|\pi_k|^{a_k}.$$

Por lo tanto,

$$\log|f| = \sum_{i=1}^{k} a_i \log|\pi_i|. \tag{7}$$

Por otro lado, si $d \in \{\pi_1, \pi_1^2, \cdots, \pi_1^{a_1}, \pi_2, \pi_2^2, \cdots, \pi_2^{a_2}, \cdots, \pi_k, \pi_k^2, \cdots, \pi_k^{a_k}\}$, entonces $\Lambda(d) \neq 0$, por lo cual

$$\begin{aligned}\sum_{d|f} \Lambda(d) &= \Lambda(\pi_1) + \Lambda(\pi_1^2) + \cdots + \Lambda(\pi_1^{a_1}) + \Lambda(\pi_2) + \Lambda(\pi_2^2) + \cdots + \Lambda(\pi_2^{a_2}) + \cdots \\ &\quad + \Lambda(\pi_k) + \Lambda(\pi_k^2) + \cdots + \Lambda(\pi_k^{a_k}) \\ &= \underbrace{\log|\pi_1| + \cdots + \log|\pi_1|}_{a_1 \text{ términos}} + \underbrace{\log|\pi_2| + \cdots + \log|\pi_2|}_{a_2 \text{ términos}} + \cdots + \underbrace{\log|\pi_k| + \cdots + \log|\pi_k|}_{a_k \text{ términos}} \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_i \log|\pi_i| \\ &= \log|f|,\end{aligned}$$

debido a (7). La segunda afirmación se sigue por una generalización apropiada de la fórmula de la inversión de Möbius. Podemos dar una prueba directa de la siguiente manera:

Para evaluar el lado izquierdo es suficiente restringir la suma a divisores libres de cuadrados $d$. Expandiendo $\log|d|$ formalmente, tenemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{d|f}\mu(d)\log|d| \\
&= \log|\pi_1|\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{k-1}{j-1} + \log|\pi_2|\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{k-1}{j-1} + \cdots \\
&\quad + \log|\pi_k|\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{k-1}{j-1} \\
&= \sum_{\pi|f}\log|\pi|\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{k-1}{j-1},
\end{aligned}$$

donde $\pi$ son los divisores primos de $f$ distintos mutuamente, y $k$ es el número de divisores primos de $f$ distintos mutuamente. De esta manera,

$$\sum_{d|f}\mu(d)\log|d| = \sum_{\pi|f}\log|\pi|\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{k-1}{j-1}.$$

Nótese que para $k=0$, de modo que $f=1$, la suma de la derecha es vacía. Si $k=1$, entonces $f=\pi_1^{a_1}$, y el lado derecho se evalúa como $-\log|\pi_1|$. Si $k\geqslant 2$, la suma interior es igual a $-(1-1)^{k-1}=0$. Por lo tanto, en cualquier caso el resultado se demuestra. ☑

Del Teorema 3.3 podemos inferir lo siguiente:

**Afirmación 3.5.** La suma de los grados de todos los polinomios primos $\pi(t)$ en $\mathbb{F}_q[t]$ que dividen al entero positivo $r$ es $q^r$. Esto es,

$$\sum_{\deg(\pi(t))|r}\deg(\pi(t)) = q^r.$$

**Lema 3.6.** *Para* $n\geqslant 0$,

$$\psi(n) := \sum_{\deg f\leqslant n}\Lambda(f) = \left(\frac{q^{n+1}-q}{q-1}\right)\log q = O(q^n).$$

**Observación 3.7.** Esta es otra forma del teorema del número primo para $\mathbb{F}_q[t]$. Aquí tenemos una fórmula exacta y simple para esta suma.

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
\sum_{\deg f\leqslant n}\Lambda(f) &= \sum_{\substack{\deg f\leqslant n\\ f=\pi^k,\ k\geqslant 1}}\log|\pi| \\
&= \log q\sum_{\substack{k\,\deg\pi\leqslant n\\ k\geqslant 1}}\deg\pi,
\end{aligned}$$

pues $\deg \pi^k = k \deg \pi$. Si $r = k \deg \pi$ con $k \geqslant 1$, entonces $1 \leqslant \deg \pi \leqslant r \leqslant n$. Por lo tanto, por la Afirmación 3.5, tenemos

$$\begin{aligned}\psi(n) := \sum_{\deg f \leqslant n} \Lambda(f) &= \log q \sum_{\substack{k \deg \pi \leqslant n \\ k \geqslant 1}} \deg \pi \\ &= \log q \sum_{1 \leqslant r \leqslant n} \sum_{\deg \pi | r} \deg \pi \\ &= \log q \sum_{1 \leqslant r \leqslant n} q^r \\ &= \left( \frac{q^{n+1} - q}{q - 1} \right) \log q.\end{aligned}$$

Por otro lado, como $\log q < q - 1$, entonces

$$\left( \frac{q^{n+1} - q}{q - 1} \right) \log q < q^{n+1} - q < q^{n+1} = qq^n.$$

Es decir,

$$\left( \frac{q^{n+1} - q}{q - 1} \right) \log q = O(q^n).$$

Considerando los resultados anteriores, se sigue la igualdad deseada. ☑

**Lema 3.8.** *Para $n \geqslant 0$,*

$$\begin{aligned}\sum_{\deg f \leqslant n} \frac{\Lambda(f)}{|f|} &= \sum_{\deg \pi \leqslant n} \frac{\log |\pi|}{|\pi|} + \sum_{2 \deg \pi \leqslant n} \frac{\log |\pi|}{|\pi|^2} + \cdots \\ &= \sum_{\deg \pi \leqslant n} \frac{\log |\pi|}{|\pi|} + O(1).\end{aligned}$$

*También,*

$$\sum_{\deg \pi \leqslant n} \frac{\log |\pi|}{|\pi|} = \log(q^n) + O(1).$$

*Demostración.* La primera igualdad se sigue por la reordenación de la suma, al igual que cuando se prueba la afirmación análoga sobre $\mathbb{Z}$. De esta forma tenemos

$$\sum_{\deg f \leqslant n} \frac{\Lambda(f)}{|f|} = \sum_{k \geqslant 1} \sum_{k \deg \pi \leqslant n} \frac{\log |\pi|}{|\pi|^k}.$$

Entonces,

$$\sum_{\deg f \leqslant n} \frac{\Lambda(f)}{|f|} - \sum_{\deg \pi \leqslant n} \frac{\log |\pi|}{|\pi|} = \sum_{2 \deg \pi \leqslant n} \frac{\log |\pi|}{|\pi|^2} + \sum_{3 \deg \pi \leqslant n} \frac{\log |\pi|}{|\pi|^3} + \cdots$$

Por otro lado, si $r = \deg \pi$, tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant 2}\sum_{2\deg\pi\leqslant n}\frac{\log|\pi|}{|\pi|^k} &= \sum_{k\geqslant 2}\sum_{2r\leqslant n}\frac{r\log q}{q^{kr}}\\ &= \sum_{2r\leqslant n} r\log q\sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{q^{rk}}\\ &= \sum_{2\deg\pi\leqslant n}\log|\pi|\sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{|\pi|^k}\\ &= \sum_{2\deg\pi\leqslant n}\frac{\log|\pi|}{|\pi|(|\pi|-1)}.\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\sum_{k\geqslant 2}\sum_{2\deg\pi\leqslant n}\frac{\log|\pi|}{|\pi|^k} = \sum_{2\deg\pi\leqslant n}\frac{\log|\pi|}{|\pi|(|\pi|-1)}. \tag{8}$$

Por otro lado, nótese que para $k \geqslant 2$, se tiene

$$\sum_{kr\leqslant n}\frac{r}{q^{kr}} \leqslant \sum_{2r\leqslant n}\frac{r}{q^{kr}}.$$

Entonces, multiplicando ambos lados de la desigualdad anterior por $\log q$, se tiene

$$\sum_{k\deg\pi\leqslant n}\frac{\log|\pi|}{|\pi|^k} \leqslant \sum_{2\deg\pi\leqslant n}\frac{\log|\pi|}{|\pi|^k}, \text{ para } k\geqslant 2.$$

Lo anterior implica que

$$\sum_{k\geqslant 2}\sum_{k\deg\pi\leqslant n}\frac{\log|\pi|}{|\pi|^k} \leqslant \sum_{k\geqslant 2}\sum_{2\deg\pi\leqslant n}\frac{\log|\pi|}{|\pi|^k}.$$

Luego, de (8), tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{\deg f\leqslant n}\frac{\Lambda(f)}{|f|} - \sum_{\deg\pi\leqslant n}\frac{\log|\pi|}{|\pi|} &\leqslant \sum_{k\geqslant 2}\sum_{2\deg\pi\leqslant n}\frac{\log|\pi|}{|\pi|^k}\\ &= \sum_{2\deg\pi\leqslant n}\frac{\log|\pi|}{|\pi|(|\pi|-1)}.\end{aligned}$$

También, $2q^k \leqslant q^{2k}$ para $k \geqslant 1$. Por consiguiente,

$$\frac{k\log q}{q^k(q^k-1)} \leqslant 2kq^{-2k}\log q, \text{ para } k\geqslant 1.$$

Si $k = \deg\pi$, tenemos

$$\frac{\log|\pi|}{|\pi|(|\pi|-1)} \leqslant 2kq^{-2k}\log q.$$

Como consecuencia,

$$\sum_{2\deg\pi\leqslant n}\frac{\log|\pi|}{|\pi|(|\pi|-1)}\leqslant 2\log q\sum_{2k\leqslant n}kq^{-k}.$$

Entonces,

$$\sum_{\deg f\leqslant n}\frac{\Lambda(f)}{|f|}-\sum_{\deg\pi\leqslant n}\frac{\log|\pi|}{|\pi|}\leqslant 2\log q\sum_{2k\leqslant n}kq^{-k}<2\log q\cdot M,$$

pues, existe $M>0$ tal que $\displaystyle\sum_{2k\leqslant n}kq^{-k}<M$. De aquí resulta

$$\sum_{\deg f\leqslant n}\frac{\Lambda(f)}{|f|}=\sum_{\deg\pi\leqslant n}\frac{\log|\pi|}{|\pi|}+O(1).$$

Finalmente, puesto que

$$\sum_{\deg f\leqslant k}\Lambda(f)=\sum_{\deg f\leqslant k-1}\Lambda(f)+\sum_{\deg f=k}\Lambda(f),$$

obtenemos,

$$\begin{aligned}\sum_{\deg f=k}\Lambda(f)&=\sum_{\deg f\leqslant k}\Lambda(f)-\sum_{\deg f\leqslant k-1}\Lambda(f)\\&=\psi(k)-\psi(k-1).\end{aligned}$$

De esta manera, se tiene

$$\sum_{\deg f\leqslant n}\frac{\Lambda(f)}{|f|}=\sum_{\deg f=1}^{n}q^{-\deg f}\sum_{\deg f=k}\Lambda(f)=\sum_{k=1}^{n}[\psi(k)-\psi(k-1)]q^{-k}.$$

De la prueba del Lema 3.6, $\psi(k)-\psi(k-1)=q^k\log q$, cuando $k\geqslant 1$; por tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{\deg f\leqslant n}\frac{\Lambda(f)}{|f|}&=\sum_{k=1}^{n}[\psi(k)-\psi(k-1)]q^{-k}\\&=\log q\sum_{k=1}^{n}1\\&=\log(q^n).\end{aligned}$$

Refiriéndonos a la primera parte del lema, tenemos

$$\sum_{\deg\pi\leqslant n}\frac{\log|\pi|}{|\pi|}=\log(q^n)+O(1).$$ ☑

**Definición 3.9.** Sea $s=\sigma+i\gamma$ un número complejo. Para un carácter no principal $\chi$ módulo $m(t)$, con $m(t)\in\mathbb{F}_q[t]$, definamos

$$L(s,\chi) = \sum_{f \in M(q;t)} \frac{\chi(f)}{|f|^s} \tag{9}$$

como la función $L$ asociada a $\chi$.

**Definición 3.10.** Para un carácter no principal $\chi$ módulo $m(t)$, con $m(t) \in \mathbb{F}_q[t]$, hagamos

$$L(\chi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\deg f = k} \frac{\chi(f)}{|f|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{q^k}, \tag{10}$$

donde $c_k = \sum_{\deg f = k} \chi(f)$.

Aparentemente, la suma anterior es infinita. Sin embargo, más adelante vamos a demostrar que cuando $k \geqslant \deg m$, $c_k = 0$, de manera que en la definición de $L(\chi)$ solo se necesita la suma hasta $k = \deg m - 1$.

**Proposición 3.11.** *Para cualquier carácter $\chi$ módulo $m$ sobre $\mathbb{F}_q[t]$, la serie*

$$L(s,\chi) = \sum_{f \in M(q;t)} \frac{\chi(f)}{|f|^s}$$

*es absolutamente convergente para $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 1$.*

*Demostración.* Tomemos $\sigma = \Re(s) > 1$. Como $|f| = q^k$, donde $k = \deg f$, y existen $q^k$ polinomios mónicos de grado $k$, tenemos, para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$, lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{\substack{f \in M(q;T) \\ \deg f = k}} \chi(f)|f|^{-s} \right| &\leqslant \sum_{\substack{f \in M(q;T) \\ \deg f = k}} |\chi(f)|f|^{-s}| \\
&= q^{-k\sigma} \sum_{\substack{f \in M(q;T) \\ \deg f = k}} |\chi(f)||q^{-ik\gamma}| \\
&= q^{-k\sigma} \sum_{\substack{f \in M(q;T) \\ \deg f = k}} 1 \\
&= q^{-k\sigma} q^k \\
&= q^{k(1-\sigma)}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\sum_{\deg f\leqslant r}|\chi(f)|f|^{-s}| &= \sum_{k=0}^{r}\sum_{\substack{f\in M(q;T)\\ k=\deg f}}|\chi(f)|f|^{-s}|\\ &= \sum_{k=0}^{r} q^{-k\sigma}\sum_{\substack{f\in M(q;T)\\ \deg f=k}}|\chi(f)|\\ &= \sum_{k=0}^{r} q^{-k\sigma}\sum_{\substack{f\in M(q;T)\\ \deg f=k}}1\\ &= \sum_{k=0}^{r} q^{k(1-\sigma)}\\ &= 1+\sum_{k=1}^{r} q^{k(1-\sigma)}\\ &= 1+q^{1-\sigma}\frac{(q^{r(1-\sigma)}-1)}{q^{1-\sigma}-1}\\ &= \frac{1-q^{(1-\sigma)(1+r)}}{1-q^{1-\sigma}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{\deg f\leqslant r}|\chi(f)|f|^{-s}|\to\frac{1}{1-q^{1-\sigma}},\ \text{cuando } r\to\infty. \qquad \boxtimes$$

Ahora podemos establecer la no anulación de $L(\chi)$ para $\chi$ real no principal. Considerando que la próxima afirmación es uno de los pasos más difíciles de la prueba del teorema de *Dirichlet* sobre $\mathbb{Z}$, aquí se trabaja un argumento bastante sencillo.

**Teorema 3.12.** *Si $\chi\neq\chi_o$ es un carácter de Dirichlet real módulo $m$, entonces $L(\chi)\neq 0$.*

*Demostración.* Definamos $F(f):=\sum_{d|f}\chi(d)$, la cual es una función multiplicativa, pues $\chi$ es una función multiplicativa. Ahora, como $\chi$ es real, tenemos: si $\chi(\pi)=0$, entonces $F(\pi^l)=\chi(1)=1$; si $\chi(\pi)=1$, entonces

$$\begin{aligned}F(\pi^l)=\sum_{d|\pi^l}\chi(d) &= \chi(1)+\chi(\pi)+\chi(\pi^2)+\cdots+\chi(\pi^l)\\ &= 1+l.\end{aligned}$$

Finalmente, sea $\chi(\pi)=-1$. Como

$$\begin{aligned}F(\pi^l)=\sum_{d|\pi^l}\chi(d) &= \chi(1)+\chi(\pi)+\chi(\pi^2)+\cdots+\chi(\pi^l)\\ &= 1+\sum_{i=0}^{l}(-1)^i,\end{aligned}$$

concluimos que

$$F(\pi^l) = \begin{cases} 0, & \text{si } l \text{ es impar,} \\ 1, & \text{si } l \text{ es par.} \end{cases}.$$

Por lo tanto, siempre se tiene $F(\pi^l) \geqslant 0$, con $F(\pi^l) \geqslant 1$ si $l$ es par. Consecuentemente, siempre se tiene $F(f) \geqslant 0$, y en particular, $F(f) \geqslant 1$ si $f$ es un cuadrado (es decir, $f$ es de la forma $\pi^{2i}$, con $i = 0, 1, \cdots$). Para un número natural $z$, definamos $S(z) := \sum_{\deg f \leqslant z} F(f)$. Entonces,

$$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{\deg f \leqslant z} F(f) \\ &\geqslant \sum_{\substack{\deg f \leqslant z \\ f = g^2}} F(f) \\ &= \sum_{2\deg g \leqslant z} F(g^2) \\ &\geqslant \sum_{\deg g \leqslant z/2} 1 \qquad (11) \\ &= \sum_{k \leqslant z/2} \sum_{k = \deg g} 1 = \sum_{0 \leqslant k \leqslant z/2} q^k. \end{aligned}$$

De donde tenemos que

$$S(z) \to \infty \text{ cuando } z \to \infty. \qquad (12)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{\deg f \leqslant z} F(f) = \sum_{\deg f \leqslant z} \sum_{d|f} \chi(d) \\ &= \sum_{\substack{d|f \\ \deg f = 0}} \chi(d) + \sum_{\substack{d|f \\ \deg f = 1}} \chi(d) + \cdots + \sum_{\substack{d|f \\ \deg f = z-1}} \chi(d) + \sum_{\substack{d|f \\ \deg f = z}} \chi(d) \\ &= \chi(d)|_{\deg d = 0} \sum_{\substack{d|f \\ 0 \leqslant \deg f \leqslant z}} 1 + \chi(d)|_{\deg d = 1} \sum_{\substack{d|f \\ 1 \leqslant \deg f \leqslant z}} 1 + \cdots \\ &\quad + \chi(d)|_{\deg d = z-1} \sum_{\substack{d|f \\ z-1 \leqslant \deg f \leqslant z}} 1 + \chi(d)|_{\deg d = z} \sum_{\substack{d|f \\ \deg f = z}} 1 \\ &= \chi(d)|_{\deg d = 0} \sum_{\substack{Ed = f \\ \deg E \leqslant z-0}} 1 + \chi(d)|_{\deg d = 1} \sum_{\substack{Ed = f \\ \deg E \leqslant z-1}} 1 + \cdots \\ &\quad + \chi(d)|_{\deg d = z-1} \sum_{\substack{Ed = f \\ \deg E \leqslant z-(z-1)}} 1 + \chi(d)|_{\deg d = z} \sum_{\substack{Ed = f \\ \deg E \leqslant z-z}} 1 \\ &= \sum_{\deg d \leqslant z} \chi(d) \sum_{\substack{Ed = f \\ \deg E \leqslant z - \deg d}} 1. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$S(z) = \sum_{\deg f \leqslant z} F(f) = \sum_{\deg d \leqslant z} \chi(d) \sum_{\substack{Ed=f \\ \deg E \leqslant z - \deg d}} 1.$$

Luego para $z \geqslant \deg m - 1$,

$$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{\deg d \leqslant z} \chi(d) \sum_{\substack{Ed=f \\ \deg E \leqslant z - \deg d}} 1 \\ &= \sum_{k=0}^{z} \sum_{k=\deg d} \chi(d) \sum_{l=0}^{z-k} \sum_{l=\deg E} 1 \\ &= \sum_{k=0}^{z} c_k \sum_{l=0}^{z-k} q^l \\ &= \sum_{k=0}^{\deg m - 1} c_k \left( \frac{q^{z-k+1} - 1}{q-1} \right) \\ &= \frac{q^{z+1}}{q-1} L(\chi) + c, \end{aligned}$$

donde $c = -\dfrac{1}{q-1} \displaystyle\sum_{k=0}^{\deg m - 1} c_k$ es constante. De esta manera, si $L(\chi) = 0$, $S(z) = c$ para $z \geqslant \deg m - 1$, contradiciendo lo probado en (12). Esta contradicción completa la prueba. ☑

Ahora, estamos listos para movernos a la parte principal del argumento: Estudiaremos las funciones $A_\chi(n) := \displaystyle\sum_{\deg f \leqslant n} \chi(f)\Lambda(f)/|f|$.

**Teorema 3.13.** *Para $n \geqslant 0$, $A_{\chi_o}(n) = \log(q^n) + O(1)$.*

*Demostración.* Nótese que, si $(g^k, m) = 1$, para $k \geqslant 1$, con $g$ y $m$ en $M(q;T)$, entonces $(g, m) = 1$. De lo anterior se tiene

$$\begin{aligned} A_{\chi_o}(n) &= \sum_{\substack{\deg f \leqslant n \\ (f,m)=1}} \frac{\Lambda(f)}{|f|} = \sum_{\substack{k \deg \pi \leqslant n \\ (\pi^k, m)=1}} \frac{\log|\pi|}{|\pi|^k} = \sum_{\substack{k \deg \pi \leqslant n \\ \pi \nmid m}} \frac{\log|\pi|}{|\pi|^k} \\ &= \sum_{\substack{\deg \pi \leqslant n \\ \pi \nmid m}} \frac{\log|\pi|}{|\pi|} + R(n), \end{aligned}$$

donde

$$R(n) := \sum_{\substack{2 \deg \pi \leqslant n \\ \pi \nmid m}} \frac{\log|\pi|}{|\pi|^2} + \sum_{\substack{3 \deg \pi \leqslant n \\ \pi \nmid m}} \frac{\log|\pi|}{|\pi|^3} + \cdots.$$

Por otro lado, como

$$\sum_{k\deg\pi\leqslant n}\frac{\log|\pi|}{|\pi|^k}=\sum_{\substack{k\deg\pi\leqslant n\\ \pi\mid m}}\frac{\log|\pi|}{|\pi|^k}+\sum_{\substack{k\deg\pi\leqslant n\\ \pi\nmid m}}\frac{\log|\pi|}{|\pi|^k}\geqslant\sum_{\substack{k\deg\pi\leqslant n\\ \pi\nmid m}}\frac{\log|\pi|}{|\pi|^k},$$

para $k\geqslant 2$, entonces

$$R(n)\leqslant\sum_{2\deg\pi\leqslant n}\frac{\log|\pi|}{|\pi|^2}+\sum_{3\deg\pi\leqslant n}\frac{\log|\pi|}{|\pi|^3}+\cdots$$

$$=\sum_{\deg f\leqslant n}\frac{\Lambda(f)}{|f|}-\sum_{\deg\pi\leqslant n}\frac{\log|\pi|}{|\pi|}\ll 1,$$

con la ayuda de la prueba del Lema 3.8. Por lo tanto,

$$A_{\chi_o}(n)=\sum_{\substack{\deg\pi\leqslant n\\ \pi\nmid m}}\frac{\log|\pi|}{|\pi|}+O(1)=\sum_{\deg\pi\leqslant n}\frac{\log|\pi|}{|\pi|}+O(1)=\log(q^n)+O(1),$$

por las propiedades de $O$-grande, y por el Lema 3.8. ☑

El resto de esta sección está dedicada a mostrar que para $\chi\neq\chi_o$, $A_\chi(n)=O(1)$. El Teorema 3.1 se seguirá de este resultado, del Teorema 3.13 y las relaciones de ortogonalidad.

**Lema 3.14.** *Sea $\chi$ un carácter no principal. Para $n\geqslant 0$,*

$$L(\chi)-\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{q^k}=O(q^{-n}).$$

*Demostración.* Como se demostró anteriormente, la función de la izquierda se anula para $k\geqslant\deg m$. También se anula para $n\geqslant\deg m-1$. Por otro lado, supóngase que $n\leqslant\deg m-2$. Nótese que

$$\left|L(\chi)-\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{q^k}\right|\leqslant\max_{0\leqslant l\leqslant\deg m-2}\left|L(\chi)-\sum_{k=0}^{l}\frac{c_k}{q^k}\right|.$$

Entonces,

$$\left|L(\chi)-\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{q^k}\right|\leqslant q^{\deg m-2}\max_{0\leqslant l\leqslant\deg m-2}\left|L(\chi)-\sum_{k=0}^{l}\frac{c_k}{q^k}\right|q^{-n},$$

concluyendo así el lema. ☑

**Lema 3.15.** *Sea $\chi$ un carácter no principal. Para $n\geqslant 0$,*

$$L(\chi)\sum_{\deg f\leqslant n}\frac{\chi(f)\Lambda(f)}{|f|}=O(1).$$

*Demostración.* Por el Lema 3.4,

$$\sum_{\deg f\leqslant n}\frac{\chi(f)\log|f|}{|f|}=\sum_{\deg f\leqslant n}\frac{\chi(f)}{|f|}\sum_{d|f}\Lambda(d).$$

Además,

$$\sum_{\deg f\leqslant n}\frac{\chi(f)}{|f|}\sum_{d|f}\Lambda(d)=\sum_{\deg d\leqslant n}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{|d|}\sum_{\deg E\leqslant n-\deg d}\frac{\chi(E)}{|E|},$$

puesto que, para $f=Ed$,

$$\sum_{\deg f\leqslant n}\frac{\chi(f)}{|f|}\sum_{d|f}\Lambda(d)=\sum_{\deg d\leqslant n}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{|d|}\sum_{\deg E\leqslant n-\deg d}\frac{\chi(E)}{|E|}. \tag{13}$$

Ahora, por el Lema 3.14,

$$\sum_{\deg E\leqslant n-\deg d}\frac{\chi(E)}{|E|}=L(\chi)-O(q^{\deg d-n}).$$

Por lo tanto,

$$\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{|d|}\sum_{\deg E\leqslant n-\deg d}\frac{\chi(E)}{|E|}=L(\chi)\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{|d|}-\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{|d|}O(q^{\deg d-n}).$$

Entonces,

$$\sum_{\deg d\leqslant n}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{|d|}\sum_{\deg E\leqslant n-\deg d}\frac{\chi(E)}{|E|}=L(\chi)\sum_{\deg d\leqslant n}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{|d|}+R(n),$$

donde $R(n):=-\displaystyle\sum_{\deg d\leqslant n}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{|d|}O(q^{\deg d-n})$. Nótese que

$$\left|-\sum_{\deg d\leqslant n}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{|d|}O(q^{\deg d-n})\right|\leqslant Mq^{-n}\sum_{\deg d\leqslant n}\Lambda(d),$$

para $M>0$. O sea, $R(n)=O(q^{-n}\sum_{\deg d\leqslant n}\Lambda(d))=O(q^{-n}q^n)=O(1)$, por Lema 3.6. Puesto que para $n\geqslant\deg m$, $c_k=0$, se sigue que

$$\sum_{\deg f\leqslant n}\frac{\chi(f)\log|f|}{|f|}=\log q\sum_{k=0}^{\deg m-1}\frac{k}{q^k}c_k=c,$$

donde $c$ es una constante. Entonces,

$$c=L(\chi)\sum_{\deg d\leqslant n}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{|d|}+O(1).$$

Luego,

$$L(\chi)\sum_{\deg d\leqslant n}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{|d|}=c-O(1)=O(1).$$ ☑

De lo anterior deducimos inmediatamente el

**Corolario 3.16.** *Si* $L(\chi) \neq 0$ *para el carácter no principal* $\chi$*, entonces* $A_\chi(n) = O(1)$.

**Lema 3.17.** *Sea* $\chi$ *un carácter no principal. Para* $n \geqslant 0$,

$$\log(q^n) + A_\chi(n) = L(\chi) \sum_{\deg f \leqslant n} \frac{\chi(f)\mu(f)}{|f|} \log \frac{q^n}{|f|} + O(1).$$

*En particular, si* $L(\chi) = 0$, $A_\chi(n) = -\log(q^n) + O(1)$.

*Demostración.* Evaluemos $\sum_{\deg f \leqslant n} \frac{\chi(f)}{|f|} \sum_{d|f} \mu(d) \log \frac{q^n}{|d|}$ de dos maneras diferentes. Nótese que, por Lema 3.4

$$\begin{aligned}\sum_{d|f} \mu(d) \log \frac{q^n}{|d|} &= \sum_{d|f} \mu(d) \log(q^n) - \sum_{d|f} \mu(d) \log |d| \\ &= \log(q^n) \sum_{d|f} \mu(d) + \Lambda(f).\end{aligned}$$

Por Teorema 2.7, se tiene

$$\sum_{d|f} \mu(d) \log \frac{q^n}{|d|} = \begin{cases} \log(q^n), & \text{si } f = 1, \\ \Lambda(f), & \text{si } f \neq 1 \ (f = \pi^r). \end{cases}$$

Luego, por un lado,

$$\sum_{\deg f \leqslant n} \frac{\chi(f)}{|f|} \sum_{d|f} \mu(d) \log \frac{q^n}{|d|} = \log(q^n) + \sum_{\deg f \leqslant n} \frac{\chi(f)}{|f|} \Lambda(f),$$

pues, $f = 1$ cuando $\deg f = 0$, y $f \neq 1$ cuando $0 < \deg f$. Por otro lado, invirtiendo el orden de la suma, tenemos

$$\sum_{\deg f \leqslant n} \frac{\chi(f)}{|f|} \sum_{d|f} \mu(d) \log \frac{q^n}{|d|} = \sum_{\deg d \leqslant n} \frac{\chi(d)\mu(d)}{|d|} \log \frac{q^n}{|d|} \sum_{\deg h \leqslant n - \deg d} \frac{\chi(h)}{|h|},$$

donde $f = hd$ (prueba análoga a (13)). Además, por Lema 3.14,

$$L(\chi) - \sum_{\deg h \leqslant n - \deg d} \frac{\chi(h)}{|h|} = O(q^{\deg d - n}).$$

Luego la expresión que está a la derecha se convierte en

$$\begin{aligned}&\sum_{\deg d \leqslant n} \frac{\chi(d)\mu(d)}{|d|} \log \frac{q^n}{|d|} \sum_{\deg h \leqslant n - \deg d} \frac{\chi(h)}{|h|} \\ &= L(\chi) \sum_{\deg d \leqslant n} \frac{\chi(d)\mu(d)}{|d|} \log \frac{q^n}{|d|} + R(n),\end{aligned}$$

donde $R(n) := -q^{-n} \sum_{\deg d \leqslant n} \frac{\chi(d)\mu(d)}{|d|} \log \frac{q^n}{|d|} O(q^{\deg d})$. Nótese que

$$\begin{aligned} |R(n)| &\leqslant Mq^{-n} \sum_{\deg d \leqslant n} \frac{(\log(q^n) - \log|d|)}{|d|} q^{\deg d} \\ &= Mq^{-n} \left[ \log(q^n) \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{\deg d \leqslant n} \log|d| \right], \end{aligned}$$

para $M > 0$. Después, expandiendo la progresión geométrica y restando la expresión obtenida en el Lema 3.2, vemos que

$$\begin{aligned} &\log(q^n) \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{\deg d \leqslant n} \log|d| \\ &= \log(q^n) \left[ 1 + \frac{q(q^n-1)}{q-1} \right] - \left[ \frac{q^{n+1}}{q-1} \log(q^n) - (\log q) \frac{q}{q-1} \cdot \frac{q^n-1}{q-1} \right] \\ &\leqslant 2(\log q) \log(q^n) + 2(\log q) q^n, \end{aligned}$$

puesto que $\frac{q}{q-1} \leqslant 2$ y $\frac{q^n-1}{q-1} \leqslant q^n$. Es decir,

$$\log(q^n) \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{\deg d \leqslant n} \log|d| \ll \log(q^n) + q^n \ll q^n.$$

Entonces, $R(n) = O(1)$, pues $|R(n)| \ll q^{-n} q^n = 1$. Comparando las dos expresiones obtenidas, tenemos

$$\log(q^n) + \sum_{\deg f \leqslant n} \frac{\chi(f)\Lambda(f)}{|f|} = L(\chi) \sum_{\deg d \leqslant n} \frac{\chi(d)\mu(d)}{|d|} \log \frac{q^n}{|d|} + O(1),$$

demostrando, así, el teorema. ☑

Juntando este resultado con el del Corolario 3.16, vemos que hemos demostrado el

**Lema 3.18.** *Sea $\chi$ un carácter no principal. Entonces, para $n \geqslant 0$*

$$A_\chi(n) = O(1) + \log(q^n) \begin{cases} 0, & \text{si } L(\chi) \neq 0, \\ -1, & \text{si } L(\chi) = 0. \end{cases}$$

*Demostración.* Del Lema 3.17 tenemos, para $n \geqslant 0$,

$$A_\chi(n) = L(\chi) \sum_{\deg f \leqslant n} \frac{\chi(f)\mu(f)}{|f|} \log \frac{q^n}{|f|} + O(1) - \log(q^n).$$

Si $L(\chi) = 0$, entonces $A_\chi(n) = O(1) + \log(q^n)(-1)$. Por otro lado, del Corolario 3.16 tenemos, si $L(\chi) \neq 0$,

$$A_\chi(n) = O(1) + \log(q^n)(0).$$

De esta forma concluimos la afirmación del lema. ☑

**Corolario 3.19** (No anulación de $L(\chi)$ para $\chi$ no real). *Si $\chi$ es un carácter que toma al menos un valor no real, $L(\chi) \neq 0$.*

*Demostración.* Por Lema 2.15, si $f \equiv 1 \bmod m$, entonces $\sum_\chi \chi(f) = \varphi(m)$. Además,

$$\begin{aligned}\sum_\chi A_\chi(n) &= A_{\chi_o}(n) + A_{\chi_1}(n) + \cdots + A_{\chi_{k-1}}(n) \\ &= \sum_{\deg f \leqslant n} \frac{\chi_o(f)\Lambda(f)}{|f|} + \sum_{\deg f \leqslant n} \frac{\chi_1(f)\Lambda(f)}{|f|} + \cdots + \sum_{\deg f \leqslant n} \frac{\chi_{k-1}(f)\Lambda(f)}{|f|},\end{aligned}$$

pues $G \cong \widehat{G}$, tomando $o(G) = k$. Entonces,

$$\left(\sum_\chi \chi(f)\right) \sum_{\substack{f \equiv 1 \bmod m \\ \deg f \leqslant n}} \frac{\Lambda(f)}{|f|} = \sum_\chi A_\chi(n).$$

Es decir,

$$\varphi(m) \sum_{\substack{f \equiv 1 \bmod m \\ \deg f \leqslant n}} \frac{\Lambda(f)}{|f|} = \sum_\chi A_\chi(n). \tag{14}$$

Por otro lado, del Teorema 3.13 y del Lema 3.18 tenemos

$$\begin{aligned}\sum_\chi A_\chi(n) &= A_{\chi_o}(n) + A_{\chi_1}(n) + \cdots + A_{\chi_{k-1}}(n) \\ &= \log(q^n) + O(1) - V\log(q^n) + \underbrace{O(1) + \cdots + O(1)}_{k-2 \text{ veces}} \\ &= (1-V)\log(q^n) + O(1),\end{aligned}$$

donde $V$ es el número de caracteres $\chi$ tales que $L(\chi) = 0$, es decir, $1 \leqslant V \leqslant k-1$. Nótese que $\log|\pi| = \deg\pi \log q > 0$, pues $\log q \geqslant \log 2$ y $\deg\pi \geqslant 1$. Entonces,

$$\sum_{\substack{f \equiv 1 \bmod m \\ \deg f \leqslant n}} \frac{\Lambda(f)}{|f|} \geqslant 0.$$

Puesto que el lado izquierdo de (14) es no negativo para todo $n$, debemos tener $V \leqslant 1$. Pero si $L(\chi_1) = 0$ para un carácter no real $\chi_1$, entonces $0 = \overline{L(\chi_1)} = L(\overline{\chi}_1)$. Dado que $\chi_1$ toma, al menos, un valor no real, $\chi_1 \neq \overline{\chi}_1$ y, por tanto, $V \geqslant 2$, hay al menos dos caracteres $\chi$ diferentes tales que $L(\chi) = 0$, contradiciendo lo anterior. ☑

Puesto que por el Corolario 3.19 y el Teorema 3.12, $L(\chi) \neq 0$ para cada $\chi$ no principal, el Corolario 3.16 implica el esperado

**Corolario 3.20.** *Si $\chi$ es un carácter no principal, $A_\chi(n) = O(1)$.*

*Demostración del Teorema 3.1.* Por Lema 2.15, Teorema 3.13, y Corolario 3.20, tenemos:

$$\varphi(m) \sum_{\substack{\deg f \leqslant n \\ f \equiv a \bmod m}} \frac{\Lambda(f)}{|f|} = \left( \sum_{\chi} \chi(f)\overline{\chi}(a) \right) \sum_{\substack{\deg f \leqslant n \\ f \equiv a \bmod m}} \frac{\Lambda(f)}{|f|}.$$

Como $G \cong \widehat{G}$, tomando $o(G) = k$, se tiene

$$\left( \sum_{\chi} \chi(f)\overline{\chi}(a) \right) \sum_{\substack{\deg f \leqslant n \\ f \equiv a \bmod m}} \frac{\Lambda(f)}{|f|} = \sum_{\chi} \overline{\chi}(a) A_{\chi}(n).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{\chi} \overline{\chi}(a) A_{\chi}(n) &= \overline{\chi}_o(a) A_{\chi_o}(n) + \overline{\chi}_1(a) A_{\chi_1}(n) + \cdots + \overline{\chi}_{k-1}(a) A_{\chi_{k-1}}(n) \\ &= \overline{\chi}_o(a) \log(q^n) + \overline{\chi}_o(a) O(1) + \overline{\chi}_1(a) O(1) + \cdots + \overline{\chi}_{k-1}(a) O(1) \\ &= \overline{\chi}_o(a) \log(q^n) + O(1) \\ &= \log(q^n) + O(1), \end{aligned}$$

pues $(a, m) = 1$. Por lo tanto,

$$\varphi(m) \sum_{\substack{\deg f \leqslant n \\ f \equiv a \bmod m}} \frac{\Lambda(f)}{|f|} = \sum_{\chi} \overline{\chi}(a) A_{\chi}(n) = \log(q^n) + O(1).$$

Ahora,

$$\sum_{\substack{\deg f \leqslant n \\ f \equiv a \bmod m}} \frac{\Lambda(f)}{|f|} = \sum_{\substack{k \deg \pi \leqslant n \\ \pi^k \equiv a \bmod m}} \frac{\log|\pi|}{|\pi|^k} = \sum_{\substack{\deg \pi \leqslant n \\ \pi \equiv a \bmod m}} \frac{\log|\pi|}{|\pi|} + R(n),$$

donde

$$R(n) := \sum_{\substack{2 \deg \pi \leqslant n \\ \pi^2 \equiv a \bmod m}} \frac{\log|\pi|}{|\pi|^2} + \sum_{\substack{3 \deg \pi \leqslant n \\ \pi^3 \equiv a \bmod m}} \frac{\log|\pi|}{|\pi|^3} + \cdots$$

Como

$$\begin{aligned} \sum_{\deg f \leqslant n} \frac{\Lambda(f)}{|f|} &= \sum_{k \deg \pi \leqslant n} \frac{\log|\pi|}{|\pi|^k} \\ &= \sum_{\deg \pi \leqslant n} \frac{\log|\pi|}{|\pi|} + R(n) + \sum_{\substack{2 \deg \pi \leqslant n \\ \pi^2 \not\equiv a \bmod m}} \frac{\log|\pi|}{|\pi|^2} + \sum_{\substack{3 \deg \pi \leqslant n \\ \pi^3 \not\equiv a \bmod m}} \frac{\log|\pi|}{|\pi|^3} + \cdots \\ &\geqslant \sum_{\deg \pi \leqslant n} \frac{\log|\pi|}{|\pi|} + R(n), \end{aligned}$$

entonces

$$\sum_{\deg f \leqslant n} \frac{\Lambda(f)}{|f|} - \sum_{\deg \pi \leqslant n} \frac{\log|\pi|}{|\pi|} \geqslant R(n) \geqslant 0.$$

Por consiguiente,

$$R(n) = O\left( \sum_{\deg f \leqslant n} \frac{\Lambda(f)}{|f|} - \sum_{\deg \pi \leqslant n} \frac{\log|\pi|}{|\pi|} \right).$$

Por tanto, como $m \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi(m)} \log(q^n) + O(1) &= \frac{1}{\varphi(m)} \log(q^n) + \frac{1}{\varphi(m)} O(1) \\ &= \sum_{\substack{\deg f \leqslant n \\ f \equiv a \bmod m}} \frac{\Lambda(f)}{|f|} \\ &= \sum_{\substack{\deg \pi \leqslant n \\ \pi \equiv a \bmod m}} \frac{\log|\pi|}{|\pi|} + O\left( \sum_{\deg f \leqslant n} \frac{\Lambda(f)}{|f|} - \sum_{\deg \pi \leqslant n} \frac{\log|\pi|}{|\pi|} \right) \\ &= \sum_{\substack{\deg \pi \leqslant n \\ \pi \equiv a \bmod m}} \frac{\log|\pi|}{|\pi|} + O(1), \end{aligned}$$

por Lema 3.8. Reorganizando, resulta el teorema. ☑

## Referencias


[1] Albis V.S., *Lecciones sobre la Aritmética de Polinomios*, Policopiado, Universidad Nacional de Colombia, 2002.

[2] Apostol T.M., *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[3] Dirichlet P.G.L., "Beweis des Satzes dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschlaftichen Factor sind unendliche viele Primzahlen enthglt", *Abhand. Ak. Wiss. Berlin*, 1 (1837), 45–81, [Werke, 1: 315–342].

[4] Ireland K. and Rosen M., *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[5] Pollack P., *An Elementary Proof of Dirichlet's Theorem in the Polynomial Setting*, Preimpreso.

[6] Rosen M., *Number Theory in Function Fields*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[7] Shapiro H.N.,"On primes in Arithmetic progression II", *Ann. of Math. (2)* 52 (1950), No. 1, 231–243.