Arte y Ciencia: Proporción de los dedos de la mano

Alejandro González y Hernández[1], María del Pilar Molina Alvarez[2]

[1]*Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, México D. F., México.*

[2]*Escuela Nacional Preparatoria, Planteles 5 y 8, Universidad Nacional Autónoma de México, D.F., México*

E-mail: agh@ciencias.unam.mx

(Recibido el 3 de febrero de 2017, aceptado el 4 de marzo de 2017)

Resumen

En este trabajo presentamos un interesante ejemplo para entender la proporcionalidad entre dos variables. Nuestro ejemplo consistió en estudiar la relación que existe entre la longitud de los dedos de la mano con sus falanges con el propósito de encontrar la llamada "proporción aurea" entre estas longitudes. Para ello, se trabajó con las fotografías de las manos derechas de varios estudiantes, midiendo las longitudes de sus dedos y sus respectivas falanges. Ambas mediciones se graficaron obteniéndose buenas relaciones de proporcionalidad con coeficientes de correlación del orden $R^2 = 0.999$. La proporcionalidad aurea solo se encontró para el dedo meñique, con un error máximo del 11%. Para los otros dedos no se pudo encontrar esta proporcionalidad.

Palabras clave: Proporcionalidad, arte, ciencia.

Abstract

This work has the purpose of presenting an interesting example to understand the concept of proportionality between two variables. Our example lies in the relationship of the length of each finger with its respective phalanges in order to find the so called "golden ratio". We worked on photographs of several students' right hands measuring the lengths of their fingers and phalanges. Both measurements were graphically related and we obtained good linear ratio with correlation coefficient of $R^2 = 0.999$. We found the golden ratio only in the case of the little finger with a maximum error of 11%. We were not able to find this ratio in the case of the others fingers.

Keywords: Proportionality, art, science.

PACS: 01.40E-, 01.30 L-, 01.40 Fk **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

El concepto de la proporcionalidad entre dos cantidades dadas aparece tan frecuentemente en la naturaleza que las primeras civilizaciones ya se enfrentaron desde un principio con la aplicación práctica de este este concepto. En el arte rupestre el ser humano deja vestigios de su conciencia de sí mismo y su pensamiento en las pinturas en las cuevas, que son testimonio de su propia identidad y del conocimiento de su entorno. Entre ellas, las pinturas de figuras humanas y particularmente de las manos como herramienta de creación, son expresiones de modificación de su mundo que muestran ya el concepto de proporción del ser humano prehistórico. En la Cueva de las Manos en la Patagonia, Argentina, durante varias generaciones, el hombre prehistórico dejó la pintura de sus manos en las paredes de la entrada de la cueva (figura 1), como prueba de reconocimiento de sí mismo. Este trabajo artístico, de pintura de siluetas de las manos, bajo la técnica del soplado a través de tubos de hueso para el esparcimiento de la pintura pulverizada, ha sido fechado por el carbono 14 entre 13,000 y 9,500 años atrás.

Estas pictografías en la roca hechas con pigmentos de distintas mezclas que van desde el negro hasta el blanco pasando por una amplia gama de rojos ocre, naranjas y amarillos.

FIGURA 1. Manos humanas prehistóricas en la cueva de las manos en la Patagonia, Argentina [1].

Un examen más detallado de las manos pintadas, deja claro, a simple vista, que son manos humanas, debido a sus proporciones, que son semejantes a nuestras propias manos.

La aplicación de prácticas en actividades estéticas y artísticas de fotografía permite que el joven se aproxime desde la historia del arte a los modos de medición del cuerpo como es el caso de la mano, el pie, la palma, la brazada, el torso, la cabeza, etc., que han sido usadas en diversas culturas del mundo como base de la conciencia individual y colectiva [3].

En esta aventura milenaria de representación de las partes del cuerpo, el ser humano va construyendo formas más complejas de relaciones de comparación y medición entre ellas, que va creado en él, una conciencia artística, mística y científica de sí mismo, desarrollando un pensamiento físico-matemático que extrapola al entorno que lo rodea, pues le permite la aplicación de estos sistemas de medida en la arquitectura, el diseño, el arte y la ciencia.

La proporción entre las partes de las manos humanas aparece de manera natural en el arte rupestre como una consecuencia de las diferentes proporciones que existen en el cuerpo humano. En la antigüedad, pronto aparece la proporción aurea como un sistema que se consideró en la antigüedad base de la belleza y perfección y de otros valores estéticos de la naturaleza, que llevan al ser humano a apreciar lo armónico o agradable [4], con plena conciencia del uso y estudio del pensamiento abstracto (numérico y matemático) en el arte y la ciencia, como más tarde lo mostraron Leonardo da Vinci, Luca Paccioli y Durero.

Al elaborar el concepto de proporción en la pintura, la escultura, la fotografía y la ciencia, el ser humano desarrolló una matemática que permitió hacer consiente la estructura de la imagen con su percepción. Esta matemática fue la geometría donde el sujeto, los objetos, o el espacio vacío, adquieren forma para lograr una lectura sencilla, clara y agradable del mensaje visual buscado, sea artístico o no.

El concepto de proporcionalidad implica reconocer otros conceptos, como medida, tamaño, crecimiento, repetición o simetría, que lleva a la elaboración de la composición con base a la geometría, regular e irregular, que solo en su elaboración y variación permite apreciar la creación [5].

La creación en la pintura, la escultura, la fotografía y la ciencia, tiene que ver con la percepción del fenómeno físico de la luz, las sombras y el color, su composición, a través de la geometría y su relación con el sujeto, el objeto, o el elemento observado y la variación que se presenta con estos elementos, según nuestra propia percepción.

Al considerar un contexto educativo actual, nos propusimos recrear esta evolución del pensamiento del ser humano sobre la proporcionalidad y sus implicaciones bajo un enfoque moderno, con estudiantes de bachillerato y de licenciatura científica.

La experiencia que aquí presentamos, se llevó a cabo con estudiantes del curso de fotografía de la ENP-UNAM, Plantel 5 y 8, y del curso de Técnicas Experimentales de la licenciatura de Ciencias de la Tierra en la FC-UNAM, se empezó con la construcción del concepto de proporción a partir de una actividad que parte de la observación y apreciación de las manos de los propios estudiantes, que les permitió reconocer el crecimiento proporcionado o armónico, como una constante independiente del tamaño o medida de la persona.

En el curso de fotografía se buscó que los estudiantes apreciaran el concepto de proporcionalidad a través de trabajar con sus propias manos, pintando sus palmas y fotografiándolas), en la propuesta de su propia versión artística de la proporcionalidad (cómo en la antigüedad en el arte rupestre. Las fotografías se realizaron sobre un fondo de cuadrícula milimétrica, para su estudio geométrico posterior (Figura 2).

FIGURA 2. Composición de luz y color en la mano.

En el curso de Técnicas Experimentales, los estudiantes deberán de reconocer el concepto de proporcionalidad que aparece en las diferentes ramas de la física, pero en forma de descubrimiento y no como simples fórmulas que relacionan el cociente de dos variables con una constante.

Por ello, es que a los estudiantes se les introduce la proporción entre dos variables, con la medición de las longitudes de los dedos de sus propias manos, buscando relaciones de proporcionalidad entre las longitudes de las falanges de los dedos con la longitud de los dedos. El resultado obtenido es que existen estas proporciones que en algunos casos son de proporción aurea y que los estudiantes descubren bajo una instrucción guiada.

II. LA PROPORCIÓN AUREA

Desde la antigüedad, las proporciones en el arte, la arquitectura y los humanos se van conformando según los conceptos de armonía y belleza que se basan en la proporción dorada o razón aurea. En la arquitectura, los antiguos egipcios aplican la razón aurea en la construcción de la gran pirámide de Guiza, una de las "siete maravillas del mundo antiguo". No se sabe, si su constructor Hemiunu (ca. 2570 a.C.) aplicó conscientemente la razón aurea o no. Los griegos aplicaron la razón aurea en la música y en la construcción del Partenón[2].

La primera referencia matemática de la razón aurea la establece Euclides (ca. 300 a.C.) en la proposición 11 del libro II de sus Elementos que consiste de trece libros. Ahí, Euclides construye un segmento de recta AB que corta en un punto C de tal manera que se forme un rectángulo con el segmento entero y una de sus partes, que es igual al cuadrado del segmento restante.

Esto es (figura 3), si $AC^2 = AB \cdot CB$ o $AB/AC = AC/CB$ o bien:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{c} = \varphi. \quad (1)$$

La denominación de la razón aurea como φ se hizo en honor del arquitecto Fideas ($\Phi\varepsilon\iota\delta\iota\alpha\zeta$), arquitecto del Partenón. La fachada del Partenón, es un rectángulo áureo.

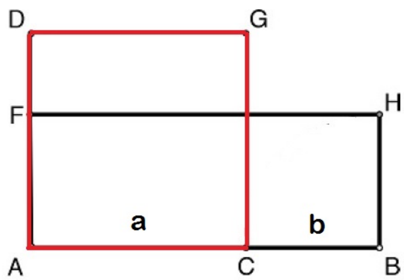


FIGURA 3. Representación geométrica de la razón aurea. El segmento a + b está en proporción áurea con el segmento a, y

La demostración geométrica de Euclides considera el segmento de recta ACB, donde el punto C corta a este segmento, de tal manera que el segmento CB se usa para construir el rectángulo $ABHF$, donde $CB = HB$, con esta construcción, Euclides demuestra que el cuadrado $ACGD$ tiene la misma área que el rectángulo $ABHF$. Más adelante, en la definición 3 del libro VI, Euclides hace la siguiente definición:

"Un segmento de línea recta se dice que se corta en *razón media y extrema*, si todo el segmento es al segmento más grande, como el segmento más grande es al menor"

La proporción áurea φ, también llamada razón áurea, razón dorada o divina proporción, es un número irracional que se expresa por la siguiente ecuación:

$$\varphi = 1 + \sqrt{5}/2 = 1.61803398874989 \ldots \quad (2)$$

II. RELACIÓN DE PROPORCIONALIDAD

La relación de proporcionalidad entre dos cantidades aparece frecuentemente en la naturaleza, sin embargo, este concepto es difícil de asimilar para los estudiantes y cuando en clase se trata de establecer una relación de proporcionalidad del tipo $y = kx$, con k constante, que frecuentemente se denota como $y \propto x$. En un experimento, en donde se miden un conjunto de valores de las variables x y y, que guardan una relación de proporcionalidad, los estudiantes no la identifican como tal y la ven como un cociente del tipo $y/x = a$, donde los valores de a varían (debido a errores en la medición de estas variables) para diferentes valores de la pareja (x, y), que ellos no logran identificar como una constante. Al tratar de que los estudiantes grafiquen $y \; vs \; x$ para identificar la constante a como la pendiente de la relación de proporcionalidad $y = ax$, ellos grafican los puntos experimentales, pero no trazan una recta que se ajuste a estos puntos, en su lugar, ellos calculan valores de Δy, Δx y $\Delta y/\Delta x$, para determinar a, que no logran interpretar por completo que se trata de una constante.

El ejemplo en física, es la relación de proporcionalidad que existe entre x y t para un objeto que se mueve con velocidad constante. Los estudiantes lo ven como un cociente $\Delta x/\Delta t$ en donde el resultado, no necesariamente resulta ser constante, si los valores operados son obtenidos experimentalmente.

Para mostrar cómo se obtiene una relación de proporcionalidad en el laboratorio, consideremos la medición de la densidad de una sustancia, por medio de la expresión:

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad (3)$$

con m la masa del cuerpo, V su volumen y ρ su densidad.

Si el material es homogéneo, su densidad es constante y la relación (3) expresa una relación de proporcionalidad de la forma:

$$m = \rho V, \quad (4)$$

donde ρ es la constante de proporcionalidad.

Para ejemplificar como establecer experimentalmente esta relación, considérese que se quiere medir la densidad de la plastilina. La manera inmediata de hacerlo es tomar el pedazo de plastilina, medir su masa: $(25.2 \pm 0.05)\,g$ con una balanza, su volumen con una probeta: $(14.2 \;\pm 5\; cm^3)$ y su densidad por medio de la expresión (2b), obteniéndose un valor de $\rho_{plastilina} = (1.77 \;\pm 0.63) g/cm^3$.

La incertidumbre porcentual del valor medido para la densidad de la plastilina es de 35%, que es una incertidumbre demasiado grande para un valor medido. Para mejorar este valor, se miden las masas y volúmenes para 10 pedazos de plastilina y se determinan sus densidades. Los resultados de esta medición se muestran en la Tabla I.

(V +/- 5) cm^3	(m +/- 0.05) g	ρ (g/cm^3)	δρ (g/cm^3)	δρx100/ρ
14.2	25.2	1.77	0.63	35
16.3	29.4	1.81	0.56	31
20.3	36.7	1.81	0.44	25
20.3	37.8	1.86	0.46	25
24.4	39.7	1.63	0.33	21
24.4	42.7	1.75	0.36	21
26.4	44.8	1.70	0.32	19
26.4	45.2	1.71	0.32	19
28.5	45.2	1.59	0.28	18
30.5	45.8	1.50	0.25	16

TABLA I. Datos de las mediciones realizadas con diez pedazos de plastilina para determinar su densidad.

La densidad promedio de la plastilina que se calcula a partir de la Tabla I, es: $\bar{\rho}_{plastilina} = (1.71 \;\pm 0.11) g/cm^3$ y su incertidumbre porcentual es 7%, que es cinco veces mejor que el valor obtenido para el primer pedazo de plastilina.

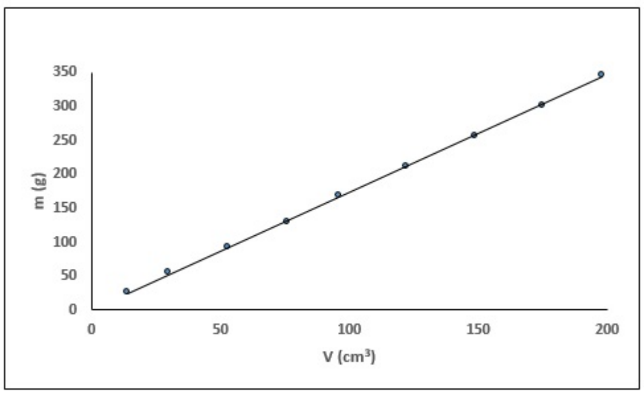
La pregunta ahora, es: ¿podemos mejorar la medición de la densidad de la plastilina?, la respuesta es sí. En lugar de utilizar el método anterior que llamaremos *el método de los promedios*, aplicaremos el *método acumulativo de valores*.

Esto es, tomaremos los mismos pedazos de plastilina que en el caso anterior, pero cada vez que midamos una masa o volumen nuevo, se hace, agregándolos a la masa o volumen ya medidos, empezando con un pedazo. En la Tabla II se dan los datos de estas mediciones. De esta manera, las incertidumbres porcentuales debido a la balanza y a la probeta, van disminuyendo para cada medición acumulada, lo que mejora la precisión de la medida.

(V +/- 5) cm^3	(m +/- 0.05) g
14.2	25.2
16.3	29.4
20.3	36.7
20.3	37.8
24.4	39.7
24.4	42.7
26.4	44.8
26.4	45.2
28.5	45.2
30.5	45.8

TABLA II. Datos de las mediciones acumuladas con diez pedazos de plastilina para determinar su densidad.

Para obtener la densidad de la plastilina a partir de los datos de la Tabla II, se procede a hacer la gráfica $m\ vs\ V$ y a obtener los parámetros de la relación resultante (Gráfica I).



GRÁFICA I. Relación m vs V.

La Gráfica I es una línea recta, que tiene por ecuación:

$$m = (1.732\ \pm 0.013)\frac{g}{cm^3}\,V + (0.5 \pm 1.5)\ g, \qquad (5)$$

donde $\rho = (1.732\ \pm 0.013)\frac{g}{cm^3}$, es la medida de la densidad de la plastilina por el método acumulativo. La relación es de proporcionalidad directa, ya que la ordenada al origen $m_0 = 0.5\ g$, está dentro del intervalo de incertidumbre (-1.0,2.0) que incluye el origen.

La incertidumbre porcentual de la densidad de la plastilina por este método es 0.8%, que mejora en un orden de magnitud la precisión la del método de los promedios.

III. LA INVESTIGACIÓN

Para promover, en un contexto no necesariamente de la física, la aplicación del concepto de proporcionalidad, se propone a los estudiantes investigar en el cuerpo humano las proporciones que existen entre sus partes, en particular la posible relación de proporcionalidad de los propios dedos de las manos de los estudiantes, que son fáciles de medir y de relacionar las longitudes entre sus partes, para descubrir, estas proporcionalidades que, si bien existen, son poco conocidas.

Ya en la antigüedad, el arte ha requerido de conocer este tipo de proporcionalidades para su producción creativa, ya sea en el arte rupestre o en el hombre de Vitruvio de da Vinci, que es el dibujo de dos figuras sobrepuestas de un hombre, con los brazos y piernas extendidos e inscritos en un círculo y un cuadrado, tangentes en un solo punto. La razón aurea se muestra en este dibujo en la distancia que va del ombligo a lo alto de la cabeza y la distancia que va de las plantas de los pies a su ombligo, que es el centro del círculo.

Pero la ciencia ha sido lenta en incorporar este saber en el conocimiento humano y en la docencia es un conocimiento poco estudiado [6]. Por ello, al estudiar las proporciones del cuerpo humano en el salón de clase, resulta ser un factor de descubrimiento para los estudiantes.

Para ello, se plantea a los estudiantes determinar la relación entre la longitud del dedo humano con sus partes, y para estimular la investigación se hacen las siguientes preguntas:

¿Existe una proporción entre la longitud del dedo de una mano humana y sus partes (falanges)?, si esto es así, ¿de qué tipo es esta proporción?

Para encontrar respuestas a estas dos preguntas, se sigue los siguientes pasos: 1) Se fotografían las manos de todos los estudiantes del grupo sobre un papel milimétrico, 2) Se insertan las fotografías en power point para la medición de la longitud de los dedos y sus falanges, 3) Se recortan las fotografías al tamaño de la hoja milimétrica, 4) Se traza una línea de longitud conocida e igual al largo o ancho de la hoja milimétrica para determinar la escala de la fotografía, 5) Se acotan los dedos de cada mano con líneas del tamaño del dedo humano y sus falanges, como se muestra en la figura 4, 5 y 6,) Se miden las longitudes de cada una de estas líneas y todas estas longitudes se anotan en una hoja de cálculo, para ser relacionadas gráficamente.

IV. LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LOS DEDOS DE LA MANO

De acuerdo con Tosto, existe una proporción aurea entre las partes de los dedos de la mano (ver figura 4).

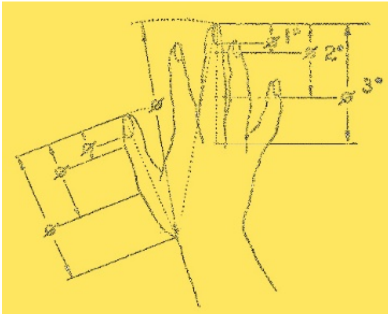


FIGURA 4. Proporción áurea de los dedos de la mano [7].

Para verificar las proporciones entre las falanges de los dedos de las manos, en la fotografía de las manos, se marcaron las falanges con círculos negros y se unieron mediante líneas amarillas (ver figura 5), para hacer mediciones.

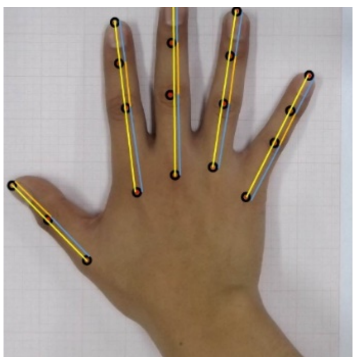


FIGURA 5. Dedos con líneas de acotación de la longitud de los dedos de la mano y sus partes.

En la figura 6 se muestra la división en dos partes del dedo medio de la mano. La suma de las longitudes de las falanges media y distal del dedo se ha marcado como la longitud a y la longitud de la falange proximal se marca como la longitud b, por lo tanto, la longitud del dedo se marca como $a + b$. Igual se hace para el resto de los dedos.

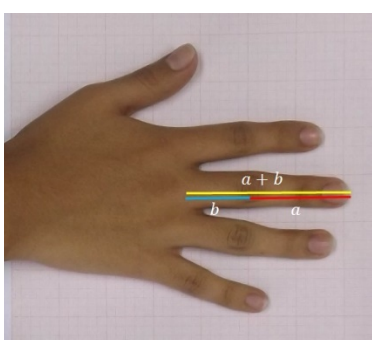


FIGURA 6. Proporción aurea en el dedo medio de la mano, donde a es la longitud de la suma de las falanges media y distal, b la longitud de la falange proximal y $a + b$ es la longitud total del dedo.

Las mediciones de a y b se hacen para cada dedo de la mano e independientemente se hace la medida de a $a + b$, para luego relacionarlas.

V. PROPORCIONALIDAD ENTRE FALANGES

Para encontrar las relaciones entre las longitudes de los dedos con sus falanges, en un grupo de 25 alumnos, se midieron: (a) las longitudes de los dedos de la mano derecha de cada alumno, y (b) las longitudes de las falanges (proximal, media y distal) correspondientes a sus dedos.

Para establecer la relación entre las longitudes de los dedos de la mano con las longitudes de sus respectivas falanges; para cada dedo, se construyeron Tablas de valores en bruto y acumulados de sus longitudes, la de sus falanges y de la suma de sus falanges medias y distales (figura 6), para hacer gráficas que relacionen estas longitudes.

#	Falange proximal meñique	Falange media meñique	Falange distal meñique	Longitud del dedo meñique
1	3.46	2.31	2.35	8.08
2	2.96	2.01	1.96	6.9
3	3.6	2.23	2.06	7.9
4	3.75	2.39	1.78	7.92
5	3.15	2.05	2.13	7.3
6	3.2	2.26	2.25	7.73
7	3.64	2.07	2.4	8.05
8	3.06	2.21	2.08	7.26
9	2.86	2.06	2.15	6.99
10	2.89	1.7	2.01	6.56
11	2.17	1.81	2.21	6.14
12	2.48	2.02	1.91	6.17
13	2.95	1.75	2.03	6.51
14	2.49	2.75	1.73	6.22
15	2.72	1.91	1.92	6.47
16	3.03	1.85	1.81	6.64
17	2.72	1.91	2	6.48
18	3.42	2.06	2	7.52
19	2.1	1.66	1.73	5.48
20	1.93	1.73	1.82	5.64
21	2.15	1.74	2.8	5.86
22	2.34	2.04	1.97	6.18
23	2.47	1.76	2.13	6.28
24	3.06	2.12	2.04	7.09
25	2.7	1.64	2.09	6.14

TABLA II. Datos de la medición de las longitudes de los dedos meñiques del grupo de 25 estudiantes y de sus falanges.

Así, para el dedo meñique, los valores de las mediciones de las longitudes de las falanges y las longitudes de los dedos meñiques de los estudiantes se dan en la Tabla II, los valores acumulados de estas longitudes y de la suma de las falanges media y distal, se dan en la Tabla III.

Las longitudes acumuladas de la Tabla III son la suma de las longitudes absolutas que se dan en la Tabla II. La ventaja al graficar, en lugar de los valores de la Tabla II, los de la Tabla III es reducir la dispersión de los datos.

En la Tabla IV se dan las abreviaturas que se usan para los valores acumulados para cada uno de los dedos y falanges de las manos de los 25 estudiantes. El cálculo de los valores acumulados, permite establecer gráficamente la relación entre la longitud de cada uno de los dedos de la mano con sus respectivas falanges. En las tablas siguientes II y III, por brevedad del escrito, sólo se reportan las mediciones hechas para los dedos meñiques de los 25 estudiantes, pero las mediciones realizadas se extendieron al resto de los dedos.

Falange proximal meñique FP	Falange media meñique FM	Falange distal meñique FD	Falanges media + distal FMD	Longitud del dedo meñique LMq
3.46	2.31	2.35	4.66	8.08
6.41	4.32	4.31	8.62	14.98
10.02	6.54	6.37	12.91	22.88
13.77	8.93	8.15	17.09	30.79
16.92	10.98	10.28	21.26	38.09
20.12	13.24	12.54	25.78	45.83
23.76	15.31	14.94	30.25	53.88
26.82	17.52	17.02	34.54	61.14
29.68	19.58	19.17	38.74	68.12
32.58	21.28	21.18	42.46	74.68
34.74	23.08	23.39	46.47	80.83
37.23	25.1	25.3	50.4	87
40.18	26.86	27.33	54.18	93.5
42.67	29.6	29.06	58.66	99.73
45.39	31.51	30.98	62.49	106.2
48.41	33.36	32.79	66.15	112.84
51.13	35.27	34.79	70.06	119.32
54.55	37.33	36.78	74.11	126.83
56.66	38.99	38.52	77.51	132.32
58.58	40.73	40.34	81.06	137.95
60.74	42.47	43.13	85.6	143.82
63.07	44.5	45.11	89.61	150
65.54	46.27	47.23	93.5	156.27
68.6	48.39	49.27	97.66	163.36
71.29	50.03	51.36	101.38	169.51

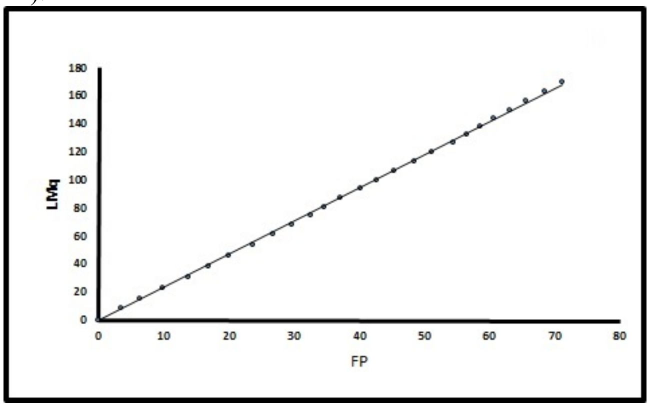
TABLA III. Datos acumulados de las longitudes de los dedos meñiques del grupo de 25 estudiantes y de sus falanges.

Longitud acumulada de los dedos de la mano	Longitud acumulada de las falanges de los dedos
LMq: longitud acumulada del dedo meñique	FP: longitud acumulada de la falange proximal
LA: longitud acumulada del dedo anular	FM: longitud acumulada de la falange media
LMe: longitud acumulada del dedo medio	FD: longitud acumulada de la falange distal
LI: longitud acumulada del dedo índice	FPM: Suma de la falange proximal y media
LP: longitud acumulada del dedo pulgar	FMD: Suma de la falange media y distal

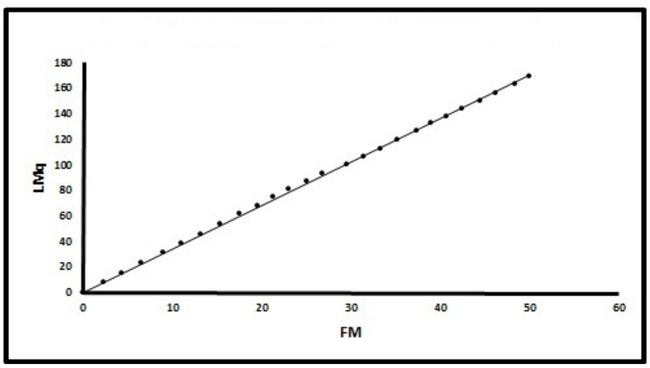
TABLA IV. Abreviaturas para las longitudes acumuladas de los dedos y sus falanges.

VI. GRÁFICAS

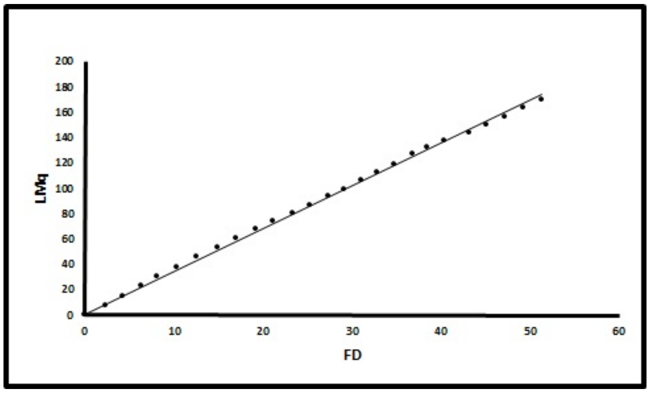
La relación de proporción directa entre dos variables x y y se representa gráficamente por líneas rectas que pasan por el origen. Las gráficas para el dedo meñique consideran las siguientes relaciones de proporcionalidad: LMq vs FP (Gráfica II), LMq vs FM (Gráfica II), LMq vs FD (Gráfica III).



GRÁFICA II. Proporción directa entre la longitud del dedo meñique con su falange proximal.



GRÁFICA III. Proporción directa entre la longitud del dedo meñique con su falange media.



GRÁFICA IV. Proporción directa entre la longitud del dedo meñique con su falange distal.

Las gráficas II, III y IV, muestran la proporcionalidad que existe entre las longitudes acumuladas de los dedos meñiques de 25 estudiantes con las longitudes acumuladas de sus respectivas falanges proximal, media y distal.

Estas relaciones de proporcionalidad se pueden representar por la siguiente relación de proporcionalidad entre las variables x y y:

$$y = cx \tag{6}$$

donde x representa la longitud acumulada de una falange (proximal, media, distal) del dedo meñique y y representa la longitud acumulada de la longitud del dedo meñique, como aparecen en la Tabla III, de valores acumulados.

La constante c es la constante de proporcionalidad y es la característica de esa proporción. Esta constante se obtiene del ajuste por mínimos cuadrados de las gráficas II, III y IV, en donde se ha fijado a cero la ordenada al origen de estas rectas.

En la Tabla V se dan los valores de esta constante para las gráficas anteriores, y se agrega el factor de correlación R^2 que es una medida de la linealidad de la relación entre x y y, siendo uno la linealidad cien por ciento.

La constante de proporcionalidad directa entre el dedo meñique y su falange proximal es de 2.35, con su falange media es de 3.40 y con su falange distal es de 3.39.

Gráfica	c	R^2
1	2.35	0.9993
2	3.40	0.9994
3	3.39	0.9976

TABLA V. Pendientes de las rectas de las gráficas II, III, IV, que establecen la constante de proporcionalidad c entre las falanges y la longitud del dedo meñique.

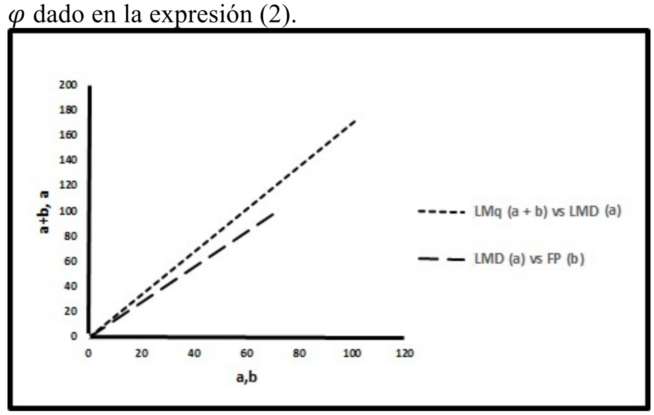
VII. PRUEBA DE PROPORCIÓN AUREA

Para determinar si hay una relación de proporción aurea entre los dedos de la mano y sus falanges, se considera el largo del dedo como la longitud $a + b$, la suma de las longitudes de las falanges media y distal como la longitud a y el largo de la falange proximal como la longitud b, (ver figura 6), esto es, a = LMD, b = FP y $a + b$ = LMq (longitud del dedo meñique). Esta proporción también se establece para el resto de los dedos de la mano, excepto el dedo pulgar (LA, longitud del dedo anular, LMe, longitud del dedo medio ó LI, longitud del dedo índice).

Las gráficas V a VIII muestran para los dedos meñique, anular medio e índice, la comparación de las rectas $a + b$ *vs* a y a *vs* b, esto es, el largo del dedo *versus* la suma de las falanges media y distal y la suma de las falanges media y distal *versus* la falange proximal.

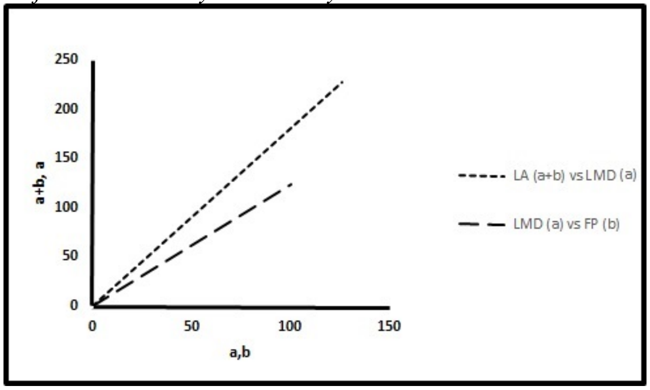
La razón aurea, está dada según la expresión (2) y es numéricamente igual al valor establecido en (1). Es decir, en cada una de las gráficas V a la VIII, si las pendientes (a + b)/a y a/b son iguales a 1.618…, se establece una relación de proporción aurea.

En la gráfica V se compara la relación de proporcionalidad entre el largo del dedo meñique $a + b$ y el largo de sus falanges media y distal a, con el largo de sus falanges media y distal a y el largo de la falange proximal b. El resultado es $(a + b)/a = 1.70$ y $a/b = 1.38$, para el dedo meñique. Ambas razones no son iguales, por ello la proporción entre las dos partes en que se ha dividido el dedo meñique no es aurea, sin embargo, el valor medio entre estas dos razones es 1.54, que se aproxima al valor de φ dado en la expresión (2).



GRÁFICA V. Proporción directa entre $(a + b)/a$ y a/b, para el dedo meñique.

Este tipo de comparación también se establece para los dedos anular, medio e índice en las gráficas VI, VII y VIII.



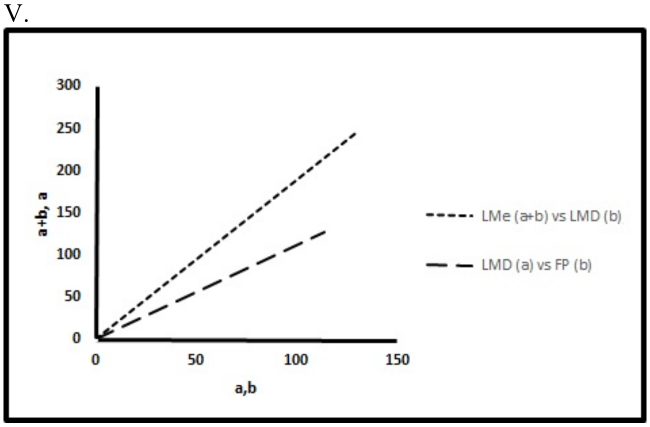
GRÁFICA VI. Proporción directa entre $(a + b)/a$ y a/b, para el dedo anular.

Igual que en la gráfica V, en la gráfica VI se comparan la razón entre $a + b$ y a, con la razón entre a y b, para el dedo anular. El resultado es $(a + b)/a = 1.80$ y $a/b = 1.24$, para el dedo anular. Al igual que con el dedo meñique la proporción entre las dos partes en que se ha dividido el dedo anular no es aurea, sin embargo, el valor medio entre estas dos razones es 1.52, que se aproxima al valor de φ de la expresión (2).

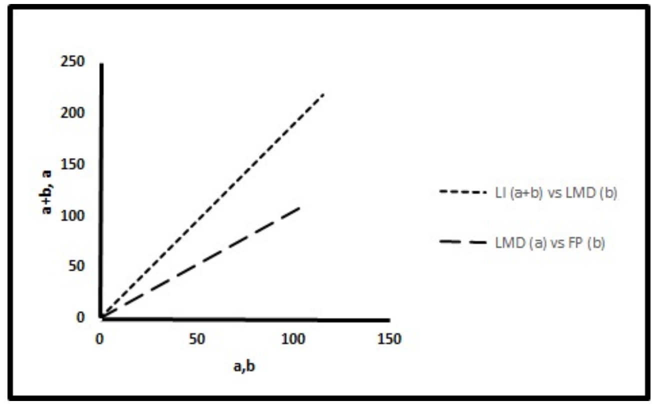
Para el dedo medio, los resultados obtenidos en la gráfica VII son $(a + b)/a = 1.89$ y $a/b = 1.11$, con un valor medio de 1.50. Al igual que en los dos casos anteriores, la proporción en que se ha dividido el dedo medio, no es aurea, a pesar de que su valor medio es de 1.50, cercano al valor de φ de la expresión (2).

Para el dedo índice $(a + b)/a = 1.89$ y $a/b = 1.05$, con un valor medio de 1.47, tampoco hay una proporción aurea para la proporción en que se ha dividido el dedo medio, aunque su valor medio es de 1.47, cercano al valor de φ de la expresión (2).

El resultado de comparar $(a + b)/a$ con a/b (figura 6), para cada dedo de la mano, no muestra la relación aurea de la expresión (1), sin embargo, el dedo meñique es el que más se acerca a esta proporción., como se ve en la gráfica V.



GRÁFICA VII. Proporción directa entre $(a + b)/a$ y a/b, para el dedo medio.



GRÁFICA VIII. Proporción directa entre $(a + b)/a$ y a/b, para el dedo índice.

El resumen de los valores entre $(a + b)/a$ y a/b para los dedos de la mano, se muestran en la Tabla VI.

Gráfica	Dedo	$(a + b)/a$	a/b	Valor medio
11	Meñique	1.70	1.38	1.54
12	Anular	1.80	1.24	1.52
13	Medio	1.89	1.11	1.50
14	Índice	1.89	1.05	1.47

TABLA VI. Razones $(a + b)/a$ y a/b para los dedos meñique, anular, medio e índice de la mano

VI. ANÁLISIS

Cada dedo está compuesto de tres falanges (proximal, media y distal), excepto el pulgar y las relaciones entre las longitudes de los dedos de la mano con sus falanges son relaciones de proporción directa como lo muestran las gráficas II, a IV, para el dedo meñique.

La expresión (3) aplicable al dedo meñique y sus falanges, con los valores de la constante de proporcionalidad c dados en la Tabla V, de acuerdo a los datos obtenidos (no reportados aquí) también es válido para los dedos anular, medio, índice y pulgar y sus respectivas falanges

Probada la relación de proporcionalidad entre la longitud de los dedos con el largo de sus falanges, fue necesario investigar si la relación de proporcionalidad era una relación de proporción aurea, como se ha expresado en la expresión (1).

Para ello se hicieron las gráficas V a VIII, de las longitudes acumuladas de los dedos meñiques, anulares, medios e índices, con dos rectas cada uno, que representan los términos de la relación aurea mostrados en la figura 3 y que expresaremos de la siguiente manera:

Sea y, como antes, la longitud acumulada de cualquiera de los dedos de la mano, la cual la consideraremos partida en dos partes a y b, sea a la longitud de las falanges media y distal y sea b la longitud de su falange proximal, entonces, si se grafica $a + b$ vs a o a vs b (gráficas V a

VIII), se puede determinar si se cumple la relación de igualdad $(a + b)/a = a/b = \varphi$ en los dedos de la mano.

En la Tabla VI, se determinan los valores $(a + b)/a$ y a/b y se comparan con el valor de φ dado en (2), para todos los dedos de la mano, excepto el dedo pulgar que tiene dos falanges. El resultado obtenido muestra que, para el dedo meñique, la relación $(a + b)/a = 1.70$, que se aproxima al valor de φ, con una discrepancia menos del 5%, sin embargo, la relación $a/b = 1.38$, difiere de φ en 15%, así que la relación aurea para el dedo meñique, sólo es cierta dentro de un 15% de error.

En la misma Tabla VI se muestra los valores $(a + b)/a$ y a/b, para los dedos anular, medio e índice y la discrepancia con el valor de φ es mayor que para el dedo meñique, por lo que la relación de proporción aurea ya no es posible para estos dedos, de acuerdo a los datos experimentales.

Por lo que, según los valores de la Tabla VI, la relación aurea en los dedos de la mano no es válida para los dedos de la mano, sin embargo, el valor medio entre las razones de esta Tabla, para cada dedo es de 1.5, indicando otro tipo de proporcionalidad, donde $((a + b)/a + a/b)/2 = 3/2$ o bien $a = b$, como una tendencia general en los dedos de la mano.

IV. CONCLUSIONES

La proporción de la longitud de los dedos de las manos con la longitud de sus respectivas falanges es cierta según se muestran en las gráfica II a IV para el dedo meñique y para los dedos anular, medio, índice y pulgar según datos no reportados aquí por falta de espacio Sin embargo, la proporción aurea de las longitudes de los dedos de la mano, si se parten en dos partes desiguales, la falange proximal y la longitud sumada de las falanges media y distal, solo se puede considerar aurea para el dedo meñique con un error experimental del 15%, pero para el resto de los dedos la relación de proporción aurea no es válida. Los valores medios reportados en la Tabla VI, deja abierta la posibilidad de que se cumpla la relación $a = b$, pero habrá que ser cuidadosos de tomar por segura esta afirmación, ya que existen errores en la medición debido a que se no se hacen con falanges tomadas directamente de radiografías, con lo cual se pueden incurrir en errores sistemáticos de apreciación.

Por otra parte, nueva hipótesis surge de los resultados experimentales que se han obtenido en la medición de las longitudes de los dedos y sus respectivas falanges de 25 estudiantes.

La constante de proporcionalidad c es diferente para cada dedo de la mano, pero si se repitiera la medición del largo de los dedos y sus falanges con otro grupo de personas, sus valores se mantendrían iguales, pues son constantes de proporcionalidad característicos de los seres humanos.

Esta hipótesis, queda por ser probada en trabajos posteriores, por lo que este artículo sólo es el punto de partida de una investigación que se puede llevar más a fondo para obtener resultados generales.

Sin embargo, el propósito de este trabajo, fue el de introducir a los estudiantes a este tipo de proyecto, estudiantes no necesariamente de ciencias, sino también estudiantes de fotografía de preparatoria, (con los que se hicieron las tomas fotográficas de la mano para este estudio); proyecto que les resulta interesante y motivante, pues manifiestan su deseo de conocer acerca de estas proporcionalidades y están motivados a seguir el proceso de investigación hasta el final.

REFERENCIAS

[1] Onetto, M. *En tus manos. Cueva de las manos*. Manual Educativo. (AECID, Argentina, 2004).

[2] Posamentier, A., S., and Lehmann, I. *The Glorious Golden Ratio*. (Prometheus Books, New York, 2012).

[3] Martínez del S., M. *Geometría Mesoamericana*. (Fondo de Cultura Económica, México, D.F., 2002).

[4] W. de Spinadel, V. *La familia de los números metálicos*. Cuadernos del CIMBAGE **6**. Centro de Matemática y Diseño MAyDI, Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo, Universidad de Buenos Aires, 17-44, (2003).

[5] Wilson, F., R. *La mano. De cómo su uso configura el cerebro, el lenguaje y la cultura humana.* Colección libros para pensar la ciencia. Tusquets, Eds. 1ra. Ed., (Barcelona, 2002).

[6] Acaso, M., y Belver, M., H. *Didáctica de las artes y cultura visual*. (Akal, España, 2011).

[7] Tosto, P. *La Composición Áurea en las Artes Plásticas*. 3ra. Ed. (Hachette, Buenos Aire, 1958).